Exercices supplémentaires

1. Utilisez l'induction mathématique pour montrer que $\frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \cdots + \frac{2}{3^n} = 1 - \frac{1}{3^n}$ chaque fois que n est un entier positif.

2. Utilisez l'induction mathématique pour montrer que $1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n+1)^3 = (n+1)^2(2n^2+4n+1)$ chaque fois que n est un entier positif.

3. Utilisez l'induction mathématique pour montrer que $1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + n \cdot 2^{n-1} = (n-1) \cdot 2^n + 1$ chaque fois que n est un entier positif.

4. Utilisez l'induction mathématique pour montrer que

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

chaque fois que n est un entier positif.

5. Montrez que

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$$

chaque fois que n est un entier positif.

6. Utilisez l'induction mathématique pour montrer que $2^n > n^2 + n$ chaque fois que n est un entier supérieur à 4.

7. Utilisez l'induction mathématique pour montrer que $2^n > n^3$ quand- toujours n est un entier supérieur à 9.

8. Trouvez un entier N tel que $2^n > n^4$ chaque fois que n est supérieur de N. Démontrez que votre résultat est correct en utilisant induction thermique.

9. Utiliser l'induction mathématique pour prouver que $a - b$ est un facteur d' $un^n - b^n$ chaque fois que n est un entier positif.

10. Utiliser l'induction mathématique pour prouver que 9 divise $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ chaque fois que n est un entier non négatif.

11. Utilisez l'induction mathématique pour prouver que 43 divisions $6^{n+1} + 7^{2n-1}$ pour chaque entier positif n.

12. Utilisez l'induction mathématique pour prouver que 64 divisions $3^{2n+2} + 56n + 55$ pour chaque entier positif n.

13. Utilisez l'induction mathématique pour prouver cette formule somme des termes d'une progression arithmétique.

$$a + (a+d) + \cdots + (a+nd) = (n+1)(2a+nd)/2$$

14. Supposons que $a_j \equiv b_j \pmod{m}$ pour $j = 1, 2, \ldots, n$. Utilisation induction mathématique pour prouver que

une) $\sum_{j=1}^{n} a_j \equiv \sum_{j=1}^{n} b_j \pmod{m}$.

b) $\prod_{j=1}^{n} a_j \equiv \prod_{j=1}^{n} b_j \pmod{m}$.

15. Montrer que si n est un entier positif, alors

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k+4}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(3n+7)}{2(n+1)(n+2)}.$$

16. Pour quels entiers positifs n est $n + 6 < (n^2 - 8n)/16$? Prouvez votre réponse en utilisant l'induction mathématique.

17. (*Nécessite un calcul*) Supposons que $f(x) = e^x$ et $g(x) = xe^x$. Utilisez l'induction mathématique avec le produit règle uct et le fait que $f(x) = e^x$ prouver que $g^{(n)}(x) = (x+n)e^x$ chaque fois que n est un entier positif.

18. (*Nécessite un calcul*) Supposons que $f(x) = e^x$ et $g(x) = e^{cx}$, où c est une constante. Utilisez l'induction mathématique pour- gether avec la règle de la chaîne et le fait que $f(x) = e^x$ à prouver que $g^{(n)} = c^n e^{cx}$ chaque fois que n est un entier positif.

∗ **19.** Formuler une conjecture sur laquelle les nombres de Fibonacci sont pairs et utilisent une forme d'induction mathématique pour prouver votre conjecture.

∗ **20.** Déterminez quels nombres de Fibonacci sont divisibles par 3. Utilisez une forme d'induction mathématique pour prouver votre jecture.

∗ **21.** Démontrer que $f_k f_n + f_{k+1} f_{n+1} = f_{n+k+1}$ pour tous les nonnega- entiers n et k, où f_i désigne le i ème Fibonacci nombre.

Rappelons de l'exemple 15 de la section 2.4 que la séquence des **nombres** de **Lucas** est défini par $l_0 = 2$, $l_1 = 1$ et $l_n = l_{n-1} + l_{n-2}$ pour $n = 2, 3, 4, \ldots$.

22. Montrer que $f_n + f_{n+2} = l_{n+1}$ chaque fois que n est un teger, où f_i et l_i sont le i ème nombre de Fibonacci et i e nombre de Lucas, respectivement.

23. Montrer que $l_0^2 + l_1^2 + \cdots + l_n^2 = l_n l_{n+1} + 2$ chaque fois que n est un entier non négatif et l_i est le i ème nombre de Lucas.

∗ **24.** Utiliser l'induction mathématique pour montrer que le produit de tout n entier positif consécutif est divisible par $n!$. [*Astuce:* utiliser le identité $m(m+1)\cdots(m+n-1)/n! = (m-1)m(m+1)\cdots(m+n-2)/n! + m(m+1)\cdots(m+n-2)/(n-1)!$.]

25. Utiliser l'induction mathématique pour montrer que $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$ chaque fois que n est un positif Teger. (Ici, *je suis* la racine carrée de -1.) [*Astuce:* Utiliser les identités $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.]

∗ **26.** Utilisez l'induction mathématique pour montrer que $\sum_{j=1}^{n} \cos jx = \cos[(n+1)x/2] \sin(nx/2)/\sin(x/2)$ chaque fois que n est un entier positif et $\sin(x/2) = 0$.

27. Utiliser l'induction mathématique pour prouver que $\sum_{j=1}^{n} j^2 2^j = n^2 2^{n+1} - n 2^{n+2} + 3 \cdot 2^{n+1} - 6$ pour chaque entier positif ger n.

28. (*Nécessite un calcul*) Supposons que la séquence $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ est récursivement défini par $x_1 = 0$ et $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6}$.

a) Utiliser l'induction mathématique pour montrer que $x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots$, c'est-à-dire que la séquence $\{x_n\}$ est monotone- en augmentation.

b) Utiliser l'induction mathématique pour prouver que $x_n < 3$ pour $n = 1, 2, \ldots$.

c) Montrer que $\lim_{n \to \infty} x_n = 3$.

29. Montrer si n est un entier positif avec $n \geq 2$, alors

$$\sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j^2 - 1} = \frac{(n-1)(3n+2)}{4n(n+1)}.$$

30. Utilisez l'induction mathématique pour prouver le théorème 1 tion 4.2, c'est-à-dire montrer si b est un entier, où $b > 1$, et n est un entier positif, alors n peut être exprimé uniquement sous la forme $n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \cdots + a_1 b + a_0$.

∗ **31.** Un **point de réseau** dans le plan est un point (x, y) où les deux x et y sont des entiers. Utilisez l'induction mathématique pour montrer qu'au moins $n + 1$ lignes droites sont nécessaires pour garantir que chaque point du réseau (x, y) avec $x \geq 0$, $y \geq 0$, et $x + y \leq n$ se trouve sur l'une de ces lignes.

32. (*Nécessite un calcul*) Utilisez l'induction mathématique et le règle de produit pour montrer que si n est un entier positif et $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$, sont toutes des fonctions différenciables, ensuite

$$\frac{(f_1(x) f_2(x) \cdots f_n(x))'}{f_1(x) f_2(x) \cdots f_n(x)} = \frac{f_1'(x)}{f_1(x)} + \frac{f_2'(x)}{f_2(x)} + \cdots + \frac{f_n'(x)}{f_n(x)}.$$

33. (*Requiert des éléments de la section 2.6*) Supposons que $\mathbf{B} = \mathbf{MAM}^{-1}$, où $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont $n \times n$ matrices et $\mathbf{M}$ est inversible. Montrez que $\mathbf{B}^k = \mathbf{MA}^k\mathbf{M}^{-1}$ pour tous les tegers k. (Consultez à la fois le texte de la section 2.6 et le préambule de l'exercice 18 de la section 2.6.)

34. Utilisez l'induction mathématique pour montrer que si vous dessinez des lignes dans l'avion il suffit de deux couleurs pour colorer les régions formées de façon à ce qu'il n'existe pas deux régions mon ont une couleur commune.

35. Montrez que n ! peut être représenté comme la somme de n de ses des diviseurs positifs distincts chaque fois que $n \geq 3$. [*Indice:* utilisez charge ductive. Essayez d'abord de prouver ce résultat en utilisant induction matique. En examinant où votre preuve échoue, trouver une déclaration plus forte que vous pouvez facilement prouver en utilisant Induction mathematique.]

∗ **36.** Utiliser l'induction mathématique pour prouver que si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des nombres réels positifs avec $n \geq 2$, alors

$$\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right)\left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) \cdots \left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) \geq \left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right)\left(x_2 + \frac{1}{x_3}\right) \cdots \left(x_{n-1} + \frac{1}{x_n}\right)\left(x_n + \frac{1}{x_1}\right)$$

37. Utiliser l'induction mathématique pour prouver que si n personnes se tiennent dans une ligne, où n est un entier positif, et si la première per- fils dans la ligne est une femme et la dernière personne en ligne est un l'homme, puis quelque part dans la ligne, il y a une femme directement devant un homme.

∗ **38.** Supposons que pour chaque paire de villes d'un pays, il existe un route à sens unique directe les reliant dans une direction ou L'autre. Utiliser l'induction mathématique pour montrer qu'il est une ville accessible depuis toutes les autres villes directement ou via exactement une autre ville.

39. Utiliser l'induction mathématique pour montrer que lorsque n cercles diviser l'avion en régions, ces régions peuvent être col- orné de deux couleurs différentes de sorte qu'aucune région la frontière commune est de la même couleur.

∗ **40.** Supposons que parmi un groupe de voitures sur une piste circulaire il y a suffisamment de carburant pour une voiture pour effectuer un tour. Utilisation induction mathématique pour montrer qu'il y a une voiture dans le groupe qui peut effectuer un tour en obtenant du gaz d'autres voitures comme il se déplace autour de la piste.

41. Montrer que si n est un entier positif, alors

$$\sum_{j=1}^{n} (2j - 1)\left(\sum_{k=j}^{n} 1/k\right) = n(n+1)/2.$$

42. Utilisez l'induction mathématique pour montrer que si a, b et c sont les longueurs des côtés d'un triangle rectangle, où c est la longueur de l'hypoténuse, puis $a^n + b^n < c^n$ pour tous entiers n avec $n \geq 3$.

∗ **43.** Utilisez l'induction mathématique pour montrer que si n est un entiers positifs, la séquence $2 \mathbf{~mod~} n$, $2^2 \mathbf{~mod~} n$, $2^{2^2} \mathbf{~mod~} n$, $2^{2^{2^2}} \mathbf{~mod~} n$, ... est finalement constant (c'est-à-dire tous les termes après un nombre fini de termes sont tous les mêmes).

44. Une **unité** ou une **fraction égyptienne** est une fraction de la forme $1/n$, où n est un entier positif. Dans cet exercice, nous utilisera une forte induction pour montrer qu'un algorithme gourmand peut être utilisé pour exprimer chaque nombre rationnel p/q avec $0 < p/q < 1$ comme la somme de fractions unitaires distinctes. À chaque étape de l'algorithme, on trouve le plus petit entier positif n tel que $1/n$ puisse être ajouté à la somme sans dépasser ing p/q. Par exemple, pour Express $5/7$, nous commençons la somme avec $1/2$. Parce que $5/7 - 1/2 = 3/14$ nous ajoutons $1/5$ la somme parce que 5 est le plus petit entier positif k tel que $1/k < 3/14$. Comme $3/14 - 1/5 = 1/70$, l'algo- Rithm se termine, montrant que le $5/7 = 1/2 + 1/5 + 1/70$. Soit $T(p)$ la déclaration que cet algorithme se termine pour tous les nombres rationnels p/q avec $0 < p/q < 1$. Nous allons prouver que l'algorithme se termine toujours en montrant que $T(p)$ vaut pour tous les entiers positifs p.

a) Montrer que l'étape de base $T(1)$ est vérifiée.

b) Supposons que $T(k)$ *soit* vrai pour les entiers positifs k avec $k < p$. Autrement dit, supposons que l'algorithme se termine pour tous les nombres rationnels k/r, où $1 \leq k < p$. Spectacle que si nous commençons par p/q et la fraction $1/n$ est sé- sélectionné dans la première étape de l'algorithme, puis $p/q = p'/q' + 1/n$, où $p' = np - q$ et $q' = nq$. Après considérant le cas où $p/q = 1/n$, utilisez l'in- hypothèse ductive pour montrer que l'algorithme gourmand se termine quand il commence par p'/q' et complète la étape inductive.

La **fonction McCarthy 91** (définie par John McCarthy, un des fondateurs de l'intelligence artificielle) est définie à l'aide règle

$$M(n) = \begin{cases} n - 10 & \text{si } n > 100 \\ M(M(n+11)) & \text{si } n \leq 100 \end{cases}$$

pour tous les entiers positifs n.

45. En utilisant successivement la règle de définition de $M(n)$, trouver

a) $M(102)$. **b)** $M(101)$. **c)** $M(99)$.
d) $M(97)$. **e)** $M(87)$. **f)** $M(76)$.

∗∗ **46.** Montrer que la fonction $M(n)$ est une fonction bien définie de l'ensemble des entiers positifs à l'ensemble des entiers positifs gers. [*Astuce:* Démontrez que $M(n) = 91$ pour tous les entiers positifs n avec $n \leq 101$.]

47. Est-ce la preuve que

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}=\frac{3}{2}-\frac{1}{n},$$

chaque fois que n est un entier positif, correct? Justifiez votre swer.

Étape de base: le résultat est vrai lorsque $n = 1$ car

$$\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{1}.$$

Étape inductive: Supposons que le résultat est vrai pour n . alors

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{n(n+1)}$$
$$=\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}.$$

Par conséquent, le résultat est vrai pour $n + 1$ s'il est vrai pour n . Cette complète la preuve.

48. Supposons que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont une collection d'ensembles. Supposons que $R_2 = A_1 \oplus A_2$ et $R_k = R_{k-1} \oplus A_k$ pour $k = 3, 4, \ldots, n$. Utilisez l'induction mathématique pour prouver que $x \in R_n$ si et seulement si x appartient à un nombre impair de définit $A_1, A_2, \ldots, A_n$. (Rappelons que $S \oplus T$ est le symétrique différence des ensembles S et T définis dans le préambule de Exercice 32 de la section 2.2.)

∗ **49.** Montrer que n cercles divisent le plan en $n^2 - n + 2$ re si tous les deux cercles se croisent en exactement deux points et pas trois cercles contiennent un point commun.

∗ **50.** Montrer que n plans divisent l'espace tridimensionnel en $(n^3 + 5n + 6)/6$ régions si trois de ces avions ont exactement un point en commun et aucun ne contient un commun point.

∗ **51.** Utilisez la propriété bien ordonnée pour montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel. [*Astuce:* Supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel. Montre CA l'ensemble des entiers positifs de la forme $b\sqrt{2}$ a au moins élément a . Ensuite , montrer que $la\sqrt{2} - a$ est un plus petit positif entier de cette forme.]

52. Un ensemble est **bien ordonné** si chaque sous-ensemble non vide de ce set a un moindre élément. Déterminez si chacun des les ensembles suivants sont bien ordonnés.

a) l'ensemble des entiers
b) l'ensemble des entiers supérieur à −100
c) l'ensemble des logiques positives
d) l'ensemble des justifications positives dont le dénominateur est inférieur à 100

53. a) Montrer que si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des entiers positifs, alors $\gcd(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n) = \gcd(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, \text{pgcd}(a_{n-1}, a_n))$.

b) Utiliser la partie (a), avec l'algorithme euclidien, pour développer un algorithme récursif pour calculer les est le diviseur commun d'un ensemble de n entiers positifs.

∗ **54.** Décrire un algorithme récursif pour écrire le plus grand diviseur commun de n entiers positifs en combinaison linéaire nation de ces nombres entiers.

55. Trouvez une formule explicite pour $f(n)$ si $f(1) = 1$ et $f(n) = f(n-1) + 2n - 1$ pour $n \geq 2$. Prouvez votre résultat en utilisant Induction mathematique.

∗∗ **56.** Donner une définition récursive de l'ensemble de chaînes de bits contiennent deux fois plus de 0 que de 1.

57. Soit S l'ensemble des chaînes de bits définies récursivement par $\lambda \in S$ et $0x \in S$, $x1 \in S$ si $x \in S$, où λ est la chaîne vide.

a) Trouvez toutes les chaînes en S d'une longueur ne dépassant pas cinq.
b) Donner une description explicite des éléments de S .

58. Soit S l'ensemble des chaînes définies récursivement par $abc \in S$, $bac \in S$ et $acb \in S$, où a , b et c sont des lettres fixes; et pour tout $x \in S$, $abcx \in S$; $abxc \in S$, $axbc \in S$ et $xabc \in S$, où x est une variable représentant une chaîne de des lettres.

a) Trouvez tous les éléments de S de longueur huit ou moins.
b) Montrer que chaque élément de S a une longueur divisible par Trois.

JOHN McCARTHY (NÉ EN 1927) John McCarthy est né à Boston. Il a grandi à Boston et à Los Angeles. Il a étudié les mathématiques en tant qu'étudiant de premier cycle et étudiant diplômé, recevant son BS en 1948 de le California Institute of Technology et son doctorat. en 1951 de Princeton. Après avoir été diplômé de Princeton, McCarthy a occupé des postes à Princeton, Stanford, Dartmouth et MIT Il a occupé un poste à Stanford à partir de 1962 jusqu'en 1994, et y est maintenant professeur émérite. À Stanford, il était directeur de l'intelligence artificielle Laboratoire, détenait une chaire nommée à la School of Engineering, et était chercheur principal à la Hoover Institution.

McCarthy a été un pionnier dans l'étude de l'intelligence artificielle, un terme qu'il a inventé en 1955. Il a travaillé sur les problèmes liés aux besoins de raisonnement et d'information requis pour un comportement informatique intelligent. McCarthy a été parmi les premiers informaticiens à concevoir des systèmes informatiques à temps partagé. Il a développé LISP, un langage de programmation pour l'informatique utilisant des expressions symboliques. Il a joué un rôle important dans l'utilisation de la logique pour vérifier l'exactitude des programmes informatiques. McCarthy a également travaillé sur les implications sociales de la technologie informatique. Il travaille actuellement sur le problème de la façon dont les gens et les ordinateurs font des conjectures en supposant que les complications sont absentes des situations. McCarthy est un défenseur de la durabilité du progrès humain et un optimiste quant à l'avenir de l'humanité. Il a également commencé écrire des histoires de science-fiction. Certains de ses écrits récents explorent la possibilité que le monde soit un programme informatique écrit par une force plus élevée.

McCarthy a notamment remporté le prix Turing de l'Association for Computing Machinery, le Research

Prix d'excellence de la Conférence internationale sur l'intelligence artificielle, le prix de Kyoto et la médaille nationale des sciences.

L'ensemble B de toutes les **chaînes de parenthèses équilibrées** est défini récursivement par $\lambda \in B$, où λ est la chaîne vide; $(x) \in B$, $xy \in B$ si $x, y \in B$.

59. Montrez que *(() ())* est une chaîne équilibrée de parenthèses et *(()))* n'est pas une chaîne équilibrée de parenthèses.

60. Trouvez toutes les chaînes de parenthèses équilibrées avec exactement six symboles.

61. Trouver toutes les chaînes équilibrées de parenthèses avec quatre ou moins symboles.

62. Utilisez l'induction pour montrer que si x est une chaîne équilibrée de parenthèses, le nombre de parenthèses gauches est égal à le nombre de parenthèses droites en x .

Définissez la fonction N sur l'ensemble des chaînes de parenthèses par

$$N(\lambda) = 0 ,\ N(() = 1 ,\ N()) = -1 ,$$
$$N(uv) = N(u) + N(v),$$

où λ est la chaîne vide et u et v sont des chaînes. Ça peut être a montré que N est bien défini.

63. Trouver

a) *N (())*. **b)** *N ())) ()) ((*.

c) *N ((() (()).* **d)** *N () ((())) (())).*

**** 64.** Montrer qu'une chaîne w de parenthèses est équilibrée si et seulement si $N(w) = 0$ et $N(u) \geq 0$ chaque fois que u est un préfixe de w , c'est-à-dire $w = uv$.

*** 65.** Donner un algorithme récursif pour trouver toutes les chaînes équilibrées de parenthèses contenant n ou moins de symboles.

66. Donner un algorithme récursif pour trouver le pgcd (a, b) , où a et b sont des entiers non négatifs non tous deux nuls, sur la base de ces faits: gcd (a, b) = gcd (b, a) si $a > b$, pgcd $(0, b) = b$, pgcd (a, b) = 2 pgcd $(a / 2 , b / 2)$ si a et b sont pair, gcd (a, b) = gcd $(a / 2 , b)$ si a est pair et b est impair, et pgcd (a, b) = pgcd $(a, b - a)$.

67. Vérifiez le segment de programme

si $x > y$ **alors**
$x := y$

par rapport à l'assertion initiale **T** et à l' assertion finale tion $x \leq y$.

*** 68.** Élaborer une règle d'inférence pour vérifier les programmes récursifs grammes et l'utiliser pour vérifier l'algorithme récursif pour la com- mettre les factoriels donnés comme algorithme 1 dans la section 5.4.

Projets informatiques

Écrivez des programmes avec ces entrées et sorties.

69. Concevoir un algorithme récursif qui compte le nombre de fois l'entier 0 apparaît dans une liste d'entiers.

Les exercices 70 à 77 traitent de séquences inhabituelles, formellement appelées **séquences auto-génératrices** , produites par relations ou règles de récurrence simples. En particulier, Exer- les périodes 70 à 75 traitent de la séquence $\{ a(n) \}$ définie par $a(n) = n - a(a(n - 1))$ pour $n \geq 1$ et $a(0) = 0$. (Cette séquence ainsi que celles des exercices 74 et 75 sont définies dans le fascinant livre de Douglas Hofstader *Gödel, Escher, Bach* ([Ho99]).

70. Trouvez les 10 premiers termes de la séquence $\{ a(n) \}$ définie dans le préambule de cet exercice.

*** 71.** Prouver que cette séquence est bien définie. Autrement dit, montrer que $a(n)$ est défini de manière unique pour tous les entiers non négatifs n .

**** 72.** Démontrer que $a(n) = \lfloor (n + 1) \mu \rfloor$ où $\mu = (-1 + \sqrt{5}) / 2$.

[*Astuce:* Premier spectacle pour tout $n > 0$ que $(\mu n - \lfloor \mu n \rfloor) + (\mu^2 n - \lfloor \mu^2 n \rfloor) = 1$. Ensuite, montrez pour tous les nombres réels α avec $0 \leq \alpha < 1$ et $\alpha = 1 - \mu$ que $\lfloor (1 + \mu)(1 - \alpha) \rfloor + \lfloor \alpha + \mu \rfloor = 1$, en considérant les cas $0 \leq \alpha < 1 - \mu$ et $1 - \mu < \alpha < 1$ séparément.]

*** 73.** Utilisez la formule de l'exercice 72 pour montrer que $a(n) = a(n - 1)$ si $\mu n - \lfloor \mu n \rfloor < 1 - \mu$ et $a(n) = a(n - 1) + 1$ sinon.

74. Trouvez les 10 premiers termes de chacun des génération de séquences:

a) $a(n) = n - a(a(a(n - 1)))$ pour $n \geq 1$, $a(0) = 0$
b) $a(n) = n - a(a(a(a(n - 1))))$ pour $n \geq 1$, $a(0) = 0$
c) $a(n) = a(n - a(n - 1)) + a(n - a(n - 2))$ pour $n \geq 3$, $a(1) = 1$ et $a(2) = 1$

75. Trouvez les 10 premiers termes des séquences $m(n)$ et $f(n)$ définie par la paire suivante de récurrences entrelacées relations de rence: $m(n) = n - f(m(n - 1))$, $f(n) = n - m(f(n - 1))$ pour $n \geq 1$, $f(0) = 1$ et $m(0) = 0$.

La séquence autogénératrice de **Golomb** est l'unique séquence croissante des entiers positifs $a_1 , a_2 , a_3 , \ldots$ qui a la propriété qu'il contient exactement *une* $_k$ occurrences de k pour chaque entier positif k .

76. Trouvez les 20 premiers termes de la génération autogénérée de Golomb. par conséquent.

*** 77.** Montrer que si $f(n)$ est le plus grand entier m tel que $a_m = n$, où a_m est le m ième terme de Golomb séquence auto-génératrice, alors $f(n) = \sum_{k=1}^{n} a_k$ et $f(f(n)) = \sum_{k=1}^{n} k a_k$.

** **1.** Étant donné un 2^n damier avec un carré manquant, construire un pavage de ce damier en utilisant le trio droit non.

** **2.** Générez toutes les formules bien formées pour les expressions faisant tourner les variables *x* , *y* et *z* et les opérateurs {+ , ∗ , /, -} avec *n* symboles ou moins.

** **3.** Générez toutes les formules bien formulées pour les propositions avec *n* symboles ou moins où chaque symbole est **T** , **F** , l'un des les variables propositionnelles *p* et *q* , ou un opérateur de {¬ , ∨ , ∧ , → , ↔}.

4. Étant donné une chaîne, trouvez son inversion.

5. Étant donné un nombre réel *a* et un entier non négatif *n* , trouver a^n en utilisant la récursivité.

6. Étant donné un nombre réel *a* et un entier non négatif *n* , trouver a^{2^n} en utilisant la récursivité.

* **7.** Étant donné un nombre réel *a* et un entier non négatif *n* , trouver un^n en utilisant l'expansion binaire de *n* et un algorithme récursif pour calculer un^{2^k} .

8. Étant donné deux nombres entiers non différents de zéro, trouvez leur plus diviseur mon en utilisant la récursivité.

9. Étant donné une liste d'entiers et d'un élément *x* , recherchez *x* dans ce liste utilisant une implémentation récursive d'une recherche linéaire.

10. Étant donné une liste d'entiers et d'un élément *x* , recherchez *x* dans ce liste utilisant une implémentation récursive d'une recherche binaire.

11. Étant donné un entier non négatif *n* , trouver le *n* ème Fibonacci nombre utilisant l'itération.

12. Étant donné un entier non négatif *n* , trouver le *n* ème Fibonacci nombre utilisant la récursivité.

13. Étant donné un entier positif, trouvez le nombre de partitions de cet entier. (Voir l'exercice 47 de la section 5.3.)

14. Étant donné les entiers positifs *m* et *n* , trouvez *A (m, n)* , la valeur de Fonction d'Ackermann à la paire *(m, n)* . (Voir le préambule à l'exercice 48 de la section 5.3.)

15. Étant donné une liste de *n* entiers, triez ces entiers en utilisant tri par fusion.

Calculs et explorations

Utilisez un ou plusieurs programmes informatiques que vous avez écrits pour effectuer ces exercices.

1. Quelles sont les plus grandes valeurs de *n* pour lesquelles *n* ! a moins de 100 chiffres décimaux et moins de 1 000 chiffres décimaux?

2. Déterminez quels nombres de Fibonacci sont divisibles par 5, qui sont divisibles par 7, et qui sont divisibles par 11. Prouvez que vos conjectures sont correctes.

3. Construire des pavages en utilisant des triominos droits de 16 × 16 différents, Damiers 32 × 32 et 64 × 64 avec un carré manquant ing.

4. Découvrez quels *m* × *n* damiers peuvent être complètement recouvert de triominos droits. Pouvez-vous faire une conjecture qui répond à cette question?

** **5.** Mettre en œuvre un algorithme pour déterminer si un point se trouve à l'intérieur ou à l'extérieur d'un simple polygone.

** **6.** Mettre en œuvre un algorithme pour trianguler un poly- gon.

7. Quelles valeurs de la fonction d'Ackermann sont suffisamment petites que vous êtes capable de les calculer?

8. Comparez le nombre d'opérations ou le temps nécessaire pour calculer les nombres de Fibonacci récursivement par rapport qui devait les calculer de manière itérative.

Projets d'écriture

Répondez à ces questions par des essais en utilisant des sources extérieures.

1. Décrivez les origines de l'induction mathématique. Qui étaient les premières personnes à l'utiliser et à quels problèmes ont-ils l'appliquer?

2. Expliquez comment prouver le théorème de la courbe de Jordan pour pleins polygones et décrire un algorithme pour déterminer

4. Décrire une variété d'applications différentes du Fibonacci nombres aux sciences biologiques et physiques.

5. Discutez des utilisations de la fonction d'Ackermann dans la théorie des définitions récursives et dans l'analyse de la complexité des algorithmes pour les unions d'ensembles.

si un point est à l'intérieur ou à l'extérieur d'un simple polygone.

3. Décrire comment la triangulation de polygones simples est utilisée dans certains algorithmes clés en géométrie de calcul.

6. Discutez de certaines des diverses méthodologies utilisées pour établir l'exactitude des programmes et les comparer à Les méthodes de Hoare décrites dans la section 5.5.

7. Expliquez comment les idées et les concepts de l'exactitude du programme peut être étendu pour prouver que les systèmes d'exploitation sont sécurisés.

CHAPITRE

Compte

6.1 Les bases de Compte

6.2 Le pigeonnier Principe

6.3 Permutations et Combinaisons

6.4 Binôme Coefficients et identités

6.5 Généralisé Permutations et Combinaisons

6.6 Génération Permutations et Combinaisons

La combinatoire, l'étude des agencements d'objets, est une partie importante des mathématiques discrètes. ématiques. Ce sujet a été étudié dès le XVIIe siècle, lorsque la combinaison des questions natoriales se sont posées dans l'étude des jeux de hasard. Dénombrement, comptage d'objets avec certaines propriétés, est une partie importante de la combinatoire. Il faut compter les objets à résoudre de nombreux types de problèmes différents. Par exemple, le comptage est utilisé pour déterminer la complexité de algorithmes. Le décompte est également nécessaire pour déterminer s'il y a suffisamment de numéros de téléphone ou des adresses de protocole Internet pour répondre à la demande. Récemment, il a joué un rôle clé en mathématiques la biologie, en particulier dans le séquençage de l'ADN. De plus, les techniques de comptage sont largement utilisées lorsque les probabilités d'événements sont calculées.

Les règles de base du comptage, que nous étudierons à la section 6.1, peuvent résoudre un énorme variété de problèmes. Par exemple, nous pouvons utiliser ces règles pour énumérer les différents téléphones aux États-Unis, les mots de passe autorisés sur un système informatique et le nombre de différents ordres dans lesquels les coureurs d'une course peuvent terminer. Un autre outil combinatoire important est le principe du pigeonnier, que nous étudierons dans la section 6.2. Cela indique que lorsque les objets sont placés dans des boîtes et il y a plus d'objets que de boîtes, puis il y a une boîte contenant au moins deux objets. Par exemple, nous pouvons utiliser ce principe pour montrer que parmi un ensemble de 15 élèves ou plus, au moins 3 sont nés le même jour de la semaine.

Nous pouvons formuler de nombreux problèmes de comptage en termes d'arrangements ordonnés ou les objets d'un ensemble avec ou sans répétitions. Ces arrangements, appelés permutations et sont utilisées dans de nombreux problèmes de comptage. Par exemple, supposons que les 100 meilleurs finisseurs sur concours, 2000 étudiants sont conviés à un banquet. On peut compter les possibles ensembles de 100 étudiants qui seront invités, ainsi que les façons dont les 10 premiers prix peuvent être décernés décerné.

Un autre problème en combinatoire implique de générer tous les arrangements d'un gentil. Ceci est souvent important dans les simulations informatiques. Nous allons concevoir des algorithmes pour générer arrangements de divers types.

Les bases du comptage

introduction

Supposons qu'un mot de passe sur un système informatique se compose de six, sept ou huit caractères Chaque l'un de ces caractères doit être un chiffre ou une lettre de l'alphabet. Chaque mot de passe doit contenir au moins Un chiffre. Combien de ces mots de passe existe-t-il? Les techniques nécessaires pour répondre à cette question et une grande variété d'autres problèmes de comptage seront introduits dans cette section.

Les problèmes de comptage se posent en mathématiques et en informatique. Par exemple, nous doit compter les résultats positifs des expériences et tous les résultats possibles de ces expériences pour déterminer les probabilités d'événements discrets. Nous devons compter le nombre de opérations utilisées par un algorithme pour étudier sa complexité temporelle.

Nous présenterons les techniques de base du comptage dans cette section. Ces méthodes servent de la base de presque toutes les techniques de comptage.

Principes de base du comptage

Nous présentons d'abord deux principes de comptage de base, la **règle de produit** et la **règle de somme** . Ensuite, nous montrer comment ils peuvent être utilisés pour résoudre de nombreux problèmes de comptage différents.

La règle de produit s'applique lorsqu'une procédure est composée de tâches distinctes.

LA RÈGLE DU PRODUIT Supposons qu'une procédure puisse être décomposée en une séquence de deux tâches. S'il y a n_1 façons de faire la première tâche et pour chacune de ces façons de faire la première tâche, il y a n_2 façons de faire la deuxième tâche, puis il y a $n_1 n_2$ façons de faire la procédure.

Les exemples 1 à 10 montrent comment la règle de produit est utilisée.

EXEMPLE 1 Une nouvelle entreprise avec seulement deux employés, Sanchez et Patel, loue un étage d'un immeuble 12 bureaux. De combien de façons existe-t-il d'affecter différents bureaux à ces deux employés?

Solution: La procédure d'attribution de bureaux à ces deux salariés consiste à attribuer un bureau à Sanchez, ce qui peut être fait de 12 façons, puis attribuer un bureau à Patel différent de le bureau attribué à Sanchez, ce qui peut se faire de 11 façons. Selon la règle du produit, il existe $12 \cdot 11 = 132$ façons d'affecter des bureaux à ces deux employés. ▲

EXEMPLE 2 Les chaises d'un auditorium doivent être étiquetées avec une lettre anglaise majuscule suivie d'un entier positif ne dépassant pas 100. Quel est le plus grand nombre de chaises pouvant être étiquetées différemment?

Solution: la procédure d'étiquetage d'une chaise se compose de deux tâches, à savoir l'attribution au siège l'une des 26 lettres anglaises majuscules, puis en lui affectant l'un des 100 entiers possibles. La règle du produit montre qu'il existe $26 \cdot 100 = 2600$ manières différentes d'étiqueter une chaise. Par conséquent, le plus grand nombre de chaises pouvant être étiquetées différemment est 2600. ▲

EXEMPLE 3 Il y a 32 micro-ordinateurs dans un centre informatique. Chaque micro-ordinateur possède 24 ports. Comment y a-t-il de nombreux ports différents vers un micro-ordinateur au centre?

Solution: la procédure de choix d'un port consiste en deux tâches, en premier lieu le choix d'un micro-ordinateur puis choisir un port sur ce micro-ordinateur. Parce qu'il y a 32 façons de choisir le micro-ordinateur et 24 façons de choisir le port, quel que soit le micro-ordinateur sélectionné, la règle du produit montre qu'il y a $32 \cdot 24 = 768$ ports. ▲

Une version étendue de la règle du produit est souvent utile. Supposons qu'une procédure soit exécutée en effectuant les tâches $T_1, T_2, \ldots, T_m$ en séquence. Si chaque tâche T_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, peut être effectué de n_i façons, quelle que soit la façon dont les tâches précédentes ont été effectuées, il existe alors $n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_m$ façons de mener à bien la procédure. Cette version de la règle du produit peut être prouvée par des induction de la règle du produit pour deux tâches (voir exercice 72).

EXEMPLE 4 Combien y a-t-il de chaînes de bits différentes de longueur sept?

Solution: Chacun des sept bits peut être choisi de deux manières, car chaque bit est soit 0 soit 1. Par conséquent, la règle de produit indique qu'il existe un total de $2^7 = 128$ chaînes de bits différentes de longueur Sept. ▲

EXEMPLE 5 Combien de plaques d'immatriculation différentes peuvent être faites si chaque plaque contient une séquence de trois lettres anglaises majuscules suivies de trois chiffres (et aucune séquence de lettres n'est interdite, même s'ils sont obscènes)?

Solution: il y a 26 choix pour chacune des trois lettres anglaises majuscules et dix choix pour chacun des trois chiffres. Par conséquent, selon la règle du produit, il y a un total de $\underbrace{26 \cdot 26 \cdot 26}_{\text{26 choix pour chaque lettre}} \cdot \underbrace{10 \cdot 10 \cdot 10}_{\text{10 choix pour chaque chiffre}} =$ $17,576,000$ plaques d'immatriculation possibles. ▲

EXEMPLE 6 **Fonctions de comptage** Combien de fonctions y a-t-il d'un ensemble avec m éléments à un ensemble avec n éléments?

Solution: Une fonction correspond à un choix d'un des n éléments du codomaine pour chacun des les m éléments du domaine. Par conséquent, selon la règle du produit, il y a $n \cdot n \cdot \cdots \cdot n = n^m$ les fonctions d'un ensemble avec m éléments à un avec n éléments. Par exemple, il y a $5^3 = 125$ différents fonctions d'un ensemble à trois éléments à un ensemble à cinq éléments. ▲

EXEMPLE 7 **Comptage des fonctions un-à-un** Combien de **fonctions** un-à-un existe-t-il dans un ensemble avec *m* éléments à un avec *n* éléments?

Solution: notez d'abord que lorsque $m > n$ il n'y a pas de fonctions biunivoque d'un ensemble avec m éléments à un ensemble avec n éléments.

Compter le nombre de sur les fonctions est plus difficile. Nous le ferons au chapitre 8.

Soit maintenant $m \leq n$. Supposons que les éléments du domaine soient un_1 , un_2 , ..., un_m . Il y a n façons pour choisir la valeur de la fonction à un_1 . Étant donné que la fonction est un à un, la valeur de la la fonction à un_2 peut être choisie de *n à* 1 façons (car la valeur utilisée pour un_1 ne peut pas être réutilisée). En général, la valeur de la fonction à a_k peut être choisie de $n - k + 1$ manières. Par la règle du produit, il y a $n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$ fonctions biunivoque d'un ensemble avec m éléments à un avec n éléments.

Par exemple, il y a $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ fonctions biunivoque d'un ensemble de trois éléments à un ensemble à cinq éléments. ▲

Exemple 8 Le plan de numérotation téléphonique Le *plan de numérotation nord - américain (PNNA)* précise la format des numéros de téléphone aux États-Unis, au Canada et dans de nombreuses autres parties de l'Amérique du Nord.UNE numéro de téléphone dans ce plan se compose de 10 chiffres, qui sont divisés en un indicatif régional à trois chiffres, un code de bureau à trois chiffres et un code de station à quatre chiffres.Pour des raisons de signalisation, il sont certaines restrictions sur certains de ces chiffres. Pour spécifier le format autorisé, laissez - *X* représentent chacun un chiffre qui peut prendre l'une des valeurs 0 à 9, soit *N* désigne un chiffre qui peut prendre l'une des valeurs suivantes: les valeurs 2 à 9, et que *Y* désigne un chiffre qui doit être un 0 ou un 1. Deux plans de numérotation, qui sera appelé l'ancien plan et le nouveau plan seront discutés.(L'ancien plan, utilisé dans dans les années 60, a été remplacé par le nouveau plan, mais la récente croissance rapide de la demande de les numéros des téléphones portables et des appareils rendront à terme ce nouveau plan obsolète.Dans cet exemple, les lettres utilisées pour représenter les chiffres suivent les conventions de l'*Amérique* du *Nord Plan de numérotation* .) Comme nous le verrons, le nouveau plan permet d'utiliser plus de numéros.

Les projections actuelles sont qu'en 2038, il sera nécessaire d'ajouter un ou plus de chiffres vers le nord Téléphone américain Nombres.

Dans l'ancien plan, les formats de l'indicatif régional, de l'indicatif de bureau et du code de station sont *NYX* , *NNX* et *XXXX* , respectivement, de sorte que les numéros de téléphone aient la forme *NYX* - *NNX* - *XXXX* . Dans le nouveau plan, les formats de ces codes sont respectivement *NXX* , *NXX* et *XXXX* , de sorte que les numéros de téléphone ont la forme *NXX* - *NXX* - *XXXX* . Combien de numéros de téléphone nord-américains différents possible sous l'ancien plan et sous le nouveau plan?

Solution: selon la règle du produit, il existe $8 \cdot 2 \cdot 10 = 160$ indicatifs régionaux au format *NYX* et $8 \cdot 10 \cdot 10 = 800$ indicatifs régionaux au format *NXX* . De même, selon la règle du produit, il existe $8 \cdot 8 \cdot 10 = 640$ codes de bureau au format *NNX* . La règle du produit montre également qu'il existe $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10{,}000$ codes de la station au format *XXXX* .

Notez que nous avons ignoré restrictions qui excluent Codes de station N11 pour la plupart des indicatifs régionaux.

Par conséquent, en appliquant à nouveau la règle du produit, il s'ensuit que l'ancien plan prévoit

$$160 \cdot 640 \cdot 10{,}000 = 1{,}024{,}000{,}000$$

différents numéros disponibles en Amérique du Nord. Dans le cadre du nouveau plan, il existe

$$800 \cdot 800 \cdot 10{,}000 = 6{,}400{,}000{,}000$$

différents numéros disponibles. ▲

EXEMPLE 9 Quelle est la valeur de k après le code suivant, où $n_1, n_2, ..., n_m$ sont des entiers positifs, a été exécuté?

$k := 0$
pour $i_1 := 1$ **à** n_1
  pour $i_2 := 1$ **à** n_2
    .
    .
    .
    pour $i_m := 1$ **à** n_m
      $k := k + 1$

Solution: la valeur initiale de k est zéro. Chaque fois que la boucle imbriquée est parcourue, 1 est ajouté à k. Soit T_i la tâche de parcourir la i ème boucle. Ensuite, le nombre de fois que la boucle est parcourue est le nombre de façons d'effectuer les tâches $T_1, T_2, ..., T_m$. Le nombre de façons de réaliser la tâche T_j, $j = 1, 2, ..., m$, est n_j, car la j ème boucle est parcourue une fois pour chaque entier i_j avec $1 \leq i_j \leq n_j$. Par la règle du produit, il s'ensuit que la boucle imbriquée est parcourue $n_1 n_2 \cdots n_m$ fois. Par conséquent, la valeur finale de k est $n_1 n_2 \cdots n_m$. ▲

EXEMPLE 10 **Comptage de sous-ensembles d'un ensemble fini** Utilisez la règle de produit pour montrer que le nombre de différents sous-ensembles d'un ensemble fini S est $2^{|S|}$

Solution: Soit S un ensemble fini. Liste les éléments de S dans un ordre arbitraire. Rappel de Section 2.2 qu'il existe une correspondance biunivoque entre les sous-ensembles de S et les chaînes de bits de longueur $|S|$. A savoir, un sous-ensemble de S est associé à la chaîne de bits avec un 1 en i ème position si le i ème élément de la liste est dans le sous-ensemble, et un 0 dans cette position sinon. Par la règle du produit, il ya deux $^{|S|}$ chaînes de bits de longueur $|S|$. Par conséquent, $|P(S)| = 2^{|S|}$. (Rappelons que nous avons utilisé des mathématiques induction pour prouver ce fait dans l'exemple 10 de la section 5.1.) ▲

La règle du produit est souvent formulée en termes d'ensembles de cette façon: si $A_1, A_2, ..., A_m$ sont finis ensembles, le nombre d'éléments dans le produit cartésien de ces ensembles est le produit de la nombre d'éléments dans chaque ensemble. Pour relier cela à la règle du produit, notez que la tâche de choisir un élément dans le produit cartésien $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m$ se fait en choisissant un élément dans A_1, un élément dans A_2, ..., et un élément dans A_m. Par la règle du produit, il s'ensuit que

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \cdots \cdot |A_m|.$$

EXEMPLE 11 **ADN et génomes** Les informations héréditaires d'un organisme vivant sont codées en utilisant l'acide oxyribonucléique (ADN) ou, dans certains virus, l'acide ribonucléique (ARN). L'ADN et l'ARN sont molécules extrêmement complexes, avec différentes molécules interagissant dans une grande variété de façons de

permettre le processus vivant. Pour nos besoins, nous ne donnons que la description la plus brève de la façon dont l'ADN et L'ARN code les informations génétiques.

Les molécules d'ADN sont constituées de deux brins constitués de blocs appelés nucléotides. Chaque le nucléotide contient des sous-composants appelés **bases**, dont chacun est l'adénine (A), la cytosine (C), guanine (G) ou thymine (T). Les deux brins d'ADN sont maintenus ensemble par des liaisons hydrogène reliant différentes bases, avec une liaison A uniquement avec T et une liaison C uniquement avec G. L'ADN, l'ARN est simple brin, l'uracile (U) remplaçant la thymine comme base. Donc, dans l'ADN, le les paires de bases possibles sont AT et CG, tandis que dans l'ARN, elles sont AU et CG. L'ADN d'un vivant créature se compose de plusieurs morceaux d'ADN formant des chromosomes séparés. Un **gène** est un segment d'une molécule d'ADN qui code pour une protéine particulière. L'ensemble des informations génétiques d'un l'organisme est appelé son **génome** .

Les séquences de bases dans l'ADN et l'ARN codent pour de longues chaînes de protéines appelées acides aminés. Il existe 22 acides aminés essentiels pour l'homme. Nous pouvons rapidement voir qu'une séquence d'au au moins trois bases sont nécessaires pour coder ces 22 acides aminés différents. Première note, parce que il y a quatre possibilités pour chaque base dans l'ADN, A, C, G et T, selon la règle du produit, il y a $4^2 = 16 < 22$ séquences différentes de deux bases. Cependant, il existe $4^3 = 64$ séquences différentes de trois bases, qui fournissent suffisamment de séquences différentes pour coder les 22 acides aminés différents (même en tenant compte du fait que plusieurs séquences différentes de trois bases codent pour la même acide aminé).

L'ADN de simples créatures vivantes telles que les algues et les bactéries a entre 10^5 et 10^7 liens, où chaque lien est l'une des quatre bases possibles. Des organismes plus complexes, tels que les sectes, les oiseaux et les mammifères ont entre 10^8 et 10^{10} liens dans leur ADN. Donc, par le produit règle, il y a au moins 4^{10^5} différentes séquences de bases dans l'ADN d'organismes simples et au au moins 4^{10^8} différentes séquences de bases dans l'ADN d'organismes plus complexes. Ce sont à la fois des chiffres incroyablement énormes, ce qui explique pourquoi il existe une si grande variabilité entre les les organismes vivants. Au cours des dernières décennies, des techniques ont été développées pour déterminer le génome de différents organismes. La première étape consiste à localiser chaque gène dans l'ADN d'un organisme. La tâche suivante, appelée **séquençage des gènes** , est la détermination de la séquence de liens sur chaque gène. (Bien sûr, la séquence spécifique de plis sur ces gènes dépend de la partici- particulier représentatif d'une espèce dont l'ADN est analysé.) Par exemple, l'être humain le génome comprend environ 23 000 gènes, chacun avec 1 000 liens ou plus. Séquençage génétique les techniques tirent parti de nombreux algorithmes récemment développés et reposent sur de de nouvelles idées en combinatoire. De nombreux mathématiciens et informaticiens travaillent sur des problèmes impliquant des génomes, participant aux domaines en évolution rapide de la bioinformatique et du calcul la biologie. ▲

Bientôt ce ne sera plus ça coûteux d'avoir votre propre code génétique trouvé.

Nous introduisons maintenant la règle de somme.

LA RÈGLE DE SOMME Si une tâche peut être effectuée de l'une des n_1 façons ou de l'une des n_2 façons, où aucun de l'ensemble des n_1 voies n'est le même que n'importe lequel de l'ensemble des n_2 voies, alors il y a $n_1 + n_2$ façons d'accomplir la tâche.

L'exemple 12 illustre comment la règle de somme est utilisée.

EXEMPLE 12 Supposons qu'un membre de la faculté de mathématiques ou un étudiant qui est majeur en mathématiques est choisi comme représentant dans un comité universitaire. Combien de choix différents y a-t-il pour ce représentant s'il y a 37 membres de la faculté de mathématiques et 83 mathématiques majors et personne n'est à la fois membre du corps professoral et étudiant?

Solution: il y a 37 façons de choisir un membre de la faculté de mathématiques et 83 façons de choisir un élève qui est majeur en mathématiques. Choisir un membre des mathématiques la faculté n'est jamais la même chose que de choisir un étudiant qui est majeur en mathématiques parce que personne n'est à la fois un membre du corps professoral et un étudiant.Par la règle de somme, il s'ensuit qu'il y a 37 + 83 = 120 façons possibles de choisir ce représentant. ▲

Nous pouvons étendre la règle de somme à plus de deux tâches.Supposons qu'une tâche puisse être effectuée en un seul de n_1 voies, dans l'une des n_2 voies, ... , ou dans l'une des n_m façons, où aucun des n_i chemins de l'exécution de la tâche est la même que n'importe laquelle des n_j voies, pour toutes les paires i et j avec $1 \leq i < j \leq m$. Ensuite, le nombre de façons d'effectuer la tâche est $n_1 + n_2 + \cdots + n_m$. Cette version étendue du la règle de somme est souvent utile pour compter les problèmes, comme le montrent les exemples 13 et 14Cette version du la règle de somme peut être prouvée en utilisant l'induction mathématique de la règle de somme pour deux ensembles(C'est Exercice 71.)

EXEMPLE 13 Un étudiant peut choisir un projet informatique dans l'une des trois listes.Les trois listes contiennent 23, 15, et 19 projets possibles, respectivement. Aucun projet ne figure sur plusieurs listes. Combien possible quels projets pouvez-vous choisir?

Solution: l'étudiant peut choisir un projet en sélectionnant un projet dans la première liste, la seconde ou la troisième liste. Puisqu'aucun projet n'est sur plus d'une liste, selon la règle de somme il y a 23 + 15 + 19 = 57 façons de choisir un projet. ▲

EXEMPLE 14 Quelle est la valeur de k après le code suivant, où $n_1, n_2, \ldots, n_m$ sont des entiers positifs, a été exécuté?

$k := 0$

pour $i_1 := 1$ **à** n_1
  $k := k + 1$

pour $i_2 := 1$ **à** n_2
  $k := k + 1$

.
.
.

pour $i_m := 1$ **à** n_m
  $k := k + 1$

Solution: la valeur initiale de k est zéro. Ce bloc de code est composé de m boucles différentes. Chaque fois qu'une boucle est parcourue, 1 est ajouté à k. Pour déterminer la valeur de k après que ce code a été exécuté, nous devons déterminer combien de fois nous traversons une boucle.Notez qu'il existe n_i façons de parcourir la i ème boucle. Parce que nous traversons une seule boucle à la fois, la règle de somme montre que la valeur finale de k, qui est le nombre de façons de parcourir l'une des m boucles est $n_1 + n_2 + \cdots + n_m$. ▲

La règle de somme peut être formulée en termes d'ensembles: Si $A_1, A_2, \ldots, A_m$ sont disjoints deux à deux ensembles finis, alors le nombre d'éléments dans l'union de ces ensembles est la somme des nombres de éléments dans les ensembles. Pour relier cela à notre énoncé de la règle de somme, notez qu'il existe $|A_i|$ façons de choisir un élément de A_i pour $i = 1, 2, \ldots, m$. Parce que les ensembles sont disjoints par paire, lorsque nous sélectionnons un élément dans l'un des ensembles A_i, nous ne sélectionnons pas également un élément dans un autre définir A_j. Par conséquent, selon la règle de somme, parce que nous ne pouvons pas sélectionner un élément parmi deux de ces ensembles en même temps, le nombre de façons de choisir un élément dans l'un des ensembles, qui est le nombre d'éléments dans l'union, est

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_m| \text{ lorsque } A_i \cap A_j = \text{ pour tout } i, j.$$

Cette égalité ne s'applique que lorsque les ensembles en question sont disjoints deux à deux.La situation est bien plus compliqué lorsque ces ensembles ont des éléments en commun. Cette situation sera brièvement discuté plus loin dans cette section et discuté plus en détail au chapitre 8.

Problèmes de comptage plus complexes

De nombreux problèmes de comptage ne peuvent pas être résolus en utilisant uniquement la règle de somme ou uniquement la règle de produit. Cependant, de nombreux problèmes de comptage compliqués peuvent être résolus en utilisant ces deux règles dans combinaison. On commence par compter le nombre de noms de variables dans le langage de programmation DE BASE. (Dans les exercices, nous considérons le nombre de noms de variables dans JAVA.) Ensuite, nous allons compter le nombre de mots de passe valides soumis à un ensemble particulier de restrictions.

EXEMPLE 15 Dans une version du langage informatique BASIC, le nom d'une variable est une chaîne d'un ou deux caractères alphanumériques, où les majuscules et les minuscules ne sont pas distinguées.(Un *Le* caractère *alphanumérique* est soit l'une des 26 lettres anglaises, soit l'un des 10 chiffres.) De plus, un nom de variable doit commencer par une lettre et doit être différent des cinq chaînes de deux caractères réservés à la programmation. Combien de noms de variables différents existe-t-il dans cette version de BASIC?

Solution: Soit V égal au nombre de noms de variables différents dans cette version de BASIC.Soit V_1 être le nombre de ceux qui sont d'un caractère et V_2 le nombre de ceux qui sont deux Longs caractères. Ensuite, selon la règle de somme, $V = V_1 + V_2$. Notez que $V_1 = 26$, car un caractère le nom de la variable doit être une lettre.De plus, selon la règle du produit, il y a $26 \cdot 36$ chaînes de longueur deux commençant par une lettre et se terminant par un caractère alphanumérique. Cependant, cinq de ces sont exclus, donc $V_2 = 26 \cdot 36 - 5 = 931$. Par conséquent, il y a $V = V_1 + V_2 = 26 + 931 = 957$ noms différents pour les variables dans cette version de BASIC. ▲

EXEMPLE 16 Chaque utilisateur d'un système informatique a un mot de passe de six à huit caractères, où chaque caractère est une lettre majuscule ou un chiffre. Chaque mot de passe doit contenir au moins un chiffre. Combien de mots de passe possibles existe-t-il?

Solution: Soit P le nombre total de mots de passe possibles et P_6 , P_7 et P_8 désignent le nombre de mots de passe possibles de longueur 6, 7 et 8, respectivement.Par la règle de somme, $P = P_6 + P_7 + P_8$. Nous allons maintenant trouver P_6 , P_7 et P_8 . Trouver P_6 directement est difficile. Pour trouver P_6 c'est trouver plus facilement le nombre de chaînes de lettres majuscules et de chiffres de six caractères, y compris celles sans chiffres, et soustrayez-en le nombre de chaînes sans chiffres.Par la règle du produit, le nombre de chaînes de six caractères est 36^6 et le nombre de chaînes avec aucun chiffre n'est 26^6 . Par conséquent,

$$P_6 = 36^6 - 26^6 = 2,176,782,336 - 308,915,776 = 1,867,866,560.$$

De même, nous avons

$$P_7 = 36^7 - 26^7 = 78,364,164,096 - 8,031,810,176 = 70,332,353,920$$

et

$$P_8 = 36^8 - 26^8 = 2,821,109,907,456 - 208,827,064,576$$
$$= 2,612,282,842,880.$$

Par conséquent,

$$P = P_6 + P_7 + P_8 = 2,684,483,063,360.$$

▲

EXEMPLE 17 **Comptage des adresses Internet** Dans Internet, qui est constitué de ressources physiques interconnectées réseaux d'ordinateurs, chaque ordinateur (ou plus précisément, chaque connexion réseau d'un ordinateur) se voit attribuer une *adresse Internet* . Dans la version 4 du protocole Internet (IPv4), désormais utilisé,

Numéro de bit	0	1	2	3	4	8	16	24	31
Classe A	0			netid				hostid	
Classe B	1	0			netid			hostid	
Classe C	1	1	0			netid		hostid	
Classe D	1	1	1	0			Adresse de multidiffusion		
Classe E	1	1	1	1	0		Adresse		

FIGURE 1 **Adresses Internet (IPv4).**

une adresse est une chaîne de 32 bits. Il commence par un *numéro de réseau* (*netid*). Le netid est suivi par un *numéro d'hôte* (*hostid*), qui identifie un ordinateur comme membre d'un réseau particulier.

Trois formes d'adresses sont utilisées, avec différents nombres de bits utilisés pour les netids et les hostids. **Les adresses de classe A** , utilisées pour les plus grands réseaux, sont composées de 0, suivi d'un netid 7 bits et d'un Hostid 24 bits. **Les adresses de classe B** , utilisées pour les réseaux de taille moyenne, se composent de 10, suivies de un netid 14 bits et un hostid 16 bits. **Les adresses de classe C** , utilisées pour les plus petits réseaux, se composent de 110, suivi d'un netid 21 bits et d'un hostid 8 bits. Il existe plusieurs restrictions sur les adresses en raison d'utilisations spéciales: 1111111 n'est pas disponible en tant que netid d'un réseau de classe A et les hostids composés de tous les 0 et de tous les 1 ne sont pas disponibles pour une utilisation dans aucun réseau. Un ordinateur sur Internet possède une adresse de classe A, de classe B ou de classe C. (Outre les classes A, B, et C, il existe également des adresses de classe D, réservées à une utilisation en multidiffusion plusieurs ordinateurs sont adressés en une seule fois, composé de 1110 suivis de 28 bits, et Adresses de classe E, réservées à un usage futur, composées de 11110 suivies de 27 bits. Ni Les adresses de classe D ou de classe E sont attribuées en tant qu'adresse IPv4 d'un ordinateur sur Internet.) La figure 1 illustre l'adressage IPv4. (Limitations du nombre de netids de classe A et de classe B ont rendu l'adressage IPv4 inadéquat; IPv6, une nouvelle version d'IP, utilise des adresses 128 bits pour résoudre ce problème.)

Le manque de disponibilité L'adresse IPv4 a devenir une crise!

Combien d'adresses IPv4 différentes sont disponibles pour les ordinateurs sur Internet?

Solution: Soit x le nombre d'adresses disponibles pour les ordinateurs sur Internet, et soit x_A , x_B et x_C indiquent respectivement le nombre d'adresses de classe A, de classe B et de classe C disponibles.

Par la règle de somme, $x = x_A + x_B + x_C$.

Pour trouver x_A , notez qu'il y a $2^7 - 1 = 127$ netids de classe A, rappelant que le netid 1111111 n'est pas disponible. Pour chaque netid, il y a $2^{24} - 2 = 16,777,214$ hostides, rappelant que le les hostides composés de tous les 0 et de tous les 1 ne sont pas disponibles. Par conséquent, $x_A = 127 \cdot 16,777,214 = 2,130,706,178$.

Pour trouver x_B et x_C , notez qu'il y a $2^{14} = 16,384$ netidés de classe B et $2^{21} = 2,097,152$ Netids de classe C. Pour chaque netid de classe B, il y a $2^{16} - 2 = 65,534$ hostides, et pour chaque Netid de classe C, il y a $2^8 - 2 = 254$ hostids, rappelant que dans chaque réseau les hostids composé de tous les 0 et tous les 1 ne sont pas disponibles. Par conséquent, $x_B = 1,073,709,056$ et $x_C = 532,676,608$.

Nous concluons que le nombre total d'adresses IPv4 disponibles est $x = x_A + x_B + x_C = 2,130,706,178 + 1,073,709,056 + 532,676,608 = 3,737,091,842$. ▲

La règle de soustraction (inclusion-exclusion pour deux ensembles)

Supposons qu'une tâche peut être effectuée de deux manières, mais que certaines des façons de le faire sont courantes dans les deux sens. Dans cette situation, nous ne pouvons pas utiliser la règle de somme pour compter le nombre de façons de faire la tâche. Si nous ajoutons le nombre de façons de faire les tâches de ces deux façons, nous obtenons un décompte du nombre total de façons de le faire, parce que les façons de faire la tâche qui sont communes aux deux les voies sont comptées deux fois. Pour compter correctement le nombre de façons d'effectuer les deux tâches, nous devons soustrayez le nombre de façons qui sont comptées deux fois. Cela nous amène à une règle de comptage importante.

Le comptage excessif est peut-être le plus courant erreur d'énumération.

LA RÈGLE DE SOUSTRACTION Si une tâche peut être effectuée de n_1 façons ou n_2 façons, alors la nombre de façons de faire la tâche est $n_1 + n_2$ moins le nombre de façons de faire la tâche qui sont commun aux deux façons différentes.

La règle de soustraction est également connue sous le nom de **principe d'inclusion-exclusion** , en particulier lorsque il est utilisé pour compter le nombre d'éléments dans l'union de deux ensembles. Supposons que A_1 et A_2 soient ensembles. Ensuite, il y a $|A_1|$ façons de sélectionner un élément parmi A_1 et $|A_2|$ façons de sélectionner un élément de A_2. Le nombre de façons de sélectionner un élément de A_1 ou de A_2, c'est-à-dire le nombre de façons de sélectionner un élément de leur union, est la somme du nombre de façons de sélectionner un élément de A_1 et le nombre de façons de sélectionner un élément de A_2, moins le nombre de façons de sélectionnez un élément qui est à la fois dans A_1 et A_2. Parce qu'il y a $|A_1 \cup A_2|$ façons de sélectionner un élément soit en A_1, soit en A_2, et $|A_1 \cap A_2|$ façons de sélectionner un élément commun aux deux ensembles, nous avons

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

Il s'agit de la formule donnée à la section 2.2 pour le nombre d'éléments dans l'union de deux ensembles.

L'exemple 18 illustre comment résoudre des problèmes de comptage en utilisant le principe de soustraction.

EXEMPLE 18 Combien de chaînes de bits de longueur huit commencent par un bit ou se terminent par les deux bits 00?

Solution: nous pouvons construire une chaîne de bits de longueur huit qui commence par un bit ou se termine avec les deux bits 00, en construisant une chaîne de bits de longueur huit commençant par 1 bit ou en la construction d'une chaîne de bits de longueur huit qui se termine par les deux bits 00. Nous pouvons construire un bit chaîne de longueur huit qui commence par un 1 sur $2^7 = 128$ voies. Cela suit la règle du produit, parce que le premier bit ne peut être choisi que dans un sens et chacun des sept autres bits peut être choisi de deux façons. De même, nous pouvons construire une chaîne de bits de longueur huit se terminant par les deux bits 00, en $2^6 = 64$ voies. Cela suit la règle du produit, car chacun des six premiers bits peut être choisi de deux manières et les deux derniers bits ne peuvent être choisis que d'une seule manière.

Certaines des façons de construire une chaîne de bits de longueur huit commençant par un 1 sont les mêmes comme les moyens de construire une chaîne de bits de longueur huit qui se termine par les deux bits 00. Il y a $2^5 = 32$ façons de construire une telle chaîne. Cela suit la règle du produit, car le premier le bit ne peut être choisi que d'une seule manière, chacun des deuxième à sixième bits peut être choisi de deux manières, et les deux derniers bits peuvent être choisis d'une manière. Par conséquent, le nombre de chaînes de bits de longueur huit qui commencent par un 1 ou se terminent par un 00, ce qui équivaut au nombre de façons de construire une chaîne de bits de longueur huit qui commence par un 1 ou qui se termine par 00, est égal à 128 + 64 - 32 = 160. ▲

1

$2^7 = 128$ voies

0 0

$2^6 = 64$ voies

1 0 0

$2^5 = 32$ voies

Nous présentons un exemple qui illustre comment la formulation du principe d'inclusion - l'exclusion peut être utilisée pour résoudre des problèmes de comptage.

EXEMPLE 19 Une entreprise informatique reçoit 350 candidatures de diplômés en informatique pour un emploi ligne de nouveaux serveurs Web. Supposons que 220 de ces candidats se spécialisent en informatique, 147 avec une spécialisation en affaires et 51 avec une spécialisation en informatique et en affaires. Combien de ces candidats ne se sont spécialisés ni en informatique ni en affaires?

Solution: trouver le nombre de ces candidats qui ne se sont spécialisés ni en informatique ni en en affaires, on peut soustraire le nombre d'étudiants qui se sont spécialisés soit en informatique ou en affaires (ou les deux) du nombre total de candidats. Soit A_1 l'ensemble des étudiants qui spécialisé en informatique et A_2 l'ensemble des étudiants qui se sont spécialisés en affaires. Alors $A_1 \cup A_2$ est l'ensemble des étudiants qui se sont spécialisés en informatique ou en affaires (ou les deux), et $A_1 \cap A_2$ est le ensemble d'étudiants qui se sont spécialisés à la fois en informatique et en affaires.Par la règle de soustraction le nombre d'étudiants diplômés en informatique ou en affaires (ou les deux) est égal à

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| = 220 + 147 - 51 = 316.$$

Nous concluons que 350 - 316 = 34 des candidats ne se sont qualifiés ni en informatique ni en affaires. ▲

La règle de soustraction, ou le principe d'inclusion-exclusion, peut être généralisé pour trouver le nombre de façons d'effectuer l'une des n tâches différentes ou, de manière équivalente, de trouver le nombre d'éléments dans l'union de n ensembles, chaque fois que n est un entier positif. Nous étudierons l'inclusion-exclusion et certaines de ses nombreuses applications au chapitre 8.

La règle de division

Nous avons introduit les règles de produit, de somme et de soustraction pour le comptage.Vous vous demandez peut-être s'il existe également une règle de division pour le comptage.En fait, il existe une telle règle, qui peut être utile pour résoudre certains types de problèmes d'énumération.

LA RÈGLE DE LA DIVISION Il existe n / d façons de faire une tâche si elle peut être effectuée en utilisant une procédure qui peut être effectuée de n façons, et pour chaque façon w, exactement d des n voies correspondent au chemin w.

Nous pouvons reformuler la règle de division en termes d'ensembles: « Si l'ensemble fini A est l'union de n pairwise sous-ensembles disjoints contenant chacun d éléments, alors $n = |A| / d$. "

On peut également formuler la règle de division en termes de fonctions: «Si f est une fonction de A à B où A et B sont des ensembles finis, et que pour chaque valeur $y \in B$ il y a exactement d valeurs $x \in A$ tel que $f(x) = y$ (auquel cas, on dit que f est d -to-one), alors $|B| = |A| / d$. "

Nous illustrons l'utilisation de la règle de division pour compter avec un exemple.

EXEMPLE 20 Combien de manières différentes existe-t-il pour asseoir quatre personnes autour d'une table circulaire, où deux les sièges sont considérés comme les mêmes lorsque chaque personne a le même voisin de gauche et le même bon voisin?

Solution: nous sélectionnons arbitrairement un siège à la table et l'étiquetons siège 1. Nous numérotons le reste du sièges dans l'ordre numérique, en procédant dans le sens horaire autour de la table.Notez qu'il existe quatre façons de sélectionner la personne pour le siège 1, trois façons de sélectionner la personne pour le siège 2, deux façons de sélectionner le personne pour le siège 3, et une façon de sélectionner la personne pour le siège 4. Ainsi, il y a 4!= 24 façons de commander les quatre personnes données pour ces sièges.Cependant, chacun des quatre choix pour le siège 1 mène au même arrangement, car nous distinguons deux arrangements seulement lorsque l'une des personnes a un autre voisin immédiat de gauche ou de droite immédiat.Parce qu'il y a quatre façons de choisir la personne du siège 1, par la règle de division ,il y a 24 / 4 = 6 différents arrangements de sièges de quatre personnes autour de la table circulaire. ▲

Diagrammes d'arbre

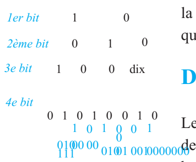


FIGURE 2 **Bit Chaînes de longueur Quatre sans 1s consécutifs.**

Les problèmes de comptage peuvent être résolus à l'aide de **diagrammes arborescents** . Un arbre se compose d'une racine, d'un nombre de branches quittant la racine et d'éventuelles branches supplémentaires quittant les extrémités d'autres branches. (Nous étudierons les arbres en détail au chapitre 11.) Pour utiliser les arbres dans le comptage, nous utilisons une branche pour représenter chaque choix possible. Nous représentons les résultats possibles par les feuilles, qui sont les extrémités des branches n'ayant pas d'autres branches commençant par elles.

Notez que lorsqu'un arbre est utilisé pour résoudre un problème de comptage, le nombre de choix dont la branche à suivre pour atteindre une feuille peut varier (voir l'exemple 21, par exemple).

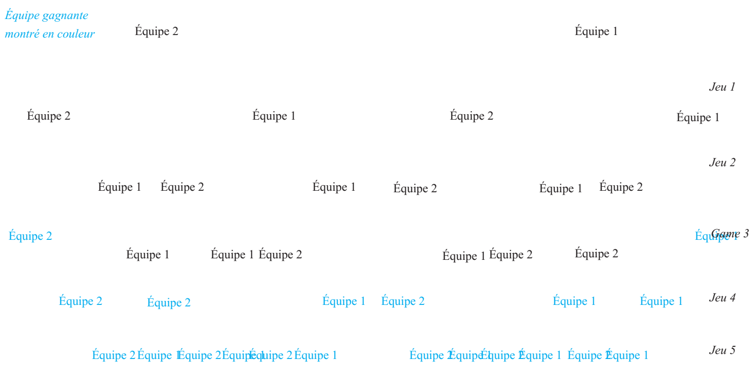


FIGURE 3 **Trois meilleurs matchs sur cinq éliminatoires.**

EXEMPLE 21 Combien de chaînes de bits de longueur quatre n'ont pas deux 1 consécutifs?

Solution: L'arborescence de la figure 2 affiche toutes les chaînes de bits de longueur quatre sans deux secutive 1s. Nous voyons qu'il y a huit chaînes de bits de longueur quatre sans deux 1 consécutifs. ▲

EXEMPLE 22 Une partie éliminatoire entre deux équipes comprend au plus cinq matchs. La première équipe qui remporte trois matchs remporte les éliminatoires. De combien de manières différentes les éliminatoires peuvent-elles se produire?

Solution: L'arborescence de la figure 3 affiche toutes les façons dont les séries éliminatoires peuvent se dérouler, gagnant de chaque match présenté. Nous voyons qu'il y a 20 façons différentes pour les séries éliminatoires de se produire. ▲

EXEMPLE 23 Supposons que les T-shirts «I Love New Jersey» existent en cinq tailles différentes: S, M, L, XL et XXL. Supposons en outre que chaque taille soit disponible en quatre couleurs, blanc, rouge, vert et noir, sauf pour XL, qui vient seulement en rouge, vert et noir, et XXL, qui vient seulement en vert et noir. Comment de nombreuses chemises différentes, une boutique de souvenirs doit-elle en avoir pour en avoir au moins une taille et couleur du T-shirt?

Solution: L'arborescence de la figure 4 affiche toutes les tailles et paires de couleurs possibles. Il s'ensuit que le propriétaire de la boutique de souvenirs doit stocker 17 T-shirts différents. ▲

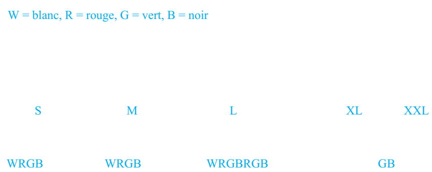


FIGURE 4 **Compter les variétés de T-shirts.**

Des exercices

1. Il existe 18 majeures en mathématiques et 325 scien-
majeures dans un collège.
a) De combien de façons peut-on choisir deux représentants de sorte que l'un est une majeure en mathématiques et l'autre est un majeure en informatique?
b) De combien de façons un représentant peut-il être choisi qui est soit une majeure en mathématiques ou une science informatique majeure?

2. Un immeuble de bureaux de 27 étages et 37 bureaux à chaque étage. Combien de bureaux y a-t-il dans le bâtiment?

3. Un test à choix multiple contient 10 questions. Il y a quatre réponses possibles pour chaque question.
a) De combien de façons un élève peut-il répondre aux questions au test si l'étudiant répond à toutes les questions?
b) De combien de façons un élève peut-il répondre aux questions sur le test si l'élève peut laisser des réponses vides?

4. Une marque particulière de chemise est disponible en 12 couleurs, a un homme version et une version féminine, et est disponible en trois tailles pour chaque sexe. Combien de types différents de cette chemise sont fait?

5. Six compagnies aériennes différentes volent de New York à Denver et sept volent de Denver à San Francisco. Combien de différentes paires de compagnies aériennes peuvent vous choisir un voyage de New York à San Francisco via Denver, quand vous choisissez une compagnie aérienne pour le vol vers Denver et une compagnie aérienne pour le vol de suite à San Francisco?

6. Il existe quatre itinéraires automobiles majeurs de Boston à Détroit et six de Détroit à Los Angeles. Combien de grands les routes automatiques sont là de Boston à Los Angeles via Detroit?

7. Combien d'initiales de trois lettres différentes les gens peuvent-ils avoir?

8. Combien d'initiales de trois lettres différentes sans aucun des les lettres peuvent-elles être répétées?

9. Combien d'initiales de trois lettres différentes existe-t-il gin avec un *A* ?

10. Combien y a-t-il de chaînes de bits de longueur huit?

11. Combien de chaînes de bits de longueur dix commencent et finissent avec un 1?

12. Combien de chaînes de bits y a-t-il de longueur six ou moins, pas compter la chaîne vide?

13. Combien de chaînes de bits dont la longueur ne dépasse pas n , où n est un entier positif, composé entièrement de 1, sans compter la chaîne vide?

14. Combien de chaînes de bits de longueur n , où n est positif entier, début et fin avec 1s?

17. Combien de chaînes de cinq caractères ASCII contiennent le caractère @ (signe «at») au moins une fois? [*Remarque:* il y a 128 caractères ASCII différents.

18. Combien de séquences d'ADN à 5 éléments
a) se terminent par A?
b) commencer par T et finir par G?
c) ne contient que A et T?
d) ne contiennent pas de C?

19. Combien de séquences d'ARN à 6 éléments
a) ne contient pas U?
b) se terminent par GU?
c) commencer par C?
d) ne contient que A ou U?

20. Combien d'entiers positifs entre 5 et 31
a) sont divisibles par 3? Quels sont ces entiers?
b) sont divisibles par 4? Quels sont ces entiers?
c) sont divisibles par 3 et par 4? Quels sont ces entiers?

21. Combien d'entiers positifs entre 50 et 100
a) sont divisibles par 7? Quels sont ces entiers?
b) sont divisibles par 11? Quels sont ces entiers?
c) sont divisibles à la fois par 7 et 11? Quels entiers sont celles-ci?

22. Combien d'entiers positifs moins de 1000
a) sont divisibles par 7?
b) sont divisibles par 7 mais pas par 11?
c) sont divisibles à la fois par 7 et 11?
d) sont divisibles par 7 ou 11?
e) sont divisibles par exactement l'un de 7 et 11?
f) ne sont divisibles ni par 7 ni par 11?
g) ont des chiffres distincts?
h) ont des chiffres distincts et sont pairs?

23. Combien d'entiers positifs compris entre 100 et 999 sive
a) sont divisibles par 7?
b) sont bizarres?
c) ont les mêmes trois chiffres décimaux?
d) ne sont pas divisibles par 4?
e) sont divisibles par 3 ou 4?
f) ne sont pas divisibles par 3 ou 4?
g) sont divisibles par 3 mais pas par 4?
h) sont divisibles par 3 et 4?

24. Combien d'entiers positifs entre 1 000 et 9 999 clusive
a) sont divisibles par 9?
b) sont pairs?
c) ont des chiffres distincts?
d) ne sont pas divisibles par 3?

15. Combien y a-t-il de chaînes de lettres minuscules quatre ou moins, sans compter la chaîne vide?

16. Combien de chaînes y a-t-il de quatre lettres minuscules qui avoir la lettre *x* en eux?

e) sont divisibles par 5 ou 7?
f) ne sont pas divisibles par 5 ou 7?
g) sont divisibles par 5 mais pas par 7?
h) sont divisibles par 5 et 7?

25. Combien de chaînes de trois chiffres décimaux

a) ne contiennent pas trois fois le même chiffre?
b) commence par un chiffre impair?
c) ont exactement deux chiffres qui sont 4s?

26. Combien de chaînes de quatre chiffres décimaux

a) ne contiennent pas deux fois le même chiffre?
b) se terminent par un chiffre pair?
c) a exactement trois chiffres qui sont 9s?

27. Un comité est composé d'un représentant de chacun des 50 États des États-Unis, où le représentant d'un État est le gouverneur ou un des deux sénateurs de cet état. Combien de façons là pour former ce comité?

28. Combien de plaques d'immatriculation peuvent être faites en utilisant trois chiffres suivis de trois lettres anglaises majuscules ou trois lettres anglaises majuscules suivies de trois chiffres?

29. Combien de plaques d'immatriculation peuvent être fabriquées à l'aide de deux lettres anglaises majuscules suivies de quatre ou deux chiffres chiffres suivis de quatre lettres anglaises majuscules?

30. Combien de plaques d'immatriculation peuvent être fabriquées en utilisant trois lettres anglaises majuscules suivies de trois ou quatre chiffres lettres anglaises majuscules suivies de deux chiffres?

31. Combien de plaques d'immatriculation peuvent être faites en utilisant deux ou trois lettres anglaises majuscules suivies de deux ou trois chiffres?

32. Combien de chaînes de huit lettres anglaises majuscules sont Là

a) si les lettres peuvent être répétées?
b) si aucune lettre ne peut être répétée?
c) qui commencent par X, si les lettres peuvent être répétées?
d) qui commencent par X, si aucune lettre ne peut être répétée?
e) qui commencent et se terminent par X, si les lettres peuvent être répétées?
f) commençant par les lettres BO (dans cet ordre), si les lettres peut être répété?
g) commençant et finissant par les lettres BO (dans cet ordre), si les lettres peuvent être répétées?
h) commençant ou finissant par les lettres BO (dans cet ordre), si les lettres peuvent être répétées?

33. Combien de chaînes de huit lettres anglaises y a-t-il

a) qui ne contiennent pas de voyelles, si les lettres peuvent être répétées?
b) qui ne contiennent pas de voyelles, si les lettres ne peuvent pas être répétées?
c) qui commencent par une voyelle, si les lettres peuvent être répétées?
d) qui commencent par une voyelle, si les lettres ne peuvent pas être répétées?

35. Combien de fonctions un à un existe-t-il à partir d'un ensemble avec cinq éléments à des ensembles avec le nombre suivant d'éléments?

a) 4 **b)** 5 **c)** 6 **d)** 7

36. Combien de fonctions y a-t-il dans l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$, où n est un entier positif, à l'ensemble $\{0, 1\}$?

37. Combien de fonctions y a-t-il dans l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$, où n est un entier positif, à l'ensemble $\{0, 1\}$

a) qui sont un à un?
b) qui attribuent 0 à la fois à 1 et à n ?
c) qui attribuent 1 à exactement l'un des entiers positifs moins de n ?

38. Combien y a-t-il de fonctions partielles (voir section 2.3) d'un ensemble avec cinq éléments à des ensembles avec chacun de ces nombre d'éléments?

a) 1 **b)** 2 **c)** 5 **d)** 9

39. Combien de fonctions partielles (voir la définition 13 de la section 2.3) existe-t-il d'un ensemble avec m éléments à un ensemble avec n éléments, où m et n sont des entiers positifs?

40. Combien de sous-ensembles d'un ensemble de 100 éléments ont plus qu'un élément?

41. Un **palindrome** est une chaîne dont l'inversion est identique à la chaîne. Combien de chaînes de bits de longueur n sont des palindromes?

42. Combien de séquences d'ADN à 4 éléments

a) ne contiennent pas la base T?
b) contenir la séquence ACG?
c) contiennent les quatre bases A, T, C et G?
d) contenir exactement trois des quatre bases A, T, C et G?

43. Combien de séquences d'ARN à 4 éléments

a) contenir la base U?
b) ne contiennent pas la séquence CUG?
c) ne contiennent pas les quatre bases A, U, C et G?
d) contenir exactement deux des quatre bases A, U, C et G?

44. Combien y a-t-il de façons de faire asseoir quatre personnes sur un groupe de dix autour d'une table circulaire où se trouvent deux sièges considéré de la même façon quand tout le monde a le même voisin de gauche et de droite immédiat?

45. Combien y a-t-il de façons d'asseoir six personnes autour d'un table spécifique où deux sièges sont considérés comme identiques quand tout le monde a les mêmes deux voisins sans se Gardez-vous s'ils sont voisins de droite ou de gauche?

46. De combien de façons un photographe lors d'un mariage peut-il gamme 6 personnes d'affilée d'un groupe de 10 personnes, où

e) qui contiennent au moins une voyelle, si des lettres peuvent être tourbé?

f) qui contiennent exactement une voyelle, si des lettres peuvent être tourbé?

g) commençant par X et contenant au moins une voyelle, si les lettres peuvent être répétées?

h) commençant et finissant par X et contenant au moins un voyelle, si les lettres peuvent être répétées?

34. Combien de fonctions différentes existe-t-il dans un 10 éléments en ensembles avec les nombres d'éléments suivants ments?

a) 2 **b)** 3 **c)** 4 **d)** 5

la mariée et le marié sont parmi ces 10 personnes, si

a) la mariée doit être sur la photo?

b) les mariés doivent être sur la photo?

c) exactement l'un des mariés est sur la photo ture?

47. De combien de façons un photographe lors d'un mariage peut-il gamme de six personnes d'affilée, y compris la mariée et le marié, si

a) la mariée doit être à côté du marié?

b) la mariée n'est pas à côté du marié?

c) la mariée est positionnée quelque part à gauche de la jeune marié?

48. Combien de chaînes de bits de longueur sept commencent par deux 0 ou se terminent par trois 1?

49. Combien de chaînes de bits de longueur 10 commencent soit par trois 0 ou se termine par deux 0?

∗ **50.** Combien de chaînes de bits de longueur 10 contiennent soit cinq con-

0 ou cinq 1 consécutifs?

∗∗ **51.** Combien de chaînes de bits de longueur huit contiennent trois

0 consécutifs ou quatre 1 consécutifs?

52. Chaque élève d'une classe de mathématiques discrète est soit un informatique ou une majeure en mathématiques ou est un joint majeur dans ces deux matières. Combien d'étudiants sont classe s'il y a 38 majors en informatique (y compris avec des majeures conjointes), 23 majeures en mathématiques (y majeures), et 7 majeures conjointes?

53. Combien d'entiers positifs ne dépassant pas 100 sont divisés ible par 4 ou par 6?

54. Combien d'initiales différentes peut-on avoir si une personne a au moins deux, mais pas plus de cinq, différentes initiales? Supposons que chaque initiale est l'une des 26 lettres majuscules de la langue anglaise.

55. Supposons qu'un mot de passe pour un système informatique doit avoir au moins 8, mais pas plus de 12, où chacun le mot de passe est une lettre anglaise minuscule, une lettre majuscule en anglais, un chiffre ou l'un des six caractères caractères spéciaux ∗ ,>, < ,! , + et =.

a) Combien de mots de passe différents sont disponibles pour cela Système d'ordinateur?

b) Combien de ces mots de passe contiennent au moins un apparition d'au moins un des six caractères spéciaux?

c) À l'aide de votre réponse à la partie (a), déterminez combien de temps prend un pirate pour essayer tous les mots de passe possibles, en supposant que cela prend une nanoseconde à un pirate pour vérifier chaque mot de passe possible.

56. Le nom d'une variable dans le langage de programmation C est

59. Supposons qu'à un moment futur, chaque téléphone du le monde se voit attribuer un numéro contenant un code de pays 1 à 3 chiffres, c'est-à-dire de la forme X , XX ou XXX , suivi d'un numéro de téléphone à 10 chiffres du formulaire NXX - NXX - $XXXX$ (comme décrit dans l'exemple 8). Comment de nombreux numéros de téléphone différents seraient disponibles dans le monde sous ce plan de numérotation?

60. Une clé du cryptosystème Vigenère est une chaîne d'anglais lettres, où le cas des lettres n'a pas d'importance. Comment de nombreuses clés différentes pour ce cryptosystème sont là avec trois, quatre, cinq ou six lettres?

61. Une clé de confidentialité équivalente filaire (WEP) pour un réseau délité (WiFi) est une chaîne de 10, 26 ou 58 chiffres hexadécimaux. Combien de clés WEP différentes sont Là?

62. Supposons que p et q sont des nombres premiers et que $n = pq$. Utilisez le principe de l'inclusion-exclusion pour trouver le nombre nombre d'entiers positifs ne dépassant pas n qui sont relativement premier à n .

63. Utilisez le principe de l'inclusion-exclusion pour trouver le nombre d'entiers positifs inférieurs à 1 000 000 qui ne sont pas divisible par 4 ou par 6.

64. Utilisez un arbre pour trouver le nombre de chaînes de bits de longueur quatre sans trois 0 consécutifs.

65. Combien y a-t-il de façons d'organiser les lettres a , b , c , et d tel que a ne soit pas immédiatement suivi de b ?

66. Utilisez un diagramme arborescent pour trouver le nombre de World Series peut se produire, où la première équipe qui gagne quatre matchs sur sept remportent la série.

67. Utilisez un arbre pour déterminer le nombre de sous-ensembles de {3 , 7 , 9 , 11 , 24} avec la propriété que la somme des éléments du sous-ensemble est inférieur à 28.

68. a) Supposons qu'un magasin vend six variétés de boissons gazeuses: cola, soda au gingembre, orange, racinette, limonade et soda à la crème. Utilisez un arbre pour déterminer le nombre de différents types de bouteilles que le magasin doit

une chaîne qui peut contenir des lettres majuscules, des minuscules
caractères, chiffres ou traits de soulignement. De plus, le premier caractère de la chaîne doit être une lettre, en majuscule ou en minuscule, ou un trait de soulignement. Si le nom d'une variable est déterminé par ses huit premiers caractères, combien de variables différentes peut être nommé en C? (Notez que le nom d'une variable peut contenir moins de huit caractères.)

57. Le nom d'une variable dans la langue de programmation JAVA la jauge est une chaîne de 1 à 65 535 caractères, inclus, où chaque caractère peut être une majuscule ou un une lettre minuscule, un signe dollar, un trait de soulignement ou un chiffre, sauf que le premier caractère ne doit pas être un chiffre. Dissuader-exploiter le nombre de noms de variables différents dans JAVA.

58. Union internationale des télécommunications (UIT) précise qu'un numéro de téléphone doit être composé d'un essayez le code avec entre 1 et 3 chiffres, sauf que le code 0 n'est pas disponible pour être utilisé comme code de pays, suivi de un nombre d'au plus 15 chiffres. Combien disponibles les numéros de téléphone possibles sont là qui répondent à ces restrictions?

avoir toutes les variétés disponibles dans des bouteilles de toutes tailles si
sont disponibles en bouteilles de 12 onces, tout sauf ade sont disponibles en bouteilles de 20 onces, seulement cola et le gingembre est disponible en bouteilles de 32 onces, et tout sauf limonade et crème soda sont disponibles en 64 onces bouteilles?

b) Répondez à la question dans la partie (a) en utilisant des règles de comptage.

69. a) Supposons qu'un style populaire de chaussure de course soit aussi bien pour les hommes que pour les femmes. La chaussure de la femme est disponible en tailles 6, 7, 8 et 9, et la chaussure pour homme existe en tailles 8, 9, 10, 11 et 12. La chaussure homme vient en blanc et noir, tandis que la chaussure de la femme vient en blanc, rouge et noir. Utilisez un arbre pour déterminer le nombre de chaussures différentes qu'un magasin doit stocker pour avoir au moins une paire de ce type de chaussure de course pour toutes les tailles et couleurs disponibles pour les deux hommes et femmes.

b) Répondez à la question dans la partie (a) en utilisant des règles de comptage.

∗ **70.** Utilisez la règle du produit pour montrer qu'il y a 2^{2^n} différent tables de vérité pour les propositions dans *n* variables.

71. Utiliser l'induction mathématique pour prouver la règle de somme pour *m* tâches de la règle de somme pour deux tâches.

72. Utiliser l'induction mathématique pour prouver la règle du produit pour *m* tâches à partir de la règle de produit pour deux tâches.

73. Combien de diagonales un polygone convexe avec *n* côtés avoir? (Rappelons qu'un polygone est convexe si chaque ligne se ment reliant deux points à l'intérieur ou à la limite de le polygone se situe entièrement dans cet ensemble et qu'une diag-nal d'un polygone est un segment de ligne reliant deux sommets qui ne sont pas adjacentes.)

74. Les données sont transmises sur Internet dans des **datagrammes** , qui sont des blocs de bits structurés. Chaque datagramme contient des informations d'en-tête organisées en un maximum de 14 domaines différents (spécifiant beaucoup de choses, y compris les adresses source et de destination) et une zone de données contient les données réelles qui sont transmises. Un de 14 champs d'en-tête est le **champ de longueur d'en-tête** (désigné par HLEN), qui est spécifié par le protocole comme étant 4 bits long et qui spécifie la longueur d'en-tête en termes de 32 bits blocs de bits. Par exemple, si HLEN = 0110, l'en-tête est composé de six blocs 32 bits. Un autre de l'en-tête 14 champs est le **champ de longueur totale de** 16 bits (indiqué par TOTAL LENGTH), qui spécifie la longueur en bits du datagramme entier, y compris les deux champs d'en-tête et la zone de données. La longueur de la zone de données est le total longueur du datagramme moins la longueur de l'en-tête.

a) La plus grande valeur possible de LONGUEUR TOTALE (qui est de 16 bits) détermine le maximum longueur totale en octets (blocs de 8 bits) d'un Internet datagramme. Quelle est cette valeur?

b) La plus grande valeur possible de HLEN (qui est de 4 bits long) détermine la longueur totale maximale de l'en-tête en blocs 32 bits. Quelle est cette valeur? Quel est le longueur totale maximale de l'en-tête en octets?

c) La longueur minimale (et la plus courante) de l'en-tête est 20 octets. Quelle est la longueur totale maximale en octets de la zone de données d'un datagramme Internet?

d) Combien de chaînes d'octets différentes dans la zone de données peut être transmis si la longueur de l'en-tête est de 20 octets et la longueur totale est aussi longue que possible?

Le principe du pigeonnier

introduction

Supposons qu'un troupeau de 20 pigeons vole dans un ensemble de 19 trous pour se percherParce qu'il y a 20 pigeons mais seulement 19 pigeonniers, au moins un de ces 19 pigeonniers doit avoir au moins deux

des pigeons dedans. Pour voir pourquoi cela est vrai, notez que si chaque pigeonnier avait au plus un pigeon dedans,
19 pigeons au maximum, un par trou, pourraient être accueillis. Cela illustre un principe général
appelé le **principe** du **pigeonnier** , qui stipule que s'il y a plus de pigeons que de pigeonniers,
alors il doit y avoir au moins un pigeonnier avec au moins deux pigeons (voir figure 1). De
Bien sûr, ce principe s'applique à d'autres objets que les pigeons et les pigeonniers.

THÉORÈME 1 **LE PRINCIPE PIGEONHOLE** Si k est un entier positif et $k + 1$ ou plusieurs objets sont placés dans k cases, puis il y a au moins une case contenant deux ou plusieurs des objets.

(une) b) (c)

FIGURE 1 **Il y a plus de pigeons que de pigeonniers.**

Preuve: Nous prouvons le principe du pigeonnier à l'aide d'une preuve par contraposition. Supposons qu'aucun des les k cases contiennent plus d'un objet. Le nombre total d'objets serait alors au plus k . C'est une contradiction, car il y a au moins $k + 1$ objets.

Le principe du pigeonnier est également appelé **principe du tiroir Dirichlet** , après le XIXe siècle mathématicien allemand G. Lejeune Dirichlet, qui a souvent utilisé ce principe dans son travail. (Dirichlet n'était pas la première personne à utiliser ce principe; une démonstration qu'il y avait au moins deux Parisiens avec le même nombre de cheveux sur la tête remontent au XVIIe siècle - voir l'exercice 33.) Il s'agit d'une technique de preuve supplémentaire importante qui complète celles que nous avons développé dans les chapitres précédents. Nous l'introduisons dans ce chapitre en raison de ses nombreux applications à la combinatoire.

Nous illustrerons l'utilité du principe du pigeonnier. Nous montrons d'abord qu'il peut être utilisé pour prouver un corollaire utile sur les fonctions.

COROLLARY 1 Une fonction f d'un ensemble avec $k + 1$ ou plusieurs éléments à un ensemble avec k éléments n'est pas biunivoque.

Preuve: Supposons que pour chaque élément y dans le codomaine de f, nous avons une boîte qui contient tous éléments x du domaine de f tels que $f(x) = y$. Parce que le domaine contient $k + 1$ ou plus éléments et le codomaine ne contient que k éléments, le principe du pigeonhole nous dit que l'on de ces cases contient deux ou plusieurs éléments x du domaine. Cela signifie que f ne peut pas être Un par un.

Les exemples 1 à 3 montrent comment le principe du pigeonnier est utilisé.

EXEMPLE 1 Parmi tout groupe de 367 personnes, il doit y en avoir au moins deux avec le même anniversaire, car il n'y a que 366 anniversaires possibles. ▲

EXEMPLE 2 Dans tout groupe de 27 mots anglais, il doit y en avoir au moins deux commençant par la même lettre, car il y a 26 lettres dans l'alphabet anglais. ▲

EXEMPLE 3 Combien d'étudiants doivent être dans une classe pour garantir qu'au moins deux étudiants reçoivent le même score à l'examen final, si l'examen est noté sur une échelle de 0 à 100 points?

Solution: Il y a 101 scores possibles sur la finale. Le principe du pigeonnier montre que parmi Pour 102 élèves, il doit y avoir au moins 2 élèves avec le même score. ▲

G. LEJEUNE DIRICHLET (1805–1859) G. Lejeune Dirichlet est né dans une famille belge vivant près de Cologne, Allemagne. Son père était maître de poste. Il est devenu passionné de mathématiques à un jeune âge. Il dépensait tout son argent de réserve pour des livres de mathématiques au moment où il est entré au lycée de Bonn 12 ans. À 14 ans, il entre au Collège des Jésuites de Cologne et à 16 ans il commence ses études à l'Université de Paris. En 1825, il est retourné en Allemagne et a été nommé à un poste à l'Université de Breslau. En 1828, il déménage à l'Université de Berlin. En 1855, il est choisi pour succéder à Gauss à l'Université de Göttingen. Dirichlet serait la première personne à maîtriser les *Disquisitiones Arithmeticae de* Gauss , apparus 20 ans plus tôt. Il en aurait gardé une copie à ses côtés, même en voyage. Dirichlet a fait de nombreuses découvertes importantes en théorie des nombres, y compris le théorème selon lequel il existe une infinité de nombres premiers dans les progressions arithmétiques $an + b$ lorsque a et b sont relativement prime. Il a prouvé le cas $n = 5$ du dernier théorème de Fermat, qu'il n'y a pas de solutions non triviales en nombres entiers à $x^5 + y^5 = z^5$. Dirichlet a également apporté de nombreuses contributions à l'analyse. Dirichlet était considéré comme un excellent enseignant qui pouvait expliquer des idées avec grande clarté. Il était marié à Rebecca Mendelssohn, l'une des sœurs du compositeur Frederick Mendelssohn.

Le principe du pigeonhole est un outil utile dans de nombreuses preuves, y compris les preuves de surprendre résultats, tels que ceux donnés dans l'exemple 4.

EXEMPLE 4 Montrer que pour chaque entier n, il existe un multiple de n qui n'a que 0 et 1 dans sa décimale expansion.

Solution: Soit n un entier positif. Considérons les $n + 1$ entiers 1 , 11 , 111 , ..., 11 ... 1 (où le dernier entier de cette liste est l'entier avec $n + 1$ 1s dans son expansion décimale). Notez qu'il sont n restes possibles lorsqu'un entier est divisé par n . Parce qu'il y a $n + 1$ entiers dans cette liste, selon le principe du pigeonhole, il doit y avoir deux avec le même reste lorsqu'ils sont divisés par n . Le plus grand de ces entiers moins le plus petit est un multiple de n , qui a une décimale expansion composée entièrement de 0 et de 1. ▲

Le principe du pigeonnier généralisé

Le principe du pigeonhole stipule qu'il doit y avoir au moins deux objets dans la même boîte lorsque il y a plus d'objets que de boîtes. Cependant, encore plus peut être dit lorsque le nombre d'objets dépasse un multiple du nombre de cases. Par exemple, parmi n'importe quel ensemble de 21 chiffres décimaux il doit y en avoir 3 identiques. Cela suit parce que lorsque 21 objets sont distribués dans 10 boîtes, une boîte doit avoir plus de 2 objets.

THÉORÈME 2 **LE PRINCIPE GÉNÉRALISÉ DES PIGEONS** Si N objets sont placés dans k boîtes, alors il y a au moins une boîte contenant au moins $\lceil N/k \rceil$ objets.

Preuve: Nous utiliserons une preuve par contraposition. Supposons qu'aucune des cases ne contienne plus que $\lceil N/k \rceil - 1$ objets. Ensuite, le nombre total d'objets est au maximum

$$k\left(\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil - 1\right) < k\left(\left(\frac{N}{k} + 1\right) - 1\right) = N,$$

où l'inégalité $\lceil N/k \rceil < (N/k) + 1$ a été utilisée. Ceci est une contradiction car il sont un total de N objets.

Un type de problème courant demande le nombre minimum d'objets tel qu'au moins r de ces objets doivent se trouver dans l'une des k cases lorsque ces objets sont répartis entre les cases. Lorsque nous avons N objets, le principe du pigeonnier généralisé nous dit qu'il doit y avoir au moins r des objets dans l'une des cases tant que $\lceil N/k \rceil \geq r$. Le plus petit entier N avec $N/k > r - 1$, à savoir, $N = k(r - 1) + 1$, est le plus petit entier satisfaisant l'inégalité $\lceil N/k \rceil \geq r$. Pourrait une valeur plus petite de N suffit? La réponse est non, car si nous avions $k(r - 1)$ objets, nous pourrions mettez $r - 1$ d'entre eux dans chacune des k cases et aucune case n'aurait au moins r objets.

Lorsque vous pensez à des problèmes de ce type, il est utile de considérer comment vous pouvez éviter au moins r objets dans l'une des cases lorsque vous ajoutez des objets successifs. Pour éviter d'ajouter un r e objet à n'importe quelle boîte, vous vous retrouvez finalement avec $r - 1$ objets dans chaque boîte. Il n'y a aucun moyen d'ajouter le objet suivant sans mettre un r e objet dans cette case.

Les exemples 5 à 8 illustrent l'application du principe généralisé des trous de pigeonnier.

EXEMPLE 5 Sur 100 personnes, il y a au moins $\lceil 100/12 \rceil = 9$ qui sont nés le même mois. ▲

EXEMPLE 6 Quel est le nombre minimum d'élèves requis dans une classe de mathématiques discrète pour être sûr qu'au moins six recevront le même grade, s'il y a cinq grades possibles, A, B, C, D et F?

Solution: le nombre minimum d'étudiants requis pour garantir qu'au moins six étudiants reçoivent la même note est le plus petit entier N tel que $\lceil N/5 \rceil = 6$. Le plus petit entier est $N = 5 \cdot 5 + 1 = 26$. Si vous n'avez que 25 étudiants, il est possible qu'il y en ait cinq qui ont reçu chaque année de sorte qu'aucun élève n'ait reçu la même année. Ainsi, 26 est le minimum nombre d'élèves nécessaires pour garantir qu'au moins six élèves recevront la même note. ▲

EXEMPLE 7 **a)** Combien de cartes doivent être sélectionnées dans un jeu standard de 52 cartes pour garantir qu'au moins trois cartes de la même couleur sont choisies?
b) Combien faut-il sélectionner pour garantir qu'au moins trois cœurs sont sélectionnés?

Un deck standard de 52 cartes a 13 types de cartes, avec quatre cartes de chacun de type, un dans chaque des quatre costumes, coeurs, diamants, bêches et clubs.

Solution: **a)** Supposons qu'il y ait quatre cases, une pour chaque couleur, et que les cartes sont sélectionnées, elles sont placé dans la boîte réservée aux cartes de cette couleur.En utilisant le principe du pigeonnier généralisé, on voit que si N cartes sont sélectionnées, il y a au moins une case contenant au moins $\lceil N/4 \rceil$ cartes. Par conséquent, nous savons qu'au moins trois cartes d'une même couleur sont sélectionnées si $\lceil N/4 \rceil \geq 3$. Le le plus petit entier N tel que $\lceil N/4 \rceil \geq 3$ soit $N = 2 \cdot 4 + 1 = 9$, donc neuf cartes suffisent.Notez que si huit cartes sont sélectionnées, il est possible d'avoir deux cartes de chaque couleur, donc plus de huit cartes sont nécessaires. Par conséquent, neuf cartes doivent être sélectionnées pour garantir qu'au moins trois cartes de un costume est choisi. Une bonne façon d'y penser est de noter qu'après la huitième carte choisi, il n'y a aucun moyen d'éviter d'avoir une troisième carte d'une couleur.

b) Nous n'utilisons pas le principe généralisé des pigeonniers pour répondre à cette question, car nous voulons pour vous assurer qu'il y a trois coeurs, pas seulement trois cartes d'une même couleur. Notez que dans le pire cas, nous pouvons sélectionner tous les clubs, diamants et piques, 39 cartes en tout, avant de sélectionner un seul cœur. Les trois prochaines cartes seront toutes de cœur, il nous faudra donc peut-être sélectionner 42 cartes pour en obtenir trois. cœurs. ▲

EXEMPLE 8 Quel est le moins d'indicatifs régionaux nécessaires pour garantir que les 25 millions de téléphones dans un état peut-on attribuer des numéros de téléphone distincts à 10 chiffres?(Supposons que les numéros de téléphone sont le formulaire NXX - NXX - $XXXX$, où les trois premiers chiffres forment l'indicatif régional,N représente un chiffre de 2 à 9 inclus, et X représente n'importe quel chiffre.)

Solution: il existe huit millions de numéros de téléphone différents sous la formeNXX - $XXXX$ (comme indiqué dans l'exemple 8 de la section 6.1). Par conséquent, selon le principe du pigeonnier généralisé, parmi 25 millions téléphones, au moins $\lceil 25,000,000/8,000,000 \rceil = 4$ d'entre eux doivent avoir des numéros de téléphone identiques. Par conséquent, au moins quatre indicatifs régionaux sont nécessaires pour garantir que tous les numéros à 10 chiffres sont différents.▲

L'exemple 9, bien qu'il ne s'agisse pas d'une application du principe généralisé des trous de pigeon, utilise de principes similaires.

EXEMPLE 9 Supposons qu'un laboratoire informatique possède 15 postes de travail et 10 serveurs.Un câble peut être utilisé pour connecter directement un poste de travail à un serveur.Pour chaque serveur, une seule connexion directe à ce serveur peut être actif à tout moment.Nous voulons garantir à tout moment un ensemble de 10 ou moins les postes de travail peuvent accéder simultanément à différents serveurs via des connexions directes.Bien que nous pourrait le faire en connectant chaque poste de travail directement à chaque serveur (en utilisant 150 connexions), quel est le nombre minimum de connexions directes nécessaires pour atteindre cet objectif?

Solution: Supposons que nous étiquetons les postes de travail$W_1, W_2, ..., W_{15}$ et les serveurs $S_1, S_2, ..., S_{10}$. De plus, supposons que nous connectons W_k à S_k pour $k = 1, 2, ..., 10$ et chacun de $W_{11}, W_{12}, W_{13}, W_{14}$ et W_{15} aux 10 serveurs. Nous avons un total de 60 connexions directes. De toute évidence, un ensemble de 10 postes de travail ou moins peut accéder simultanément à différents serveurs.Nous voyons ceci en notant que si le poste de travailW_j est inclus avec $1 \leq j \leq 10$, il peut accéder au serveurS_j , et pour chaque poste de travail W_k avec $k \geq 11$ inclus, il doit y avoir un poste de travail correspondantW_j

avec $1 \leq j \leq 10$ non inclus, donc W_k peut accéder au serveur S_j . (Cela suit parce qu'il y a moins de serveurs S_j disponibles qu'il y a de postes de travail W_j avec $1 \leq j \leq 10$ non inclus.)

Supposons maintenant qu'il y ait moins de 60 connexions directes entre les postes de travail et les serveurs. Un serveur serait alors connecté à au plus $\lfloor 59/10 \rfloor = 5$ postes de travail.(Si tous les serveurs étaient connecté à au moins six postes de travail, il y aurait au moins $6 \cdot 10 = 60$ connexions directes.)
Cela signifie que les neuf serveurs restants ne sont pas suffisants pour permettre aux 10 autres postes de travail de accéder simultanément à différents serveurs. Par conséquent, au moins 60 connexions directes sont nécessaires. Il s'ensuit que 60 est la réponse. ▲

Quelques applications élégantes du principe du pigeonnier

Dans de nombreuses applications intéressantes du principe du pigeonnier, les objets à placer dans des boîtes doit être choisi de manière intelligente. Quelques-unes de ces applications seront décrites ici.

EXEMPLE 10 Pendant un mois avec 30 jours, une équipe de baseball joue au moins un match par jour, mais pas plus de 45 matchs. Montrer qu'il doit y avoir une période d'un certain nombre de jours consécutifs pendant que l'équipe doit jouer exactement 14 matchs.

Solution: Soit a_j le nombre de parties jouées le ou avant le j ème jour du mois. alors $a_1, a_2, \ldots, a_{30}$ est une séquence croissante d'entiers positifs distincts, avec $1 \leq a_j \leq 45$. Plus-plus, $un_1 + 14, un_2 + 14, \ldots, un_{30} + 14$ est également une séquence croissante d'entiers positifs distincts, avec $15 \leq a_j + 14 \leq 59$.

Les 60 entiers positifs $a_1, a_2, \ldots, a_{30}, a_1 + 14, a_2 + 14, \ldots, a_{30} + 14$ sont tous inférieurs à ou égal à 59. Par conséquent, selon le principe du pigeonhole, deux de ces nombres entiers sont égaux. Parce que le les entiers a_j, $j = 1, 2, \ldots, 30$ sont tous distincts et les entiers $a_j + 14$, $j = 1, 2, \ldots, 30$ sont tous distincts, il doit y avoir des indices i et j avec $a_i = a_j + 14$. Cela signifie que exactement 14 jeux ont été joués du jour $j + 1$ au jour i . ▲

EXEMPLE 11 Montrer que parmi $n + 1$ entiers positifs ne dépassant pas $2n$, il doit y avoir un entier qui divise l'un des autres entiers.

Solution: Écrivez chacun des $n + 1$ entiers $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ comme une puissance de 2 fois un entier impair. En d'autres termes, soit $a_j = 2^{k_j} q_j$ pour $j = 1, 2, \ldots, n + 1$, où k_j est un entier non négatif et q_j est impair. Les entiers $q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}$ sont tous des entiers positifs impairs inférieurs à $2n$. Parce que là ne sont que n entiers positifs impairs inférieurs à $2n$, il découle du principe du pigeonnier que deux des entiers $q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}$ doit être égal. Par conséquent, il existe des entiers distincts i et j tels que $q_i = q_j$. Soit q la valeur commune de q_i et q_j . Ensuite, $a_i = 2^{k_i} q$ et $a_j = 2^{k_j} q$. Ça suit que si $k_i < k_j$, alors a_i divise a_j ; tandis que si $k_i > k_j$, alors a_j divise a_i . ▲

Une application astucieuse du principe du pigeonnier montre l'existence d'un sous-séquence décroissante d'une certaine longueur dans une séquence d'entiers distincts. Nous passons en revue certains définitions avant cette application est présentée. Supposons que $a_1, a_2, \ldots, a_N$ est une séquence de nombres réels. Une **sous** -séquence de cette séquence est une séquence de la forme $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_m}$, où $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq N$. Par conséquent, une sous-séquence est une séquence obtenue à partir de l'original séquence en incluant certains termes de la séquence d'origine dans leur ordre d'origine, et n'incluant peut-être pas d'autres termes. Une séquence est appelée **strictement croissante** si chaque terme est plus grand que celui qui le précède, et il est appelé **strictement décroissant** si chaque terme est plus petit que le celui qui le précède.

THÉORÈME 3 Chaque séquence de $n^2 + 1$ nombres réels distincts contient une sous-séquence de longueur $n + 1$ qui augmente ou diminue strictement.

Nous donnons un exemple avant de présenter la preuve du Théorème 3.

EXEMPLE 12 La séquence 8, 11, 9, 1, 4, 6, 12, 10, 5, 7 contient 10 termes. Notez que $10 = 3^2 + 1$. Il sont quatre sous-séquences strictement croissantes de longueur quatre, à savoir 1, 4, 6, 12; 1, 4, 6, 7; 1, 4, 6, 10; et 1, 4, 5, 7. Il y a aussi une sous-séquence strictement décroissante de longueur quatre, à savoir, 11, 9, 6, 5. ▲

La preuve du théorème va maintenant être donnée.

Preuve: Soit $a_1, a_2, ..., a_{n^2+1}$ une suite de $n^2 + 1$ nombres réels distincts. Associer un ordre paire avec chaque terme de la séquence, à savoir, associer (i_k, d_k) au terme a_k, où i_k est le longueur de la sous-séquence croissante la plus longue commençant à a_k, et d_k est la longueur de la plus longue sous-séquence décroissante commençant à a_k.

Supposons qu'il n'y ait pas de sous-séquences croissantes ou décroissantes de longueur $n + 1$. Alors i_k et d_k sont tous deux des entiers positifs inférieurs ou égaux à n, pour $k = 1, 2, ..., n^2 + 1$. Par conséquent, par le règle du produit il y a n^2 paires ordonnées possibles pour (i_k, d_k). Selon le principe du pigeonnier, deux des ces $n^2 + 1$ paires ordonnées sont égales. En d'autres termes, il existe des termes a_s et a_t, avec $s < t$ tels que $i_s = i_t$ et $d_s = d_t$. Nous montrerons que cela est impossible. Parce que les termes de la les séquences sont distinctes, soit $a_s < a_t$ ou $a_s > a_t$. Si $a_s < a_t$, alors, parce que $i_s = i_t$, une augmentation une sous-séquence de longueur $i_t + 1$ peut être construite à partir de a_s, en prenant a_s suivi d'une augmentation sous-séquence de longueur i_t commençant à a_t. C'est une contradiction. De même, si $a_s > a_t$, le même le raisonnement montre que d_s doit être supérieur à d_t, ce qui est une contradiction.

Le dernier exemple montre comment le principe généralisé du trou de pigeon peut être appliqué à partie importante de la combinatoire appelée **théorie de Ramsey**, d'après le mathématicien anglais FP Ramsey. En général, la théorie de Ramsey traite de la distribution de sous-ensembles d'éléments d'ensembles.

EXEMPLE 13 Supposons que dans un groupe de six personnes, chaque paire d'individus se compose de deux amis ou deux ennemis. Montrez qu'il y a soit trois amis communs, soit trois ennemis communs dans le groupe.

Solution: Soit A l'une des six personnes. Des cinq autres personnes du groupe, il y a soit trois ou plus qui sont des amis de A, ou trois ou plus qui sont des ennemis de A. Cela découle de le principe du pigeonnier généralisé, car lorsque cinq objets sont divisés en deux ensembles, un des ensembles a au moins $\lceil 5/2 \rceil = 3$ éléments. Dans le premier cas, supposons que B, C et D soient amis de A. Si deux de ces trois individus sont amis, ces deux et A forment un groupe de trois amis communs. Sinon, B, C et D forment un ensemble de trois ennemis mutuels. La preuve dans ce dernier cas, lorsqu'il y a trois ennemis ou plus de A, procède de la même manière. ▲

Le **nombre de Ramsey** $R(m, n)$, où m et n sont des entiers positifs supérieurs ou égaux à 2, indique le nombre minimum de personnes à une fête de telle sorte qu'il y ait soit m amis mutuels ou n ennemis mutuels, en supposant que chaque paire de personnes à la fête sont des amis ou des ennemis. L'exemple 13 montre que $R(3, 3) \leq 6$. Nous concluons que $R(3, 3) = 6$ parce que dans un groupe de cinq

FRANK PLUMPTON RAMSEY (1903–1930) Frank Plumpton Ramsey, fils du président de Magdalene Le Collège de Cambridge a fait ses études aux collèges Winchester et Trinity. Après avoir obtenu son diplôme en 1923, il a été élu boursier du King's College de Cambridge, où il a passé le reste de sa vie. Ramsey fait de l'importance contributions à la logique mathématique. Ce que nous appelons maintenant la théorie de Ramsey a commencé avec sa combinatoire intelligente arguments, publiés dans le document «Sur un problème de logique formelle». Ramsey a également contribué à la théorie mathématique de l'économie. Il a été noté comme un excellent conférencier sur les fondements des mathématiques. Selon l'un de ses frères, il s'intéressait à presque tout, y compris la littérature anglaise et la politique. Ramsey était marié et avait deux filles. Sa mort à 26 ans des suites de problèmes hépatiques chroniques privé la communauté mathématique et l'Université de Cambridge d'un brillant jeune universitaire.

les gens où tous les deux sont amis ou ennemis, il ne peut y avoir trois amis communs ou trois ennemis mutuels (voir exercice 26).

Il est possible de prouver certaines propriétés utiles sur les nombres de Ramsey, mais pour la plupart en partie il est difficile de trouver leurs valeurs exactes.Notez que par symétrie, on peut montrer que $R(m, n) = R(n, m)$ (voir exercice 30). Nous avons également $R(2, n) = n$ pour chaque entier positif $n \geq 2$ (voir exercice 29). Les valeurs exactes de seulement neuf nombres de Ramsey $R(m, n)$ avec $3 \leq m \leq n$ sont connu, y compris $R(4, 4) = 18$. Seules les bornes sont connues pour de nombreux autres nombres de Ramsey, y compris $R(5, 5)$, qui est connu pour satisfaire $43 \leq R(5, 5) \leq 49$. Le lecteur intéressé à apprendre Pour en savoir plus sur les numéros Ramsey, consultez [MiRo91] ou [GrRoSp90].

Des exercices

1. Montrez que dans n'importe quel ensemble de six classes, chaque généralement une fois par semaine un jour particulier de la semaine, doivent être deux qui se réunissent le même jour, en supposant qu'aucun les cours ont lieu le week-end.

2. Montrez que s'il y a 30 élèves dans une classe, alors au moins deux ont des noms de famille commençant par la même lettre.

3. Un tiroir contient une douzaine de chaussettes brunes et une douzaine de chaussettes noires chaussettes, toutes inégalées. Un homme prend des chaussettes au hasard dans le noir.

a) Combien de chaussettes doit-il retirer pour être sûr qu'il a au moins deux chaussettes de la même couleur?

b) Combien de chaussettes doit-il retirer pour être sûr qu'il a au moins deux chaussettes noires?

4. Un bol contient 10 boules rouges et 10 boules bleues. Une femme sélectionne les balles au hasard sans les regarder.

a) Combien de balles doit-elle sélectionner pour être sûre d'avoir au moins trois boules de la même couleur?

b) Combien de balles doit-elle sélectionner pour être sûre d'avoir au moins trois boules bleues?

5. Montrez que parmi tout groupe de cinq (pas nécessairement entiers), il y en a deux avec le même reste lorsqu'il est divisé par 4.

6. Soit d un entier positif. Montrez que parmi tout groupe de $d + 1$ (pas nécessairement consécutifs) entiers il y a deux avec exactement le même reste lorsqu'ils sont divisés par d.

7. Soit n un entier positif. Montrez que dans n'importe quel ensemble de n entiers consécutifs il y a exactement un divisible par n.

8. Montrer que si f est une fonction de S à T, où S et T sont des ensembles finis avec $|S| > |T|$, alors il y a des éléments s_1 et s_2 dans S tels que $f(s_1) = f(s_2)$, ou en d'autres termes, f n'est pas un à un.

9. Quel est le nombre minimum d'étudiants, dont chacun vient de l'un des 50 États, qui doivent être inscrits dans une université pour garantir qu'il y a au moins 100 qui viennent du même état?

∗ **10.** Soit (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3, 4, 5$, un ensemble de cinq points distincts avec des coordonnées entières dans le plan xy. Montrez que le milieu de la ligne joignant au moins une paire de ces points a des coordonnées entières.

∗ **11.** Soit (x_i, y_i, z_i), $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, un ensemble de neuf points distincts avec des coordonnées entières dans l' espace xyz. Spectacle que le milieu d'au moins une paire de ces points a coordonnées entières.

12. Combien de paires ordonnées d'entiers (a, b) sont nécessaire pour garantir qu'il y a deux paires ordonnées (a_1, b_1) et (a_2, b_2) de telle sorte que un_1 **mod** $5 = un_2$ **mod** 5 et b_1 **mod** $5 = b_2$ **mod** 5?

13. a) Montrer que si cinq nombres entiers sont sélectionnés dans le premier huit entiers positifs, il doit y en avoir une paire entiers avec une somme égale à 9.

b) La conclusion de la partie (a) est-elle vraie si quatre entiers sont sélectionné plutôt que cinq?

14. a) Montrer que si sept entiers sont sélectionnés dans le premier 10 entiers positifs, il doit y avoir au moins deux paires de ces entiers avec la somme 11.

b) La conclusion de la partie (a) est-elle vraie si six entiers sont sélectionné plutôt que sept?

15. Combien de numéros doivent être sélectionnés dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ pour garantir qu'au moins une paire de ces les nombres totalisent jusqu'à 7?

16. Combien de numéros doivent être sélectionnés dans l'ensemble $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$ pour garantir qu'au moins une paire de ces nombres totalisent 16?

17. Une entreprise stocke des produits dans un entrepôt. Bacs de stockage dans cet entrepôt sont spécifiés par leur allée, leur emplacement dans l'allée et l'étagère. Il y a 50 allées, 85 horizontales emplacements dans chaque allée, et 5 étagères dans tout le magasin maison. Quel est le moins de produits de l'entreprise peut avoir de sorte qu'au moins deux produits doivent être stockés dans le même bac?

18. Supposons qu'il y ait neuf élèves dans une matière discrète cours de matiques dans un petit collège.

a) Montrer que la classe doit avoir au moins cinq étudiants masculins ou au moins cinq étudiantes.

b) Montrer que la classe doit avoir au moins trois étudiants masculins ou au moins sept étudiantes.

19. Supposons que chaque élève d'une classe de mathématiques discrète de 25 étudiants est un étudiant de première année, un étudiant en deuxième année ou un junior.

a) Montrer qu'il y a au moins neuf étudiants de première année, au moins neuf étudiants de deuxième année, ou au moins neuf juniors dans la classe.

b) Montrer qu'il y a au moins trois étudiants de première année, au moins 19 étudiants de deuxième année, ou au moins cinq juniors dans la classe.

20. Trouver une sous-séquence croissante de longueur maximale et une sous-séquence décroissante de longueur maximale dans la par conséquent 22, 5, 7, 2, 23, 10, 15, 21, 3, 17.

21. Construisez une séquence de 16 entiers positifs qui n'a pas augmentation ou diminution de la sous-séquence de cinq termes.

22. Montrer que s'il y a 101 personnes de différentes hauteurs debout, il est possible de trouver 11 personnes dans le afin qu'ils se tiennent dans la ligne avec des hauteurs qui sont soit en augmentation soit en diminution.

∗ **23.** Montrez que chaque fois que 25 filles et 25 garçons sont assis autour d'une table circulaire, il y a toujours une personne à la fois dont les voisins sont des garçons.

∗∗ **24.** Supposons que 21 filles et 21 garçons entrent en Concours ics. De plus, supposons que chaque participant résout au plus six questions, et pour chaque paire garçon-fille, il y a au moins une question qu'ils ont tous deux résolue. Spectacle qu'il y a une question qui a été résolue par au moins trois filles et au moins trois garçons.

∗ **25.** Décrire un algorithme en pseudocode pour produire le la plus forte augmentation ou diminution de la sous-séquence d'une d'entiers distincts.

26. Montrez que dans un groupe de cinq personnes (où deux personnes sont soit des amis, soit des ennemis), il n'y a pas nécessairement trois amis communs ou trois ennemis communs.

27. Montrez que dans un groupe de 10 personnes (où deux personnes sont des amis ou des ennemis), il y a soit trois mu- amis ou quatre ennemis mutuels, et il y a soit trois ennemis communs ou quatre amis communs.

28. Utilisez l'exercice 27 pour montrer que parmi tout groupe de 20 personnes (où deux personnes sont des amis ou des personnes mies), il y a soit quatre amis ou quatre amis ennemis.

29. Montrer que si n est un entier avec $n \geq 2$, alors le Ramsey le nombre $R(2, n)$ est égal à n. (Rappelons que les numéros de Ramsey ont été examinés après l'exemple 13 de la section 6.2.)

30. Montrer que si m et n sont des entiers avec $m \geq 2$ et $n \geq 2$, alors les nombres de Ramsey $R(m, n)$ et $R(n, m)$ sont égaux. (Rappelons que les nombres de Ramsey ont été discutés après examen ple 13 dans la section 6.2.)

31. Montrez qu'il y a au moins six personnes en Californie (pop- tion: 37 millions) avec les trois mêmes initiales qui étaient né le même jour de l'année (mais pas nécessairement la même année). Supposons que tout le monde ait trois initiales.

32. Montrer que s'il y a 100 000 000 de salariés dans le États-Unis qui gagnent moins de 1 000 000 de dollars (mais au moins un sou), alors il y en a deux qui ont gagné exactement la même somme d'argent, au centime, l'an dernier.

33. Au XVIIe siècle, il y avait plus de 800 000 habitants itinérants de Paris. À l'époque, on croyait que personne n'avait plus de 200 000 cheveux sur la tête. En supposant que ces les chiffres sont corrects et que tout le monde a au moins un cheveu sur la tête (c'est-à-dire que personne n'est complètement chauve), utilisez le principe du pigeonnier à montrer, comme l'écrivain français Pierre Nicole a fait, qu'il devait y avoir deux Parisiens avec le même nombre de poils sur la tête. Utilisez ensuite le générateur principe de trou de pige harmonisé pour montrer qu'il devait y avoir au moins cinq Parisiens à cette époque avec le même numéro de poils sur la tête.

34. En supposant que personne n'a plus de 1 000 000 de cheveux sur le chef de toute personne et que la population de New York City était 8 008 278 en 2010, montrer qu'il devait y avoir à au moins neuf personnes à New York en 2010 avec le même nombre de poils sur la tête.

35. Il y a 38 périodes différentes pendant lesquelles les cours dans une université peut être programmé. S'il y a 677 différents classes, combien de salles différentes seront nécessaires?

36. Un réseau informatique comprend six ordinateurs. Chaque com- ordinateur est directement connecté à au moins un des autres puters. Montrez qu'il y a au moins deux ordinateurs dans le réseau directement connecté au même numéro d'autres ordinateurs.

37. Un réseau informatique comprend six ordinateurs. Chaque com- l'ordinateur est directement connecté à zéro ou plus de l'autre des ordinateurs. Montrer qu'il y a au moins deux ordinateurs dans du réseau qui sont directement connectés au même numéro nombre d'autres ordinateurs. [*Indice:* il est impossible d'avoir un ordinateur relié à aucun des autres et un ordinateur lié à tous les autres.]

38. Trouvez le moins de câbles nécessaires pour connecter huit ordinateurs à quatre imprimantes pour garantir que pour chaque choix de quatre des huit ordinateurs, ces quatre ordinateurs les puters peuvent accéder directement à quatre imprimantes différentes. Justifier Ta Réponse.

39. Trouvez le moins de câbles nécessaires pour connecter 100 ordinateurs à 20 imprimantes pour garantir que chaque sous-ensemble 2 20 ordinateurs peuvent accéder directement à 20 imprimantes différentes. (Ici, les hypothèses sur les câbles et les ordinateurs sont comme dans l'exemple 9.) Justifiez votre réponse.

∗ **40.** Prouvez que lors d'une fête où il y a au moins deux personnes, il y a deux personnes qui connaissent le même nombre d'autres des gens là.

41. Un lutteur d'armes est le champion pour une période de 75 heures. (Ici, par une heure, nous entendons une période à partir d'un heure exacte, comme 13 heures, jusqu'à l'heure suivante.) Le bras Le lutteur avait au moins un match par heure, mais pas plus de 125 matchs au total. Montrer qu'il y a une période de heures utiles pendant lesquelles le lutteur de bras avait exactement 24 allumettes.

∗ **42.** L'énoncé de l'exercice 41 est-il vrai si 24 est remplacé par

a) 2? **b)** 23? **c)** 25? **d)** 30?

43. Montrer que si f est une fonction de S à T, où S et T sont ensembles finis non vides et $m = \lceil |S| / |T| \rceil$, alors il y a à moins m éléments de S mappées à la même valeur de T. Cette est, montrer qu'il existe des éléments distincts $s_1, s_2, \ldots, s_m$ de S tel que $f(s_1) = f(s_2) = \cdots = f(s_m)$.

44. Il y a 51 maisons dans une rue. Chaque maison a une adresse entre 1000 et 1099 inclus. Montrez qu'au moins deux les maisons ont des adresses qui sont des entiers consécutifs.

∗ **45.** Soit x un nombre irrationnel. Montrez que pour certains positifs entier j ne dépassant pas l'entier positif n , l'absolu valeur de la différence entre jx et l'entier le plus proche à jx est inférieur à $1/n$.

46. Soit $n_1, n_2, \ldots, n_t$ des entiers positifs. Montrez que si $n_1 + n_2 + \cdots + n_t - t + 1$ objets sont placés dans t cases, puis pour certains i, $i = 1, 2, \ldots, t$, la i ème case contient au moins n_i objets.

∗ **47.** Une preuve alternative du Théorème 3 basée sur le Le principe du trou de pige standardisé est décrit dans cet exercice. le la notation utilisée est la même que celle utilisée dans la preuve du texte.

a) Supposons que $i_k \leq n$ pour $k = 1, 2, \ldots, n^2 + 1$. Utilisez la principe généralisé des trous de pigeon pour montrer sont $n + 1$ termes $a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_{n+1}}$ avec $i_{k_1} = i_{k_2} = \cdots = i_{k_{n+1}}$, où $1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_{n+1}$.

b) Montrer que $a_{k_j} > a_{k_{j+1}}$ pour $j = 1, 2, \ldots, n$. [*Indice:* Assupposons que $a_{k_j} < a_{k_{j+1}}$, et montrent que cela implique que $i_{k_j} > i_{k_{j+1}}$, ce qui est une contradiction.]

c) Utilisez les parties (a) et (b) pour montrer que s'il n'y a pas sous-séquence de longueur $n + 1$, alors il doit y avoir une sous-séquence décroissante de cette longueur.

Permutations et combinaisons

introduction

De nombreux problèmes de comptage peuvent être résolus en trouvant le nombre de façons d'organiser un nombre d'éléments distincts d'un ensemble d'une taille particulière, où l'ordre de ces éléments importe. De nombreux autres problèmes de comptage peuvent être résolus en trouvant le nombre de façons de sélectionner un nombre particulier d'éléments d'un ensemble d'une taille particulière, où l'ordre des éléments sélectionné n'a pas d'importance. Par exemple, de combien de façons pouvons-nous sélectionner trois étudiants un groupe de cinq étudiants pour faire la queue pour une photo?Combien de comités différents de trois les étudiants peuvent être formés à partir d'un groupe de quatre étudiants?Dans cette section, nous développerons des méthodes pour répondre à de telles questions.

Permutations

Nous commençons par résoudre la première question posée dans l'introduction de cette section, ainsi que les des questions.

EXEMPLE 1 De combien de façons pouvons-nous sélectionner trois étudiants dans un groupe de cinq étudiants pour Une image? De combien de façons pouvons-nous organiser ces cinq étudiants en ligne pour une photo?

Solution: Tout d'abord, notez que l'ordre dans lequel nous sélectionnons les étudiants est important. Il y a cinq façons pour sélectionner le premier élève à se tenir au début de la ligne.Une fois cet étudiant sélectionné, il existe quatre façons de sélectionner le deuxième élève de la ligne.Après les premier et deuxième étudiants ont été sélectionnés, il existe trois façons de sélectionner le troisième élève de la lignePar le produit règle, il y a $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ façons de sélectionner trois étudiants parmi un groupe de cinq étudiants en ligne pour une photo.

Pour organiser les cinq étudiants en ligne pour une image, nous sélectionnons le premier étudiant de cinq façons, le deuxième de quatre façons, le troisième de trois façons, le quatrième de deux façons et le cinquième en un façon. Par conséquent, il existe $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ façons d’organiser les cinq élèves en ligne pour Une image. ▲

L'exemple 1 illustre comment les arrangements ordonnés d'objets distincts peuvent être comptés.Cela conduit à une certaine terminologie.

Une **permutation** d'un ensemble d'objets distincts est une disposition ordonnée de ces objets. Nous nous intéressons également aux arrangements ordonnés de certains éléments d'un ensemble.Un ordre la disposition des r éléments d'un ensemble est appelée ***r*- permutation** .

EXEMPLE 2 Soit $S = \{1, 2, 3\}$. L'agencement ordonné 3, 1, 2 est une permutation de S. L'arrangement ordonné 3, la figure 2 est un 2-permutation de S. ▲

Le nombre de r- permutations d'un ensemble avec n éléments est noté $P(n, r)$. Nous pouvons trouver $P(n, r)$ en utilisant la règle du produit.

EXEMPLE 3 Soit $S = \{a, b, c\}$. Les 2 permutations de S sont les arrangements ordonnés a, b ; a, c ; b, a ; b, c ; c, a ; et c, b. Par conséquent, il y a six 2 permutations de cet ensemble avec trois éléments. Il y a toujours six permutations à 2 d'un ensemble à trois éléments. Là sont trois façons de choisir le premier élément de l'arrangement. Il existe deux façons de choisir deuxième élément de l'arrangement, car il doit être différent du premier élément. Par conséquent, par la règle du produit, nous voyons que $P(3, 2) = 3 \cdot 2 = 6$. le premier élément. Par la règle du produit, il s'ensuit que $P(3, 2) = 3 \cdot 2 = 6$. ▲

Nous utilisons maintenant la règle du produit pour trouver une formule pour $P(n, r)$ chaque fois que n et r sont des entiers positifs avec $1 \leq r \leq n$.

THÉORÈME 1 Si n est un entier positif et r est un entier avec $1 \leq r \leq n$, alors il y a

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

r- permutations d'un ensemble avec n éléments distincts.

Preuve: Nous utiliserons la règle du produit pour prouver que cette formule est correcte. Le premier élément du la permutation peut être choisie de n façons car il y a n éléments dans l'ensemble. Il y a $n - 1$ façons de choisir le deuxième élément de la permutation, car il reste $n - 1$ éléments dans l'ensemble après avoir utilisé l'élément choisi pour la première position. De même, il existe $n - 2$ façons pour choisir le troisième élément, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'il y ait exactement $n - (r - 1) = n - r + 1$ façons de choisissez le r e élément. Par conséquent, selon la règle du produit, il existe

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

r- permutations de l'ensemble.

Notez que $P(n, 0) = 1$ chaque fois que n est un entier non négatif car il y en a exactement un façon de commander zéro éléments. Autrement dit, il y a exactement une liste sans éléments, à savoir la liste vide.

Nous énonçons maintenant un corollaire utile du théorème 1.

COROLLARY 1 Si n et r sont des entiers avec $0 \leq r \leq n$, alors $P(n, r) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$.

Preuve: Lorsque n et r sont des entiers avec $1 \leq r \leq n$, par le théorème 1 nous avons

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Car $\dfrac{n!}{(n-0)!} = \dfrac{n!}{n!} = 1$ chaque fois que n est un entier non négatif, nous voyons que la formule $P(n, r) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ est également valable lorsque $r = 0$.

Par le théorème 1, nous savons que si n est un entier positif, alors $P(n, n) = n!$. Nous illustrerons ce résultat avec quelques exemples.

EXEMPLE 4 De combien de façons existe-t-il pour sélectionner un gagnant du premier prix, un gagnant du deuxième prix et un troisième prix gagnant de 100 personnes différentes qui ont participé à un concours?

Solution: Parce qu'il importe quelle personne remporte quel prix, le nombre de façons de choisir le trois gagnants est le nombre de sélections commandées de trois éléments parmi un ensemble de 100 éléments, c'est-à-dire le nombre de 3 permutations d'un ensemble de 100 éléments.Par conséquent, le la réponse est

$$P(100, 3) = 100 \cdot 99 \cdot 98 = 970, 200.$$

▲

EXEMPLE 5 Supposons qu'il y ait huit coureurs dans une course. Le vainqueur reçoit une médaille d'or, le deuxième le finisseur en place reçoit une médaille d'argent, et le troisième finisseur reçoit une médaille de bronze.Comment il existe de nombreuses façons d'attribuer ces médailles, si tous les résultats possibles de la course se produire et il n'y a pas de liens?

Solution: Le nombre de façons différentes d'attribuer les médailles est le nombre de 3 permutations d'un ensemble à huit éléments. Par conséquent, il existe $P(8, 3) = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ façons possibles d'attribuer les médailles. ▲

EXEMPLE 6 Supposons qu'une vendeuse doive visiter huit villes différentes.Elle doit commencer son voyage dans un ville, mais elle peut visiter les sept autres villes dans l'ordre qu'elle souhaite.Combien de commandes possibles la vendeuse peut-elle utiliser pour visiter ces villes?

Solution: Le nombre de chemins possibles entre les villes est le nombre de permutations de sept éléments, car la première ville est déterminée, mais les sept autres peuvent être commandés arbitrairement. Par conséquent, il y en a $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$ voies pour la vendeuse de choisir sa tournée. Si, par exemple, la vendeuse souhaite trouver le chemin entre les villes avec une distance minimale, et elle calcule la distance totale pour chaque chemin possible, elle doit considérez un total de 5040 chemins! ▲

EXEMPLE 7 Combien de permutations des lettres *ABCDEFGH* contiennent la chaîne *ABC* ?

Solution: Parce que les lettres *ABC* doivent apparaître comme un bloc, nous pouvons trouver la réponse en trouvant le nombre de permutations de six objets, à savoir le bloc *ABC* et les lettres individuelles D, E, F, G, et H. Parce que ces six objets peuvent apparaître dans n'importe quel ordre, il y en a $6! = 720$ permutations des lettres *ABCDEFGH* dans lesquelles *ABC* apparaît comme un bloc. ▲

Combinaisons

Nous tournons maintenant notre attention vers le comptage des sélections non ordonnées d'objets.Nous commençons par résoudre un question posée dans l'introduction de cette section du chapitre.

EXEMPLE 8 Combien de comités différents de trois étudiants peuvent être formés à partir d'un groupe de quatre étudiants?

Solution: pour répondre à cette question, il suffit de trouver le nombre de sous-ensembles à trois éléments de l'ensemble contenant les quatre étudiants.Nous voyons qu'il existe quatre sous-ensembles de ce type, un pour chacun des quatre étudiants, car le choix de trois étudiants revient à choisir l'un des quatre étudiants à exclure du groupe.Cela signifie qu'il existe quatre façons de choisir trois étudiants pour le comité, où l'ordre dans lequel ces étudiants sont choisis ne correspond pas matière. ▲

L'exemple 8 montre que de nombreux problèmes de comptage peuvent être résolus en trouvant le nombre de sous-ensembles d'une taille particulière d'un ensemble avec n éléments, où n est un entier positif.

Une ***r*- combinaison** d'éléments d'un ensemble est une sélection non ordonnée d'éléments r de l'ensemble. Ainsi, une combinaison r est simplement un sous-ensemble de l'ensemble avec r éléments.

EXEMPLE 9 Soit S l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$. Ensuite, $\{1, 3, 4\}$ est un 3-combinaison de S. (Notez que $\{4, 1, 3\}$ est le même combinaison de 3 que $\{1, 3, 4\}$, car l'ordre dans lequel les éléments d'un ensemble sont répertoriés ne pas important.) ▲

Le nombre de r -combinaisons d'un ensemble avec n éléments distincts est noté $C(n, r)$. Remarque que $C(n, r)$ est également désigné par $\binom{n}{r}$ et est appelé un **coefficient binomial** . Nous apprendrons où cette terminologie provient de la section 6.4.

EXEMPLE 10 On voit que $C(4, 2) = 6$, car les 2 combinaisons de $\{a, b, c, d\}$ sont les six sous-ensembles $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$ et $\{c, d\}$. ▲

Nous pouvons déterminer le nombre de r -combinaisons d'un ensemble avec n éléments en utilisant la formule pour le nombre de r- permutations d'un ensemble. Pour ce faire, notez que les r- permutations d'un ensemble peuvent être obtenu en formant d'abord des combinaisons r puis en ordonnant les éléments dans ces combinaisons. La preuve du théorème 2, qui donne la valeur de $C(n, r)$, est basée sur cette observation.

THÉORÈME 2 Le nombre de r -combinaisons d'un ensemble avec n éléments, où n est un entier non négatif et r est un entier avec $0 \leq r \leq n$, égal à

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}.$$

Preuve: Les permutations $P(n, r)$ r de l'ensemble peuvent être obtenues en formant le $C(n, r)$ r -combinaisons de l'ensemble, puis ordonner les éléments dans chaque r -combinaison, qui peut être fait de façon $P(r, r)$. Par conséquent, selon la règle du produit,

$$P(n, r) = C(n, r) \cdot P(r, r).$$

Ceci implique que

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{P(r, r)} = \frac{n!/(n-r)!}{r!/(r-r)!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}.$$

Nous pouvons également utiliser la règle de division pour compter pour construire une preuve de ce théorème.Parce que le l'ordre des éléments dans une combinaison n'a pas d'importance et il existe $P(r, r)$ façons de *ranger les* éléments dans une r- combinaison de n éléments, chacune des $C(n, r)$ r- combinaisons d'un ensemble avec n éléments correspond exactement à $P(r, r)$ r- permutations. Par conséquent, selon la règle de division, $C(n, r) = \frac{P(n, r)}{P(r, r)}$, ce qui implique comme précédemment que $C(n, r) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$.

La formule du théorème 2, bien qu'explicite, n'est pas utile lorsque $C(n, r)$ est calculé pour grandes valeurs de n et r. Les raisons en sont qu'il est pratique de calculer les valeurs exactes des factorielles exactement uniquement pour les petites valeurs entières, et lorsque l'arithmétique à virgule flottante est utilisée, la formule Le théorème 2 peut produire une valeur qui n'est pas un entier.Lors du calcul de $C(n, r)$, notez d'abord que quand nous annulons $(n - r)!$ à partir du numérateur et du dénominateur de l'expression pour $C(n, r)$ dans le théorème 2, on obtient

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}.$$

Par conséquent, pour calculer $C(n, r)$, vous pouvez annuler tous les termes de la plus grande factorielle dans le dénominateur du numérateur et du dénominateur, puis multipliez tous les termes qui n'annulent pas dans le numérateur et enfin diviser par la plus petite factorielle dans le dénominateur.[En faisant ce calcul à la main, plutôt qu'à la machine, il est également utile de tenir compte des facteurs dans le numérateur $n(n-1)\cdots(n-r+1)$ et dans le dénominateur $r!$.] Notez que beaucoup les calculatrices ont une fonction intégrée pour $C(n, r)$ qui peut être utilisée pour des valeurs relativement petites de n et r et de nombreux programmes de calcul peuvent être utilisés pour trouver $C(n, r)$. [Ces fonctions peuvent être appelé *choisir* (n, k) ou *binom* (n, k))].

L'exemple 11 illustre comment $C(n, k)$ est calculé lorsque k est relativement petit par rapport à n et quand k est proche de n. Il illustre également une identité clé dont jouissent les nombres $C(n, k)$.

EXEMPLE 11 Combien de mains de poker de cinq cartes peuvent être distribuées à partir d'un jeu standard de 52 cartes? Aussi, comment de nombreuses façons de sélectionner 47 cartes dans un jeu standard de 52 cartes?

Solution: parce que l'ordre dans lequel les cinq cartes sont distribuées à partir d'un jeu de 52 cartes ne importe, il y a

$$C(52, 5) = \frac{52!}{5!\,47!}$$

différentes mains de cinq cartes qui peuvent être distribuées.Pour calculer la valeur de $C(52, 5)$, divisez d'abord le numérateur et dénominateur par 47! obtenir

$$C(52, 5) = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}.$$

Cette expression peut être simplifiée en divisant d'abord le facteur 5 du dénominateur par le facteur 50 dans le numérateur pour obtenir un facteur 10 dans le numérateur, puis en divisant le facteur 4 dans le dénominateur dans le facteur 48 au numérateur pour obtenir un facteur de 12 au numérateur, puis diviser le facteur 3 du dénominateur par le facteur 51 du numérateur pour obtenir un facteur de 17 au numérateur, et enfin, en divisant le facteur 2 du dénominateur par le facteur 52 en le numérateur pour obtenir un facteur de 26 au numérateur.Nous constatons que

$$C(52, 5) = 26 \cdot 17 \cdot 10 \cdot 49 \cdot 12 = 2,598,960.$$

Par conséquent, 2 598 960 mains de poker différentes de cinq cartes peuvent être distribuées jeu standard de 52 cartes.

Notez qu'il existe

$$C(52, 47) = \frac{52!}{47!\,5!}$$

différentes façons de sélectionner 47 cartes dans un jeu standard de 52 cartes.Nous n'avons pas besoin de calculer cette valeur car $C(52, 47) = C(52, 5)$. (Seul l'ordre des facteurs 5! Et 47! Est différent dans les dénominateurs des formules de ces quantités.) Il s'ensuit qu'il y a également 2 598 960 différentes façons de sélectionner 47 cartes dans un jeu standard de 52 cartes. ▲

Dans l'exemple 11, nous avons observé que $C(52, 5) = C(52, 47)$. Ceci est un cas particulier de l'utile identité pour le nombre de combinaisons r d'un ensemble donné dans le corollaire 2.

COROLLARY 2 Soit n et r des entiers non négatifs avec $r \le n$. Alors $C(n, r) = C(n, n - r)$.

Preuve: du théorème 2, il s'ensuit que

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

et

$$C(n, n-r) = \frac{n!}{(n-r)![n-(n-r)]!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}.$$

Par conséquent, $C(n, r) = C(n, n - r)$.

Nous pouvons également prouver le corollaire 2 sans compter sur la manipulation algébrique.Au lieu de cela, nous pouvons utiliser une preuve combinatoire. Nous décrivons ce type important de preuve dans la définition 1.

DÉFINITION 1 Une *preuve combinatoire* d'une identité est une preuve qui utilise des arguments de comptage pour prouver que les deux côtés de l'identité comptent les mêmes objets mais de manières différentes ou une preuve basée sur en montrant qu'il y a une bijection entre les ensembles d'objets comptés par les deux côtés de l'identité. Ces deux types de preuves sont appelées*preuves à double comptage* et *preuves bijectives*, respectivement.

De nombreuses identités impliquant des coefficients binomiaux peuvent être prouvées à l'aide de preuves combinatoires.nous montrer maintenant comment prouver le corollaire 2 en utilisant une preuve combinatoire.Nous fournirons à la fois un double une preuve de comptage et une preuve bijective, toutes deux basées sur la même idée de base.

Preuves combinatoires sont presque toujours beaucoup plus court et fournir plus des idées que des preuves basé sur l'algèbre manipulation.

Preuve: Nous utiliserons une preuve bijective pour montrer que $C(n, r) = C(n, n - r)$ pour tous les entiers n et r avec $0 \le r \le n$. Supposons que S soit un ensemble avec n éléments. La fonction qui mappe un sous-ensemble A de S à $\bar{A}$ est une bijection entre des sous-ensembles de$S$ avec r éléments et des sous-ensembles avec$n - r$ éléments (comme le lecteur devrait vérifier). L'identité $C(n, r) = C(n, n - r)$ suit parce que lorsqu'il y a est une bijection entre deux ensembles finis, les deux ensembles doivent avoir le même nombre d'éléments.

Alternativement, nous pouvons reformuler cet argument comme une preuve de double comptage.Par définition, le nombre de sous-ensembles de$S$ avec r éléments est égal à $C(n, r)$. Mais chaque sous-ensemble A de S est également déterminée en spécifiant les éléments ne sont pas dans$A$, et sont donc en$\bar{A}$. Parce que le complément d'un sous-ensemble de S avec r éléments a $n - r$ éléments, il y a aussi $C(n, n - r)$ sous-ensembles de S

avec des éléments *r* . Il s'ensuit que $C(n, r) = C(n, n - r)$.

EXEMPLE 12 De combien de façons existe-t-il pour sélectionner cinq joueurs d'une équipe de 10 joueurs de tennis un match dans une autre école?

Solution: La réponse est donnée par le nombre de 5 combinaisons d'un ensemble de 10 éléments.Par Théorème 2, le nombre de ces combinaisons est

$$C(10, 5) = \frac{\text{dix!}}{5!\,5!} = 252 .$$

▲

EXEMPLE 13 Un groupe de 30 personnes a été formé comme astronautes pour effectuer la première mission vers Mars.Comment il existe de nombreuses façons de sélectionner un équipage de six personnes pour cette mission (en supposant que membres ont le même emploi)?

Solution: Le nombre de façons de sélectionner un équipage de six personnes dans le groupe de 30 personnes est le nombre de 6 combinaisons d'un ensemble de 30 éléments, car l'ordre dans lequel ces personnes sont choisies n'a pas d'importance. D'après le théorème 2, le nombre de ces combinaisons est

$$C(30, 6) = \frac{30!}{6!\,24!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 593 , 775 .$$

▲

EXEMPLE 14 Combien de chaînes de bits de longueur *n* contiennent exactement *r* 1s?

Solution: les positions de *r* 1s dans une chaîne de bits de longueur *n* forment une *r*- combinaison de l'ensemble $\{1, 2, 3, ..., n\}$. Par conséquent, il existe des chaînes de bits $C(n, r)$ de longueur *n* qui contiennent exactement *r* 1. ▲

EXEMPLE 15 Supposons qu'il y ait 9 professeurs dans le département de mathématiques et 11 dans l'ordinateur département des sciences. Combien de façons existe-t-il pour sélectionner un comité pour développer un cours de mathématiques dans une école si le comité doit être composé de trois membres du corps professoral de la département de mathématiques et quatre du département d'informatique?

Solution: selon la règle du produit, la réponse est le produit du nombre de 3 combinaisons de un ensemble avec neuf éléments et le nombre de 4 combinaisons d'un ensemble avec 11 éléments.Par Théorème 2, le nombre de façons de sélectionner le comité est

$$C(9, 3) \cdot C(11, 4) = \frac{9!}{3!\,6!} \cdot \frac{11!}{4!\,7!} = 84 \cdot 330 = 27,\ 720 .$$

▲

Des exercices

1. Énumérez toutes les permutations de $\{ a, b, c \}$.

2. Combien de permutations différentes y a-t-il dans l'ensemble

12. Combien de chaînes de bits de longueur 12 contiennent

a) exactement trois 1?

{ a, b, c, d, e, f, g }?

3. Combien de permutations de { a, b, c, d, e, f, g } se terminent par *un* ?

4. Soit S = {1 , 2 , 3 , 4 , 5}.

a) Liste tous les 3 permutations de S .
b) Liste tous les 3 combinaisons de S .

5. Trouvez la valeur de chacune de ces quantités.

a) $P(6, 3)$ **b)** $P(6, 5)$
c) $P(8, 1)$ **d)** $P(8, 5)$
e) $P(8, 8)$ **f)** $P(10, 9)$

6. Trouvez la valeur de chacune de ces quantités.

a) $C(5, 1)$ **b)** $C(5, 3)$
c) $C(8, 4)$ **d)** $C(8, 8)$
e) $C(8, 0)$ **f)** $C(12, 6)$

7. Trouvez le nombre de 5 permutations d'un ensemble de neuf el- ements.

8. Dans combien d'ordres différents cinq coureurs peuvent-ils terminer un course si aucune égalité n'est autorisée?

9. Combien de possibilités existe-t-il pour la victoire, la place et afficher (première, deuxième et troisième) positions dans une course de chevaux avec 12 chevaux si tous les ordres d'arrivée sont possibles?

10. Il y a six candidats différents pour le poste de gouverneur d'un État. Dans combien d'ordres différents les noms des les documents doivent-ils être imprimés sur un bulletin de vote?

11. Combien de chaînes de bits de longueur 10 contiennent

a) exactement quatre 1?
b) au plus quatre 1?
c) au moins quatre 1?
d) un nombre égal de 0 et de 1?

b) au plus trois 1?
c) au moins trois 1?
d) un nombre égal de 0 et de 1?

13. Un groupe comprend n hommes et n femmes. Combien de façons sont là pour organiser ces gens dans une rangée si les hommes et les femmes alternent?

14. De combien de façons un ensemble de deux entiers positifs peut-il que 100 soient choisis?

15. De combien de façons un ensemble de cinq lettres peut-il être sélectionné de l'alphabet anglais?

16. Combien de sous-ensembles avec un nombre impair d'éléments un ensemble avec 10 éléments ont?

17. Combien de sous-ensembles de plus de deux éléments un ensemble avec 100 éléments ont?

18. Une pièce est lancée huit fois où chaque flip arrive têtes ou queues. Combien de résultats possibles

a) y en a-t-il au total?
b) contient exactement trois têtes?
c) contient au moins trois têtes?
d) contiennent le même nombre de têtes et de queues?

19. Une pièce est retournée 10 fois où chaque flip arrive soit Pile ou face. Combien de résultats possibles

a) y en a-t-il au total?
b) contient exactement deux têtes?
c) contient au plus trois queues?
d) contiennent le même nombre de têtes et de queues?

20. Combien de chaînes de bits de longueur 10 ont

a) exactement trois 0?
b) plus de 0 que de 1?
c) au moins sept 1?
d) au moins trois 1?

21. Combien de permutations des lettres *ABCDEFG* con- tain

a) la chaîne *BCD* ?
b) la chaîne *CFGA* ?
c) les cordes *BA* et *GF* ?
d) les chaînes *ABC* et *DE* ?
e) les chaînes *ABC* et *CDE* ?
f) les chaînes *CBA* et *BED* ?

22. Combien de permutations des lettres *ABCDEFGH* con- tain

a) la chaîne *ED* ?
b) la chaîne *CDE* ?
c) les cordes *BA* et *FGH* ?
d) les chaînes *AB* , *DE* et *GH* ?
e) les chaînes *CAB* et *BED* ?
f) les chaînes *BCA* et *ABF* ?

23. Combien de moyens existe-t-il pour huit hommes et cinq femmes de se tenir en ligne de sorte qu'il n'y ait pas deux femmes à côté de chaque

28. Un professeur écrit 40 mathématiques discrètes vrai / faux des questions. Parmi les déclarations de ces questions, 17 sont vrai. Si les questions peuvent être positionnées dans n'importe quel ordre, comment de nombreuses réponses différentes sont-elles possibles?

∗ **29.** Combien de 4 permutations des entiers positifs non ex- ceeding 100 contient trois entiers consécutifs k , $k+1$, $k+2$, dans le bon ordre

a) où ces entiers consécutifs peuvent peut-être être séparés provoquée par d'autres entiers dans la permutation?

b) lorsqu'ils occupent des positions consécutives dans le tation?

30. Sept femmes et neuf hommes font partie du corps professoral département de mathématiques dans une école.

a) De combien de façons existe-t-il pour sélectionner un comité cinq membres du département si au moins une femme doit faire partie du comité?

b) De combien de façons existe-t-il pour sélectionner un comité autre? [*Indice:* positionnez d'abord les hommes, puis considérez positions possibles pour les femmes.]

24. Combien de façons existe-t-il pour 10 femmes et six hommes de se tenir en ligne de sorte qu'il n'y ait pas deux hommes à côté de chacun autre? [*Indice:* positionnez d'abord les femmes, puis considérez positions possibles pour les hommes.]

25. Cent billets, numérotés 1 , 2 , 3 , ..., 100, sont vendus à 100 personnes différentes pour un dessin. Quatre prix différents sont décernés, dont un grand prix (un voyage à Tahiti). Comment il existe de nombreuses façons d'attribuer les prix si

a) il n'y a pas de restrictions?
b) la personne qui détient le billet 47 remporte le grand prix?
c) la personne détenant le billet 47 remporte l'un des prix?
d) la personne qui détient le billet 47 ne gagne pas de prix?
e) les détenteurs des billets 19 et 47 gagnent-ils tous deux des prix?
f) les détenteurs des billets 19, 47 et 73 gagnent tous prix?
g) les détenteurs des billets 19, 47, 73 et 97 gagnent tous prix?
h) aucune des personnes détenant des billets 19, 47, 73 et 97 gagne un prix?
i) le gagnant du grand prix est une personne détenant un billet 19, 47, 73 ou 97?
j) les détenteurs des billets 19 et 47 gagnent des prix, mais les détenteurs de billets 73 et 97 ne gagnent pas de prix?

26. Treize personnes dans une équipe de softball se présentent pour un match.

a) Combien y a-t-il de façons de choisir 10 joueurs à prendre le champ?
b) De combien de façons existe-t-il pour attribuer les 10 postes en sélectionnant des joueurs parmi les 13 personnes qui se présentent?
c) Sur les 13 personnes qui se présentent, trois sont des femmes. Comment il existe de nombreuses façons de choisir 10 joueurs pour terrain si au moins un de ces joueurs doit être une femme?

27. Un club compte 25 membres.

a) De combien de façons existe-t-il pour choisir quatre membres le club pour faire partie d'un comité exécutif?
b) De combien de façons existe-t-il pour choisir un président, un vice président, secrétaire et trésorier du club, où personne ne peut occuper plus d'un poste?

cinq membres du département si au moins une femme et au moins un homme doit faire partie du comité?

31. L'alphabet anglais contient 21 consonnes et cinq les voyelles. Combien de chaînes de six lettres minuscules du L'alphabet anglais contient

a) exactement une voyelle?
b) exactement deux voyelles?
c) au moins une voyelle?
d) au moins deux voyelles?

32. Combien de chaînes de six lettres minuscules de l'En- alphabet glish contiennent

a) la lettre *a* ?
b) les lettres *a* et *b* ?
c) les lettres *a* et *b* dans des positions consécutives avec *un* *b* précédent , avec toutes les lettres distinctes?
d) les lettres *a* et *b* , où *a* est quelque part à gauche de *b* dans la chaîne, avec toutes les lettres distinctes?

33. Supposons qu'un département compte 10 hommes et 15 femmes. Combien de façons existe-t-il pour former un avec six membres s'il doit avoir le même nombre de hommes et femmes?

34. Supposons qu'un département compte 10 hommes et 15 femmes. Combien de façons existe-t-il pour former un avec six membres s'il doit y avoir plus de femmes que Hommes?

35. Combien de chaînes de bits contiennent exactement huit 0 et 10 1 si chaque 0 doit être immédiatement suivi d'un 1?

36. Combien de chaînes de bits contiennent exactement cinq 0 et 14 1 si chaque 0 doit être immédiatement suivi de deux 1?

37. Combien de chaînes de bits de longueur 10 contiennent au moins trois 1 et au moins trois 0?

38. De combien de manières existe-t-il pour sélectionner 12 pays Organisation des Nations Unies siégeant à un conseil si 3 sont sélectionnés parmi un bloc de 45, 4 sont sélectionnés dans un bloc de 57, et les autres sont sélectionnés parmi les 69 pays restants?

39. Combien de plaques d'immatriculation composées de trois lettres abaissé de trois chiffres ne contient aucune lettre ou chiffre deux fois?

Une ***r*** **- permutation circulaire de *n*** personnes est un siège de *r* de ces *n* personnes autour d'une table circulaire, où les sièges sont considérés comme identiques s'ils peuvent être obtenus les uns des autres en tournant la table.

40. Trouvez le nombre de 3 permutations circulaires de 5 personnes.

41. Trouver une formule pour le nombre de *r*- permutations circulaires de *n* personnes.

42. Trouver une formule pour le nombre de façons de placer *r* de *n* personnes

médailles, et le ou les coureurs qui terminent exactement deux coureurs devant reçoivent des médailles de bronze.)

∗ 46. Cette procédure est utilisée pour rompre les égalités dans les matchs du championnat.

tour pionnier du tournoi de football de la Coupe du monde. Chaque l'équipe sélectionne cinq joueurs dans un ordre prescrit. Chacun des ces joueurs prennent un coup de pied de pénalité, avec un joueur de la première équipe suivie d'un joueur de la deuxième équipe et ainsi de suite, en suivant l'ordre des joueurs spécifié. Si le score est toujours à égalité à la fin des 10 tirs au but, cette procédure la procédure est répétée. Si le score est toujours à égalité après 20 pénalités coups de pied, une fusillade de mort subite se produit, avec la première équipe

autour d'une table circulaire, où les sièges sont considérés
même si chaque personne a les mêmes deux voisins sans
de quel côté ces voisins sont assis.

43. Combien de façons existe-t-il pour une course de chevaux avec trois des chevaux à finir si des attaches sont possibles? [*Remarque:* deux ou trois les chevaux peuvent attacher.]

∗ **44.** Combien de façons existe-t-il pour une course de chevaux avec quatre chevaux terminer si des liens sont possibles? [*Remarque:* N'importe quel nombre de quatre chevaux peuvent être à égalité.)

∗ **45.** Il y a six coureurs dans le tableau de bord des 100 verges. Combien il y a moyen de décerner trois médailles en cas d'égalité sont possibles? (Le ou les coureurs qui terminent avec le meilleur temps recevoir des médailles d'or, le ou les coureurs qui terminent avec exactement un coureur devant eux reçoivent de l'argent marquer un but sans réponse victorieux.

a) Combien de scénarios de notation différents sont possibles si le match est réglé au premier tour de pénalité de 10 coups de pied, où le tour se termine une fois qu'il est impossible pour une équipe pour égaler le nombre de buts marqués par le autre équipe?

b) Combien de scénarios de notation différents pour le premier et deuxièmes groupes de tirs au but sont possibles si le jeu est réglé au deuxième tour de pénalité de 10 coups de pied?

c) Combien de scénarios de notation sont possibles pour ensemble de coups de pied de pénalité si le jeu est réglé sans plus de 10 coups de pied supplémentaires au total après les deux cinq coups de pied pour chaque équipe?

Coefficients et identités binomiaux

Comme nous l'avons remarqué à la section 6.3, le nombre de combinaisons *r* d'un ensemble avec *n* éléments est souvent désigné par $\binom{n}{r}$. Ce nombre est également appelé **coefficient binomial** car ces nombres se produisent sous forme de coefficients dans l'expansion des puissances d'expressions binomiales telles que $(a+b)^n$. Nous discutera du **théorème binomial** , qui donne la puissance d'une expression binomiale comme une somme de termes impliquant des coefficients binomiaux. Nous prouverons ce théorème en utilisant une preuve combinatoire. Nous montrerons également comment les preuves combinatoires peuvent être utilisées pour établir certaines des nombreuses identités qui expriment des relations entre les coefficients binomiaux.

Le théorème binomial

Le théorème binomial donne les coefficients de l'expansion des puissances des expressions binomiales. Une expression **binomiale** est simplement la somme de deux termes, tels que $x + y$. (Les termes peuvent être des produits de constantes et de variables, mais cela ne nous concerne pas ici.)

L'exemple 1 illustre comment les coefficients d'une expansion typique peuvent être trouvés et prépare nous pour l'énoncé du théorème binomial.

EXEMPLE 1 L'expansion de $(x+y)^3$ peut être trouvée en utilisant le raisonnement combinatoire au lieu de multiplier les trois termes sur. Lorsque $(x+y)^3 = (x+y)(x+y)(x+y)$ est développé, tous les produits d'un terme dans la première somme, un terme dans la deuxième somme et un terme dans la troisième somme sont ajoutés. Conditions de les formes x^3 , x^2y , xy^2 et y^3 apparaissent. Pour obtenir un terme de la forme x^3 , un x doit être choisi dans chacune des sommes, et cela ne peut se faire que d'une seule façon. Ainsi, le terme x^3 dans le produit a un coefficient de 1. Pour obtenir un terme de la forme x^2y , un x doit être choisi dans deux des trois des sommes (et par conséquent un y dans l'autre somme). Par conséquent, le nombre de ces termes est le nombre de 2 combinaisons de trois objets, à savoir, $\binom{3}{2}$. De même, le nombre de termes du formulaire xy^2 est le nombre de façons de choisir l'une des trois sommes pour obtenir un x (et par conséquent prendre un y

de chacune des deux autres sommes). Cela peut être fait en $\binom{3}{1}$ façons. Enfin, le seul moyen d'obtenir un terme y^3 consiste à choisir le y pour chacune des trois sommes du produit, ce qui peut être fait en exactement dans un sens. Par conséquent, il s'ensuit que

$$(x+y)^3 = (x+y)(x+y)(x+y) = (xx+xy+yx+yy)(x+y)$$
$$= xxx+xxy+xyx+xyy+yxx+yxy+yyx+yyy$$
$$= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 .$$ ▲

Nous énonçons maintenant le théorème binomial.

THÉORÈME 1 **LE THÉORÈME BINOMIAL** Soit x et y *des* variables, et soit n un entier non négatif. alors

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \cdots + \binom{n}{n-1} xy^{n-1} + \binom{n}{n} y^n .$$

Preuve: Nous utilisons une preuve combinatoire. Les termes du produit lors de son expansion sont de la forme $x^{n-j} y^j$ pour $j = 0, 1, 2, ..., n$. Compter le nombre de termes de la forme $x^{n-j} y^j$, notons que pour obtenir un tel terme il faut choisir $n-j$ x s parmi les n sommes (pour que le les autres termes j du produit sont y s). Par conséquent, le coefficient de $x^{n-j} y^j$ est $\binom{n}{n-j}$, lequel est égal à $\binom{n}{j}$. Cela prouve le théorème.

Certaines utilisations informatiques du théorème binomial sont illustrées dans les exemples 2 à 4.

EXEMPLE 2 Quelle est l'expansion de $(x+y)^4$?

Solution: du théorème binomial, il s'ensuit que

$$(x+y)^4 = \sum_{j=0}^{4} \binom{4}{j} x^{4-j} y^j$$
$$= \binom{4}{0} x^4 + \binom{4}{1} x^3 y + \binom{4}{2} x^2 y^2 + \binom{4}{3} xy^3 + \binom{4}{4} y^4$$
$$= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 .$$ ▲

EXEMPLE 3 Quel est le coefficient de $x^{12} y^{13}$ dans l'expansion de $(x+y)^{25}$?

Solution: du théorème binomial, il s'ensuit que ce coefficient est

$$\binom{25}{13} = \frac{25!}{13!\,12!} = 5,200,300 .$$ ▲

EXEMPLE 4 Quel est le coefficient de $x^{12} y^{13}$ dans l'expansion de $(2x-3y)^{25}$?

Solution: Tout d'abord, notez que cette expression est égale à $(2x+(-3y))^{25}$. Par le théorème binomial, nous avoir

$$(2x+(-3y))^{25} = \sum_{j=0}^{25} \binom{25}{j} (2x)^{25-j} (-3y)^j .$$

Par conséquent, le coefficient de $x^{12}y^{13}$ dans l'expansion est obtenu lorsque $j = 13$, à savoir,

$$\binom{25}{13} 2^{12}(-3)^{13} = -\frac{25!}{13!\,12!} 2^{12} 3^{13}.$$

▲

Nous pouvons prouver quelques identités utiles en utilisant le théorème binomial, comme les corollaires 1, 2 et 3 démontrer.

COROLLARY 1 Soit n un entier non négatif. alors

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Preuve: En utilisant le théorème binomial avec $x = 1$ et $y = 1$, nous voyons que

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

C'est le résultat souhaité.

Il y a aussi une belle preuve combinatoire du Corollaire 1, que nous présentons maintenant.

Preuve: un ensemble avec n éléments a un total de 2^n sous-ensembles différents. Chaque sous-ensemble n'a aucun élément, un élément, deux éléments, ..., ou n éléments en elle. Il y a $\binom{n}{0}$ des sous-ensembles à zéro élément, $\binom{n}{1}$ sous-ensembles avec un élément, $\binom{n}{2}$ sous-ensembles à deux éléments, ..., et $\binom{n}{n}$ sous-ensembles avec n éléments. Donc,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

compte le nombre total de sous-ensembles d'un ensemble avec n éléments. En assimilant les deux formules, nous avoir pour le nombre de sous-ensembles d'un ensemble avec n éléments, nous voyons que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

COROLLARY 2 Soit n un entier positif. alors

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

Preuve: lorsque nous utilisons le théorème binomial avec $x = -1$ et $y = 1$, nous voyons que

$$0 = 0^n = ((-1)+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k.$$

Cela prouve le corollaire.

Remarque: le corollaire 2 implique que

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots .$$

COROLLARY 3 Soit n un entier non négatif. alors

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = 3^n .$$

Preuve: Nous reconnaissons que le côté gauche de cette formule est l'expansion de $(1+2)^n$ à condition de par le théorème binomial. Par conséquent, par le théorème binomial, nous voyons que

$$(1+2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 2^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k .$$

Par conséquent

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = 3^n .$$

Identité et triangle de Pascal

Les coefficients binomiaux satisfont de nombreuses identités différentes. Nous introduisons l'un des plus important de ces maintenant.

THÉORÈME 2 **IDENTITÉ DE PASCAL** Soit n et k des entiers positifs avec $n \geq k$. alors

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} .$$

Preuve: Nous utiliserons une preuve combinatoire. Supposons que T soit un ensemble contenant $n + 1$ éléments. Laisser a être un élément dans T, et soit $S = T - \{a\}$. Notez qu'il existe $\binom{n+1}{k}$ sous-ensembles de T contenant k éléments. Cependant, un sous-ensemble de T avec k éléments contient soit *un* ensemble avec $k - 1$ éléments de S, ou contient k éléments de S et ne contient pas a. Parce qu'il y a $\binom{n}{k-1}$ sous-ensembles de $k - 1$ éléments de S, il y a $\binom{n}{k-1}$ sous-ensembles de k éléments de T qui contiennent a. Et il y a $\binom{n}{k}$ sous-ensembles de k éléments de T qui ne contiennent pas a, car il y a $\binom{n}{k}$ sous-ensembles de k éléments de S. Par conséquent,

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} .$$

Remarque: Il est également possible de prouver cette identité par manipulation algébrique à partir de la formule pour $\binom{n}{r}$ (voir exercice 19).

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}$$
$$\binom{5}{0}\ \binom{5}{1}\ \binom{5}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{5}{4}\ \binom{5}{5}$$
$$\binom{6}{0}\ \binom{6}{1}\ \binom{6}{2}\ \binom{6}{3}\ \binom{6}{4}\ \binom{6}{5}\ \binom{6}{6}$$
$$\binom{7}{0}\ \binom{7}{1}\ \binom{7}{2}\ \binom{7}{3}\ \binom{7}{4}\ \binom{7}{5}\ \binom{7}{6}\ \binom{7}{\text{sept}}$$
$$\binom{8}{0}\ \binom{8}{1}\ \binom{8}{2}\ \binom{8}{3}\ \binom{8}{4}\ \binom{8}{5}\ \binom{8}{6}\ \binom{8}{\text{sept}}\ \binom{8}{8}$$
...

(une)

Par l'identité de Pascal:

$$\binom{6}{4} + \binom{6}{5} = \binom{7}{5}$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 sept 21 35 35 21 sept 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
...

b)

FIGURE 1 **Triangle de Pascal.**

Remarque: l'identité de Pascal, ainsi que les conditions initiales $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ pour tous les entiers n , peut être utilisé pour définir récursivement des coefficients binomiaux. Cette définition récursive est utile dans le calcul des coefficients binomiaux car seule l'addition, et non la multiplication, des entiers est nécessaire pour utiliser cette définition récursive.

L'identité de Pascal est la base d'un arrangement géométrique des coefficients binomiaux dans un triangle, comme le montre la figure 1.

La n ème ligne du triangle est constituée des coefficients binomiaux

$$\binom{n}{k},\ k = 0, 1, \ldots, n.$$

Ce triangle est connu sous le nom **de triangle de Pascal**. L'identité de Pascal montre que lorsque deux les coefficients binomiaux dans ce triangle sont ajoutés, le coefficient binomial dans la ligne suivante entre ces deux coefficients sont produits.

BLAISE PASCAL (1623-1662) Blaise Pascal a montré ses talents à un âge précoce, bien que son père, qui avait fait des découvertes en géométrie analytique, gardé des livres de mathématiques loin de lui pour encourager d'autres intérêts. A 16 ans, Pascal découvre un résultat important concernant les sections coniques. À 18 ans, il a conçu une machine à calculer, qu'il a construit et vendu. Pascal et Fermat ont jeté les bases de la théorie moderne des probabilités. Dans ce travail, il a fait de nouvelles découvertes concernant ce qu'on appelle aujourd'hui le triangle de Pascal. En 1654, Pascal abandonne ses recherches mathématiques pour se consacrer à la théologie. Après cela, il n'est retourné aux mathématiques qu'une seule fois. Un la nuit, distrait par un mal de dents sévère, il chercha du réconfort en étudiant les propriétés mathématiques de la cycloïde. Miraculeusement, sa douleur s'est apaisée, ce qu'il a considéré comme un signe d'approbation divine de l'étude des mathématiques.

Autres identités impliquant des coefficients binomiaux

Nous concluons cette section avec des preuves combinatoires de deux des nombreuses identités dont jouit les coefficients binomiaux.

THÉORÈME 3 **IDENTITÉ DE VANDERMONDE** Soit m , n et r des entiers non négatifs avec r non dépassant m ou n . alors

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{r-k}\binom{n}{k}.$$

Remarque: cette identité a été découverte par le mathématicien Alexandre-Théophile Vandermonde au XVIIIe siècle.

Preuve: Supposons qu'il y ait m éléments dans un ensemble et n éléments dans un second ensemble. Ensuite, le total nombre de façons de choisir r éléments de l'union de ces ensembles est $\binom{m+n}{r}$.

Une autre façon de choisir r éléments de l'union est de choisir k éléments du deuxième ensemble puis $r - k$ éléments du premier ensemble, où k est un entier avec $0 \leq k \leq r$. Parce que là sont $\binom{n}{k}$ façons de choisir k éléments du deuxième ensemble et $\binom{m}{r-k}$ façons de choisir les éléments $r - k$ à partir du premier ensemble, la règle du produit nous dit que cela peut être fait en $\binom{m}{r-k}\binom{n}{k}$ façons. D'où le le nombre total de façons de choisir r éléments de l'union est également égal à $\sum_{k=0}^{r}\binom{m}{r-k}\binom{n}{k}$.

Nous avons trouvé deux expressions pour le nombre de façons de choisir r éléments du union d'un ensemble avec m éléments et d'un ensemble avec n éléments. Leur égalisation nous donne la identité.

Le corollaire 4 découle de l'identité de Vandermonde.

COROLLARY 4 Si n est un entier non négatif, alors

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

Preuve: on utilise l'identité de Vandermonde avec $m = r = n$ pour obtenir

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

La dernière égalité a été obtenue en utilisant l'identité $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

ALEXANDRE-THÉOPHILE VANDERMONDE (1735–1796) Parce qu'Alexandre-Théophile Vandermonde était un enfant maladif, son père médecin lui a orienté vers une carrière musicale. Cependant, il a développé plus tard un intérêt pour les mathématiques. Son mathématique complète le travail consiste en quatre articles publiés en 1771–1772. Ces articles comprennent des contributions fondamentales sur les racines des équations, sur la théorie des déterminants et le problème du tour du chevalier (introduit dans les exercices de la section 10.5). L'intérêt de Vandermonde pour les mathématiques n'ont duré que 2 ans. Par la suite, il a publié des articles sur l'harmonie, les expériences avec le froid et la fabrication de l'acier. Il s'est également intéressé à la politique, rejoignant la cause de la révolution française et occupant plusieurs postes différents au sein du gouvernement.

Nous pouvons prouver les identités combinatoires en comptant les chaînes de bits avec différentes propriétés, comme la preuve du Théorème 4 le démontrera.

THÉORÈME 4 Soit n et r des entiers non négatifs avec $r \leq n$. alors

$$\binom{n+1}{r+1} = \sum_{j=r}^{n} \binom{j}{r}.$$

Preuve: Nous utilisons une preuve combinatoire. Par l'exemple 14 de la section 6.3, le côté gauche, $\binom{n+1}{r+1}$, compte les chaînes de bits de longueur $n + 1$ contenant $r + 1$ unités.

Nous montrons que le côté droit compte les mêmes objets en considérant les cas corres- répondre aux emplacements possibles du 1 final dans une chaîne avec $r + 1$ unités. Ce dernier doit se produire à la position $r + 1, r + 2, \ldots$ ou $n + 1$. De plus, si le dernier est le k ème bit, il doit être r parmi les k -1 premières positions. Par conséquent, par l'exemple 14 de la section 6.3, sont $\binom{k-1}{r}$ ces chaînes de bits. En sommant k avec $r + 1 \leq k \leq n + 1$, on trouve qu'il y a

$$\sum_{k=r+1}^{n+1} \binom{k-1}{r} = \sum_{j=r}^{n} \binom{j}{r}$$

chaînes de bits de longueur n contenant exactement $r + 1$ unités. (Notez que la dernière étape découle de la changement de variables $j = k - 1$.) Parce que le côté gauche et le côté droit comptent le mêmes objets, ils sont égaux. Ceci complète la preuve.

Des exercices

1. Trouvez l'expansion de $(x + y)^4$

a) en utilisant le raisonnement combinatoire, comme dans l'exemple 1.
b) en utilisant le théorème binomial.

2. Trouvez l'expansion de $(x + y)^5$

a) en utilisant le raisonnement combinatoire, comme dans l'exemple 1.
b) en utilisant le théorème binomial.

3. Trouvez l'expansion de $(x + y)^6$.

4. Trouvez le coefficient de $x^5 y^8$ in $(x + y)^{13}$.

5. Combien de termes y a-t-il dans l'expansion de $(x + y)^{100}$ après que des termes similaires soient collectés?

6. Quel est le coefficient de x^7 dans $(1 + x)^{11}$?

7. Quel est le coefficient de x^9 dans $(2 - x)^{19}$?

8. Quel est le coefficient de $x^8 y^9$ dans l'expansion de $(3x + 2$ ans$)^{17}$?

9. Quel est le coefficient de $x^{101} y^{99}$ dans l'expansion de $(2x - 3$ ans$)^{200}$?

∗ **10.** Donner une formule pour le coefficient de x^k dans l'expansion de $(x + 1/x)^{100}$, où k est un entier.

∗ **11.** Donner une formule pour le coefficient de x^k dans l'expansion de $(x^2 - 1/x)^{100}$, où k est un entier.

12. La rangée du triangle de Pascal contenant le co- binôme binomial efficients $\binom{10}{k}$, $0 \leq k \leq 10$, est:

1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

Utilisez l'identité de Pascal pour produire la ligne immédiatement après en descendant cette ligne dans le triangle de Pascal.

13. Quelle est la rangée du triangle de Pascal contenant le bino- coefficients miaux $\binom{9}{k}$, $0 \leq k \leq 9$?

14. Montrer que si n est un entier positif, alors $1 = \binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \cdots < \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil} > \cdots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n} = 1$.

15. Montrez que $\binom{n}{k} \leq 2^n$ pour tous les entiers positifs n et tous les tegers k avec $0 \leq k \leq n$.

16. a) Utilisez l'exercice 14 et le corollaire 1 pour montrer que si n est un entier supérieur à 1, puis $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \geq 2^n/n$.

b) conclure de la partie (a) que si n est un entier positif, ensuite $\binom{2n}{n} \geq 4^n/2n$.

17. Montrer que si n et k sont des entiers avec $1 \leq k \leq n$, alors $\binom{n}{k} \leq n^k/2^{k-1}$.

18. Supposons que b soit un entier avec $b \geq 7$. Utilisez le bino- théorème mial et la ligne appropriée du triangle de Pascal pour trouver l' expansion de base- b de $(11_b)^4$ [c'est-à-dire le quatrième puissance du nombre $(11)_b$ en notation base- b].

19. Prouver l'identité de Pascal, en utilisant la formule pour $\binom{n}{r}$.

20. Supposons que k et n sont des entiers avec $1 \leq k < n$. Prouver l' **identité hexagonale**

$$\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k+1}\binom{n+1}{k} = \binom{n-1}{k}\binom{n}{k-1}\binom{n+1}{k+1},$$

qui relie les termes du triangle de Pascal qui forment un hexagone.

21. Démontrer que si n et k sont des entiers avec $1 \leq k \leq n$, alors $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$,

a) en utilisant une preuve combinatoire. [*Indice:* montrez que les deux côtés de l'identité comptent le nombre de façons de sélectionner un sous-ensemble avec k éléments d'un ensemble avec n éléments puis un élément de ce sous-ensemble.]

b) en utilisant une preuve algébrique basée sur la formule pour $\binom{n}{r}$ donnée dans le théorème 2 de la section 6.3.

22. Prouver l'identité $\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}$, chaque fois que n, r et k sont des entiers non négatifs avec $r \leq n$ et $k \leq r$,

a) en utilisant un argument combinatoire.

b) en utilisant un argument basé sur la formule du nombre ber de r -combinaisons d'un ensemble avec n éléments.

23. Montrer que si n et k sont des entiers positifs, alors

$$\binom{n+1}{k} = (n+1)\binom{n}{k-1}\Big/ k.$$

Utilisez cette identité pour construire une définition inductive de les coefficients binomiaux.

24. Montrer que si p est un nombre premier et k est un entier tel que $1 \leq k \leq p - 1$, alors p divise $\binom{p}{k}$.

25. Soit n un entier positif. Montre CA

$$\binom{2n}{n+1} + \binom{2n}{n} = \binom{2n+2}{n+1}\Big/ 2.$$

* **26.** Soit n et k *des* entiers avec $1 \leq k \leq n$. Montre CA

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{k-1} = \binom{2n+2}{n+1}\Big/ 2 - \binom{2n}{n}.$$

* **27.** Prouver l' **identité de** la **cloche**

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{n+k}{k} = \binom{n+r+1}{r}$$

chaque fois que n et r sont des entiers positifs,

a) en utilisant un argument combinatoire.

b) utiliser l'identité de Pascal.

28. Montrer que si n est un entier positif, alors $\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$

a) en utilisant un argument combinatoire.

b) par manipulation algébrique.

* **29.** Donnez une preuve combinatoire que $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

[*Astuce:* comptez de deux façons le nombre de façons de sélectionner et de sélectionner ensuite un chef de file du comité.]

* **30.** Donnez une preuve combinatoire que $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}^2 = n\binom{2n-1}{n-1}$.

[*Astuce:* comptez de deux façons le nombre de façons de sélectionner comité, avec n membres d'un groupe de n mathé- professeurs d'ICS et n professeurs d'informatique, que le président du comité est un mathématique professeur.]

31. Montrer qu'un ensemble non vide a le même nombre de sous-ensembles avec un nombre impair d'éléments comme il le fait avec des sous-ensembles un nombre pair d'éléments.

* **32.** Démontrer le théorème binomial à l'aide d'inductions mathématiques tion.

33. Dans cet exercice, nous allons compter le nombre de chemins dans le plan xy entre l'origine (0, 0) et le point (m, n), où m et n sont des entiers non négatifs, tels que chaque chemin est composé d'une série d'étapes, où chaque étape est un mouvement l'unité vers la droite ou déplacer une unité vers le haut. (Aucun mouvement vers gauche ou vers le bas sont autorisés.) Deux de ces chemins de $(0, 0)$ à $(5, 3)$ sont illustrés ici.

(5, 3)

(0, 0)

(5, 3)

(0, 0)

a) Montrer que chaque chemin du type décrit peut être représenté ressenti par une chaîne de bits composée de m 0s et n 1s, où un 0 représente un déplacement d'une unité vers la droite et un 1 représente un déplacement d'une unité vers le haut.

b) conclure de la partie a) qu'il y a $\binom{m+n}{n}$ chemins de le type souhaité.

34. Utilisez l'exercice 33 pour donner une autre preuve du corollaire 2 à la section 6.3, qui stipule que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ chaque fois que k est un entier avec $0 \leq k \leq n$. [*Indice:* considérez le nombre des chemins du type décrit dans l'exercice 33 à partir de $(0, 0)$ à $(n - k, k)$ et de $(0, 0)$ à $(k, n - k)$.]

35. Utilisez l'exercice 33 pour prouver le théorème 4. [*Indice:* comptez le nombre de chemins avec n étapes du type décrit dans exercice 33. Chaque chemin doit se terminer à l'un des points $(n - k, k)$ pour $k = 0, 1, 2, ..., n$.]

36. Utilisez l'exercice 33 pour prouver l'identité de Pascal. [*Astuce:* Afficher qu'un chemin du type décrit dans l'exercice 33 de $(0, 0)$ à $(n + 1 - k, k)$ passe soit par $(n + 1 - k, k - 1)$ ou $(n - k, k)$, mais pas par les deux.]

37. Utilisez l'exercice 33 pour prouver l'identité du jarret Exercice 27. [*Astuce:* Tout d'abord, notez que le nombre de les chemins de $(0, 0)$ à $(n + 1, r)$ *sont* égaux $\binom{n+1+r}{r}$. Seconde- deuxièmement, compter le nombre de chemins en additionnant le nombre ber de ces chemins qui commencent par aller k unités vers le haut pour $k = 0, 1, 2, ..., r$.]

38. Donner une preuve combinatoire que si n est un entier positif ger alors $\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}$. [*Indice:* montrez que les deux côtés comptent les façons de sélectionner un sous-ensemble d'un ensemble de n éléments avec deux éléments pas nécessairement distincts de ce sous-ensemble. En outre, exprimez le côté droit comme $n(n - 1)2^{n-2} + n2^{n-1}$.]

* **39.** Déterminer une formule impliquant des coefficients binomiaux pour le n ème terme d'une séquence si ses termes initiaux sont ceux répertoriés. [*Astuce:* Regarder le triangle de Pascal sera utile.

Bien qu'une infinité de séquences commencent par un nombre spécifié ensemble de termes, chacune des listes suivantes est le début d'un séquence du type souhaité.]

a) 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66 , ...
b) 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165, 220 , ...
c) 1, 2, 6, 20, 70, 252, 924, 3432, 12870, 48620 , ...
d) 1, 1, 2, 3, 6, 10, 20, 35, 70, 126 , ...
e) 1, 1, 1, 3, 1, 5, 15, 35, 1, 9 , ...
f) 1, 3, 15, 84, 495, 3003, 18564, 116280, 735471, 4686825 , ...

Permutations et combinaisons généralisées

introduction

Dans de nombreux problèmes de comptage, les éléments peuvent être utilisés à plusieurs reprises.Par exemple, une lettre ou un chiffre peut être utilisé plus d'une fois sur une plaque d'immatriculation. Lorsqu'une douzaine de beignets sont sélectionnés, chaque variété peut être choisi à plusieurs reprises. Cela contraste avec les problèmes de comptage abordés plus haut dans le chapitre où nous avons considéré uniquement les permutations et les combinaisons dans lesquelles chaque élément pouvait être utilisé à la plupart du temps. Dans cette section, nous allons montrer comment résoudre les problèmes de comptage où les éléments peuvent être utilisé plus d'une fois.

De plus, certains problèmes de comptage impliquent des éléments indiscernables.Par exemple, pour compter nombre de façons dont les lettres du mot *SUCCÈS* peuvent être réorganisées, le placement de les lettres doivent être prises en considération.Cela contraste avec les problèmes de comptage évoqués plus haut, où tous les les éléments ont été considérés comme distinguables. Dans cette section, nous décrirons comment résoudre le comptage problèmes dans lesquels certains éléments sont indiscernables.

De plus, dans cette section, nous expliquerons comment résoudre une autre classe importante de comptage problèmes, problèmes liés au comptage des façons de placer des éléments des boites. Un exemple de ce type de problème est le nombre de façons dont les mains de poker peuvent être distribué à quatre joueurs.

Ensemble, les méthodes décrites précédemment dans ce chapitre et les méthodes introduites dans cette section forme une boîte à outils utile pour résoudre un large éventail de problèmes de comptage.Quand le des méthodes supplémentaires discutées au chapitre 8 sont ajoutées à cet arsenal, vous pourrez résoudre un pourcentage élevé des problèmes de comptage qui se posent dans un large éventail de domaines d'études.

Permutations avec répétition

Le comptage des permutations lorsque la répétition des éléments est autorisée peut facilement être effectué à l'aide du règle du produit, comme le montre l'exemple 1.

EXEMPLE 1 Combien de chaînes de longueur r peuvent être formées à partir des lettres majuscules de l'alphabet anglais?

Solution: selon la règle du produit, car il y a 26 lettres anglaises majuscules et parce que chaque lettre peut être utilisée à plusieurs reprises, nous voyons qu'il y a 26^r chaînes de lettres anglaises majuscules de longueur r . ▲

Le nombre de r- permutations d'un ensemble avec n éléments lorsque la répétition est autorisée est donné dans le théorème 1.

THÉORÈME 1 Le nombre de r- permutations d'un ensemble de n objets avec répétition autorisée est n^r .

Preuve: Il y a n façons de sélectionner un élément de l'ensemble pour chacune des r positions dans le r- permutation lorsque la répétition est autorisée, car pour chaque choix tous les n objets sont disponibles.

Par conséquent, la règle du produit il y a n^r r -permutations lorsque la répétition est autorisée.

Combinaisons avec répétition

Considérez ces exemples de combinaisons avec répétition d'éléments autorisés.

EXEMPLE 2 De combien de façons existe-t-il pour sélectionner quatre fruits dans un bol contenant des pommes, des oranges, et les poires si l'ordre dans lequel les morceaux sont sélectionnés n'a pas d'importance, seul le type de fruit et pas le morceau individuel importe, et il y a au moins quatre morceaux de chaque type de fruit dans le bol?

Solution: Pour résoudre ce problème, nous énumérons toutes les façons possibles de sélectionner le fruit. Il y a 15 façons:

4 pommes	4 oranges	4 poires
3 pommes, 1 orange	3 pommes, 1 poire	3 oranges, 1 pomme
3 oranges, 1 poire	3 poires, 1 pomme	3 poires, 1 orange
2 pommes, 2 oranges	2 pommes, 2 poires	2 oranges, 2 poires
2 pommes, 1 orange, 1 poire	2 oranges, 1 pomme, 1 poire	2 poires, 1 pomme, 1 orange

La solution est le nombre de 4 combinaisons avec répétition autorisées à partir d'un ensemble à trois éléments, $\{pomme, orange, poire\}$. ▲

Pour résoudre des problèmes de comptage plus complexes de ce type, nous avons besoin d'une méthode générale compter les combinaisons r d'un ensemble d'éléments n . Dans l'exemple 3, nous illustrerons une telle méthode.

EXEMPLE 3 De combien de façons existe-t-il pour sélectionner cinq billets dans une caisse contenant des billets de 1 $, 2 $, 5 $ factures, 10 $, 20 $, 50 $ et 100 $? Supposons que l'ordre dans lequel les factures sont choisi n'importe pas, que les factures de chaque dénomination soient indiscernables et qu'il sont au moins cinq factures de chaque type.

Solution: Parce que l'ordre dans lequel les factures sont sélectionnées n'a pas d'importance et sept différents types de factures peuvent être sélectionnés jusqu'à cinq fois, ce problème implique le comptage 5 combinaisons avec répétition autorisées à partir d'un ensemble de sept éléments. Liste de toutes les possibilités serait fastidieux, car il existe un grand nombre de solutions. Au lieu de cela, nous illustrerons la utilisation d'une technique de comptage des combinaisons avec répétition autorisée.

Supposons qu'une caisse à billets comporte sept compartiments, un pour contenir chaque type de billet, comme illustré dans la figure 1. Ces compartiments sont séparés par six séparateurs, comme indiqué sur l'image. le le choix de cinq billets correspond à placer cinq marqueurs dans les compartiments contenant différents types de factures. La figure 2 illustre cette correspondance pour trois façons différentes de sélectionner cinq factures, où les six séparateurs sont représentés par des barres et les cinq billets par des étoiles.

Le nombre de façons de sélectionner cinq factures correspond au nombre de façons d'organiser six bars et cinq etoiles d'affilée avec un total de 11 positions. Par conséquent, le nombre de façons de sélectionner les cinq billets est le nombre de façons de sélectionner les positions des cinq étoiles parmi les 11 postes. Cela correspond au nombre de sélections non ordonnées de 5 objets parmi un ensemble de 11

100 $ 50 $ 20 $ 10 $ 5 $ 2 $ 1 $

FIGURE 1 **Caisse avec sept types de factures.**

dix 10$$ $ 1 10$$ 10$ $ ** ***

100 $$ 50 $$ 20 10$$ $ 5 $$ * * * * *

100 $$ dix 10$$ $ 2 $$ 1 $$ * * * * *

FIGURE 2 **Exemples de façons de sélectionner cinq factures.**

objets, ce qui peut être fait de manière $C(11, 5)$. Par conséquent, il existe

$$C(11, 5) = \frac{11!}{5!\,6!} = 462$$

façons de choisir cinq billets dans la caisse avec sept types de billets. ▲

Le théorème 2 généralise cette discussion.

THÉORÈME 2 Il y a $C(n + r - 1, r) = C(n + r - 1, n - 1)$ r-combinaisons d'un ensemble avec n éléments lorsque la répétition des éléments est autorisée.

Preuve: chaque r -combinaison d'un ensemble avec n éléments lorsque la répétition est autorisée peut être ressenti par une liste de n - 1 barres et r étoiles. Les n - 1 barres sont utilisées pour marquer n différents cellules, avec la i ème cellule contenant une étoile pour chaque fois que le i ème élément de l'ensemble se produit dans le combinaison. Par exemple, une combinaison de 6 d'un ensemble de quatre éléments est représentée avec trois bars et six étoiles. Ici

** | * || ***

représente la combinaison contenant exactement deux du premier élément, l'un du deuxième élément, aucun du troisième élément, et trois du quatrième élément de l'ensemble.

Comme nous l'avons vu, chaque liste différente contenant n - 1 barres et r étoiles correspond à un r -combinaison de l'ensemble avec n éléments, lorsque la répétition est autorisée.Le nombre de ces listes est $C(n - 1 + r, r)$, car chaque liste correspond à un choix des r positions pour placer le r étoiles des positions $n - 1 + r$ qui contiennent r étoiles et n - 1 barres. Le nombre de ces listes est également égal à $C(n - 1 + r, n - 1)$, car chaque liste correspond à un choix des n - 1 positions pour placer les n - 1 barres.

Les exemples 4 à 6 montrent comment le théorème 2 est appliqué.

EXEMPLE 4 Supposons qu'une boutique de cookies possède quatre types de cookies différents.Combien de façons différentes peuvent choisir six cookies? Supposons que seul le type de cookie, et non les cookies individuels ou l'ordre dans lequel ils sont choisis importe.

Solution: Le nombre de façons de choisir six cookies est le nombre de 6 combinaisons d'un ensemble avec quatre éléments. D'après le théorème 2, cela équivaut à $C(4 + 6 - 1, 6) = C(9, 6)$. Car

$$C(9, 6) = C(9, 3) = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84,$$

il y a 84 façons différentes de choisir les six cookies. ▲

Le théorème 2 peut également être utilisé pour trouver le nombre de solutions de certaines équations linéaires où les variables sont des entiers soumis à des contraintes. Ceci est illustré par l'exemple 5.

EXEMPLE 5 Combien de solutions l'équation

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11$$

ont, où x_1, x_2 et x_3 sont des entiers non négatifs?

Solution: Pour compter le nombre de solutions, on note qu'une solution correspond à un moyen de sélection de 11 éléments dans un ensemble de trois éléments de sorte que x_1 éléments de type un, x_2 éléments de type deux et x_3 éléments de type trois sont choisis. Par conséquent, le nombre de solutions est égal au nombre de 11 combinaisons avec répétition autorisées à partir d'un ensemble à trois éléments.Du Théorème 2, il s'ensuit qu'il y a

$$C(3+11-1, 11) = C(13, 11) = C(13, 2) = \frac{13 \cdot 12}{1 \cdot 2} = 78$$

solutions.

Le nombre de solutions de cette équation peut également être trouvé lorsque les variables sont soumises aux contraintes. Par exemple, nous pouvons trouver le nombre de solutions où les variables sont intégrées gers avec $x_1 \geq 1$, $x_2 \geq 2$ et $x_3 \geq 3$. Une solution de l'équation soumise à ces contraintes correspond à une sélection de 11 éléments avec x_1 éléments de type un, x_2 éléments de type deux et x_3 éléments de type trois, où, en outre, il existe au moins un élément de type un, deux éléments de type deux et trois éléments de type trois.Ainsi, une solution correspond au choix d'un élément de type un, deux de type deux et trois de type trois, ainsi qu'un choix de cinq éléments supplémentaires de n'importe quel type. Selon le théorème 2, cela peut être fait en

$$C(3+5-1, 5) = C(7, 5) = C(7, 2) = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 21$$

façons. Ainsi, il existe 21 solutions de l'équation soumises aux contraintes données. ▲

L'exemple 6 montre comment compter le nombre de combinaisons avec répétition autorisée se produit pour déterminer la valeur d'une variable qui est incrémentée à chaque fois qu'un certain type de boucle imbriquée est traversé.

TABLEAU 1 Combinaisons et permutations avec et sans répétition.

Type	*Répétition autorisée?*	*Formule*
r- permutations	Non	$\frac{n!}{(n-r)!}$
r -combinaisons	Non	$\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$
r- permutations	Oui	n^r
r -combinaisons	Oui	$\frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!}$

EXEMPLE 6 Quelle est la valeur de k après l'exécution du pseudocode suivant?

$k := 0$
pour $i_1 := 1$ **à** n

pour $i_2 := 1$ **à** i_1
.
.

pour $i_m := 1$ **à** i_{m-1}
$k := k + 1$

Solution: Notez que la valeur initiale de k est 0 et que 1 est ajouté à k chaque fois que la boucle imbriquée est parcouru avec une séquence d'entiers $i_1, i_2, ..., i_m$ tels que

$$1 \leq i_m \leq i_{m-1} \leq \cdots \leq i_1 \leq n.$$

Le nombre de telles séquences d'entiers est le nombre de façons de choisir m entiers parmi $\{1, 2, ..., n\}$, avec répétition autorisée. (Pour voir cela, notez qu'une fois qu'une telle séquence a été sélectionné, si nous ordonnons les nombres entiers dans la séquence dans un ordre non décroissant, cela définit uniquement une affectation de $i_m, i_{m-1}, ..., i_1$. Inversement, chaque mission de ce type correspond à un ensemble non ordonné.) Par conséquent, d'après le théorème 2, il s'ensuit que $k = C(n + m - 1, m)$ après ce code a été exécuté. ▲

Les formules pour le nombre de sélections ordonnées et non ordonnées d'éléments r, choisies avec et sans répétition autorisés à partir d'un ensemble de n éléments, sont présentés dans le tableau 1.

Permutations avec des objets indiscernables

Certains éléments peuvent être impossibles à distinguer dans les problèmes de comptage. Dans ce cas, il faut être pris pour éviter de compter les choses plus d'une fois. Prenons l'exemple 7.

EXEMPLE 7 Combien de chaînes différentes peut-on faire en réordonnant les lettres du mot *SUCCESS* ?

Solution: Étant donné que certaines lettres de *SUCCÈS* sont identiques, la réponse n'est *pas* donnée par le nombre de permutations de sept lettres. Ce mot contient trois S s, deux C s, un U, et une E.
Pour déterminer le nombre de chaînes différentes pouvant être créées en réorganisant les lettres, notez d'abord que les trois S peuvent être placés parmi les sept positions de $C(7, 3)$ manières différentes, laissant quatre

postes libres. Ensuite, les deux C peuvent être placés de façon $C(4, 2)$, laissant deux positions libres. Le U peut être placé de la manière $C(2, 1)$, ne laissant qu'une seule position libre. Par conséquent, E peut être placé dans $C(1, 1)$ façon. Par conséquent, à partir de la règle du produit, le nombre de chaînes différentes qui peuvent être faites est

$$\begin{aligned} C(7,3)\,C(4,2)\,C(2,1)\,C(1,1) &= \frac{\text{sept!}}{3!\,4!} \cdot \frac{4!}{2!\,2!} \cdot \frac{2!}{1!\,1!} \cdot \frac{1!}{1!\,0!} \\ &= \frac{\text{sept!}}{3!\,2!\,1!\,1!} \\ &= 420. \end{aligned}$$ ▲

Nous pouvons prouver le théorème 3 en utilisant le même type de raisonnement que dans l'exemple 7.

THÉORÈME 3 Le nombre de permutations différentes de n objets, où il y a n_1 indiscernable objets de type 1, n_2 objets indiscernables de type 2, ..., et n_k objets indiscernables de type k, est

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!}.$$

Preuve: Pour déterminer le nombre de permutations, notons d'abord que les n_1 objets de type un peuvent être placé parmi les n positions de façon $C(n, n_1)$, laissant $n - n_1$ positions libres. Ensuite, les objets de type deux peuvent être placés en $C(n - n_1, n_2)$, laissant $n - n_1 - n_2$ positions libres. Continuer placer les objets de type trois, ..., de type $k - 1$, jusqu'à la dernière étape, n_k objets de type k peut être placé de la manière $C(n - n_1 - n_2 - \cdots - n_{k-1}, n_k)$. Par conséquent, selon la règle du produit, le total nombre de permutations différentes est

$$C(n, n_1)\,C(n - n_1, n_2)\cdots C(n - n_1 - \cdots - n_{k-1}, n_k)$$

$$= \frac{n!}{n_1!\,(n-n_1)!}\;\frac{(n-n_1)!}{n_2!\,(n-n_1-n_2)!}\cdots\frac{(n-n_1-\cdots-n_{k-1})!}{n_k!\,0!}$$

$$= \frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!}.$$

Distribution d'objets dans des boîtes

De nombreux problèmes de comptage peuvent être résolus en énumérant les façons dont les objets peuvent être placés dans des boîtes (où l'ordre dans lequel ces objets sont placés dans les boîtes n'a pas d'importance).Les objets peuvent être soit *distinctes* , c'est-à-dire différentes les unes des autres, soit *indiscernables* , c'est-à-dire considérées identique. On dit parfois que les objets distinctifs sont *étiquetés* , alors que les objets ne seraient pas *étiquetés* . De même, les boîtes peuvent être *distinguées* , c'est-à-dire différentes, ou *indiscernables* , c'est-à-dire identiques. On dit souvent que les boîtes distinctes sont *étiquetées* , les boîtes indiscernables ne seraient pas *étiquetées* . Lorsque vous résolvez un problème de comptage à l'aide de le modèle de distribution des objets dans des boîtes, vous devez déterminer si les objets sont distinctes et si les boîtes sont distinctes. Bien que le contexte du comptage problème rend ces deux décisions claires, les problèmes de comptage sont parfois ambigus et il peut ne pas être clair quel modèle s'applique.Dans un tel cas, il est préférable de formuler toutes les hypothèses que vous faites et expliquez pourquoi le modèle particulier que vous choisissez est conforme à vos hypothèses.

Nous verrons qu'il existe des formules fermées pour compter les façons de distribuer les objets, distinguable ou indiscernable, dans des boîtes distinctes. Nous n'avons pas autant de chance quand nous compter les façons de répartir les objets, distinguables ou impossibles à distinguer, en des boites; il n'y a pas de formules fermées à utiliser dans ces cas.

OBJETS DISTINCTIFS ET BOÎTES DISTINCTIVES Nous considérons d'abord cas où des objets reconnaissables sont placés dans des boîtes reconnaissables. Prenons l'exemple 8 dans lequel les objets sont des cartes et les boîtes sont des mains de joueurs.

EXEMPLE 8 Combien y a-t-il de façons de distribuer des mains de 5 cartes à chacun des quatre joueurs de la norme jeu de 52 cartes?

Solution: nous utiliserons la règle du produit pour résoudre ce problème. Pour commencer, notez que le premier joueur peut recevoir 5 cartes de la manière $C(52, 5)$. Le deuxième joueur peut recevoir 5 cartes de façon $C(47, 5)$, car il ne reste que 47 cartes. Le troisième joueur peut recevoir 5 cartes de façon $C(42, 5)$. Finalement, le quatrième joueur peut recevoir 5 cartes de façon $C(37, 5)$. Par conséquent, le nombre total de façons de traiter quatre joueurs 5 cartes chacun est

$$C(52,5)\,C(47,5)\,C(42,5)\,C(37,5) = \frac{52!}{47!\,5!}\cdot\frac{47!}{42!\,5!}\cdot\frac{42!}{37!\,5!}\cdot\frac{37!}{32!\,5!}$$
$$= \frac{52!}{5!\,5!\,5!\,5!\,32!}.$$

▲

Remarque: La solution de l'exemple 8 est égale au nombre de permutations de 52 objets, avec 5 des objets distinctifs de chacun des quatre types différents et 32 objets d'un cinquième type. Cette égalité peut être vu en définissant une correspondance biunivoque entre les permutations de ce type et la dis-tributions de cartes aux joueurs. Pour définir cette correspondance, commandez d'abord les fiches de 1 à 52. Ensuite, les cartes distribuées au premier joueur correspondent aux cartes dans les positions attribuées aux objets de le premier type de la permutation. De même, les cartes distribuées aux deuxième, troisième et quatrième joueurs, respectivement, correspondent à des cartes dans les positions attribuées aux objets des deuxième, troisième et quatrième type, respectivement. Les cartes qui ne sont distribuées à aucun joueur correspondent à des cartes dans les positions attribuées aux objets du cinquième type. Le lecteur doit vérifier qu'il s'agit d'une correspondance biunivoque.

L'exemple 8 est un problème typique qui implique la distribution d'objets reconnaissables boîtes à colorier. Les objets distinguables sont les 52 cartes, et les cinq identifiables les boîtes sont les mains des quatre joueurs et du reste du jeu. Compter les problèmes qui impliquent la distribution d'objets reconnaissables dans des boîtes peut être résolue en utilisant le théorème 4.

THÉORÈME 4 Le nombre de façons de distribuer n objets distinguables dans k cases distinctes afin que n_i objets sont placés dans la case i, $i = 1, 2, \ldots, k$, est égal à

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!}.$$

Le théorème 4 peut être prouvé en utilisant la règle du produit. Nous laissons les détails à l'exercice 47. Il peut également être prouvée (voir exercice 48) en établissant une correspondance biunivoque entre les permutations compté par le théorème 3 et les façons de distribuer les objets comptés par le théorème 4.

OBJETS ET BOÎTES indiscernables distinguables compter les nombre de façons de placer n objets indiscernables dans k boîtes distinctes se révèle revient à compter le nombre de n -combinaisons pour un ensemble avec k éléments lors de la répétition sont autorisées. La raison derrière cela est qu'il existe une correspondance biunivoque entre

n -combinaisons d'un ensemble avec k éléments lorsque la répétition est autorisée et les façons de placer n boules indiscernables dans k boîtes distinctes. Pour mettre en place cette correspondance, nous avons mis un balle dans le i ème bac chaque fois que le i ème élément de l'ensemble est inclus dans la n- combinaison.

EXEMPLE 9 Combien de façons y a-t-il de placer 10 balles indiscernables dans huit cases distinctes?

Solution: Le nombre de façons de placer 10 boules indiscernables dans huit bacs est égal au nombre ber de 10 combinaisons d'un ensemble de huit éléments lorsque la répétition est autorisée. Par conséquent, il y a

$$C(8 + 10 - 1, 10) = C(17, 10) = \frac{17!}{10!\,7!} = 19,448.$$

▲

Cela signifie qu'il existe $C(n + r - 1, n - 1)$ façons de placer r objets indiscernables dans n boîtes distinctes.

OBJETS DISTINCTIFS ET BOÎTES INDISTINGUABLES Compter les voies placer n objets *reconnaissables* dans k boîtes indiscernables est plus difficile que de compter les façons de placer des objets, des objets distincts ou indiscernables, dans des objets des boites. Nous illustrons cela avec un exemple.

EXEMPLE 10 De combien de façons existe-t-il de placer quatre employés différents dans trois bureaux indiscernables, quand chaque bureau peut contenir un nombre illimité d'employés?

Solution: Nous allons résoudre ce problème en énumérant toutes les façons dont ces employés peuvent être placés dans les bureaux. Nous représentons les quatre employés par A, B, C et D. Tout d'abord, nous notons que nous pouvons répartir les employés de sorte que tous les quatre soient regroupés dans un seul bureau, trois dans un même bureau et un quatrième est placé dans un deuxième bureau, deux employés sont placés dans un bureau et deux dans un deuxième bureau, et enfin, deux sont placés dans un bureau, et un chacun dans les deux autres bureaux. Chaque façon de répartir ces employés dans ces bureaux peut être représentée par un moyen de partitionner les éléments A, B, C et D en sous-ensembles disjoints.

Nous pouvons regrouper les quatre employés dans un même bureau de la même manière, représentés par $\{\{A, B, C, D\}\}$. Nous pouvons mettre trois employés dans un bureau et le quatrième employé dans un bureau différent de quatre façons exactement, représenté par $\{\{A, B, C\}, \{D\}\}$, $\{\{A, B, D\}, \{C\}\}$, $\{\{A, C, D\}, \{B\}\}$ et $\{\{B, C, D\}, \{A\}\}$. Nous pouvons mettre deux employés dans un bureau et deux dans un deuxième bureau de trois façons exactement, représenté par $\{\{A, B\}, \{C, D\}\}$, $\{\{A, C\}, \{B, D\}\}$, et $\{\{A, D\}, \{B, C\}\}$. Enfin, nous pouvons mettre deux employés dans un bureau, et un chacun dans chaque des deux bureaux restants de six façons, représentés par $\{\{A, B\}, \{C\}, \{D\}\}$, $\{\{A, C\}, \{B\}, \{D\}\}$, $\{\{A, D\}, \{B\}, \{C\}\}$, $\{\{B, C\}, \{A\}, \{D\}\}$, $\{\{B, D\}\}, \{A\}, \{C\}\}$ et $\{\{C, D\}, \{A\}, \{B\}\}$.

En comptant toutes les possibilités, nous constatons qu'il y a 14 façons de mettre quatre employés différents en trois bureaux indiscernables. Une autre façon de voir ce problème est de regarder le nombre des bureaux dans lesquels nous mettons des employés. Notez qu'il existe six façons de mettre quatre différents les employés dans trois bureaux indiscernables afin qu'aucun bureau ne soit vide, sept façons de mettre quatre différents employés dans deux bureaux indiscernables afin qu'aucun bureau ne soit vide, et à sens unique mettre quatre employés dans un bureau pour qu'il ne soit pas vide.

▲

Il n'y a pas de formule fermée simple pour le nombre de façons de distribuer m distinguable objets dans j boîtes indiscernables. Cependant, il existe une formule impliquant une sommation, que nous allons maintenant décrire. Soit $S(n, j)$ le nombre de façons de distribuer n distin- les objets pouvant en j boîtes indiscernable de sorte qu'aucune boîte est vide. Les nombres $S(n, j)$ sont appelé **nombres de Stirling du deuxième type**. Par exemple, l'exemple 10 montre que $S(4, 3) = 6$, $S(4, 2) = 7$, et $S(4, 1) = 1$. Nous voyons que le nombre de façons de distribuer n se distingue objets dans k cases indiscernables (où le nombre de cases non vides est égal à k, $k - 1$, ..., 2 ou 1) est égal à $\sum_{j=1}^{k} S(n, j)$. Par exemple, en suivant le raisonnement de l'exemple 10, le nombre de façons de répartir quatre objets reconnaissables dans trois boîtes indiscernables est égal à $S(4,1) + S(4,2) + S(4,3) = 1 + 7 + 6 = 14$. Utilisation du principe d'inclusion-exclusion (voir section 8.6), il peut être démontré que

$$S(n, j) = \frac{1}{j!} \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^i \binom{j}{je} (j-i)^n .$$

Par conséquent, le nombre de façons de répartir n objets distinguables en k indiscernables boîtes égale

$$\sum_{j=1}^{k} S(n, j) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j!} \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^i \binom{j}{je} (j-i)^n .$$

Remarque: Le lecteur peut être curieux au sujet des nombres de Stirling du premier type.Une combinatoire définition des **nombres de Stirling sans signe du premier type**, les valeurs absolues de Stirling numéros du premier type, se trouvent dans le préambule de l'exercice 47 du Supplément Des exercices. Pour la définition des nombres de Stirling du premier type, pour plus d'informations sur Numéros de Stirling du deuxième type, et pour en savoir plus sur les nombres de Stirling du premier type et la relation entre les nombres de Stirling du premier et du deuxième type, voir combinatoire des manuels tels que [Bó07], [Br99] et [RoTe05], et le chapitre 6 dans [MiRo91].

OBJETS INDISTINGUABLES ET BOÎTES INDISTINGUABLES Quelques comptages les problèmes peuvent être résolus en déterminant le nombre de façons de distribuer les objets indiscernables dans des boîtes indiscernables. Nous illustrons ce principe avec un exemple.

EXEMPLE 11 Combien y a-t-il de façons d'emballer six exemplaires du même livre dans quatre boîtes identiques, où une boîte peut contenir jusqu'à six livres?

Solution: Nous énumérerons toutes les façons d'emballer les livres.Pour chaque façon d'emballer les livres, nous lister le nombre de livres dans la case avec le plus grand nombre de livres, suivi des nombres de livres dans chaque boîte contenant au moins un livre, par ordre décroissant de livres dans un boîte. Les façons dont nous pouvons emballer les livres sont

6
5, 1
4, 2
4, 1, 1
3, 3
3, 2, 1
3, 1, 1, 1
2, 2, 2
2, 2, 1, 1.

Par exemple, 4, 1, 1 indique qu'une boîte contient quatre livres, une deuxième boîte contient un seul livre, et une troisième boîte contient un seul livre (et la quatrième boîte est vide).Nous concluons que il y a neuf façons autorisées d'emballer les livres, car nous les avons toutes répertoriées. ▲

Observez que la distribution de n objets indiscernables dans k boîtes indiscernables est la comme écrire n comme la somme d'au plus k entiers positifs dans un ordre non croissant. Si $un_1 + un_2 + \cdots + a_j = n$, où $a_1, a_2, \ldots, a_j$ sont des entiers positifs avec $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_j$, on dit que $a_1, a_2, \ldots, a_j$ est une **partition** de l'entier positif n en j entiers positifs. On voit que si $p_k(n)$ est le nombre de partitions de n en au plus k entiers positifs, alors il y a $p_k(n)$ façons de répartissez n objets indiscernables dans k boîtes indiscernables. Pas de formule fermée simple existe pour ce numéro. Pour plus d'informations sur les partitions d'entiers positifs, voir [Ro11].

Des exercices

1. De combien de manières différentes peut-on sélectionner cinq éléments dans l'ordre à partir d'un ensemble de trois éléments lorsque la répétition est permis?

2. De combien de manières différentes peut-on sélectionner cinq éléments dans l'ordre à partir d'un ensemble de cinq éléments lorsque la répétition est permis?

3. Combien y a-t-il de chaînes de six lettres?

4. Chaque jour, un étudiant choisit au hasard un sandwich pour déjeuner à partir d'un tas de sandwichs enveloppés. S'il y en a six sortes de sandwichs, combien de façons différentes existe-t-il pour que l'étudiant choisisse des sandwichs pour les sept jours d'une semaine si l'ordre dans lequel les sandwichs sont choisis importe?

5. De combien de façons existe-t-il pour attribuer trois emplois à cinq employés si chaque employé peut recevoir plus d'un emploi?

6. Combien de façons existe-t-il de sélectionner cinq éléments à partir d'un ensemble à trois éléments lorsque la répétition est permis?

7. Combien de façons existe-t-il de sélectionner trois éléments éléments d'un ensemble à cinq éléments lorsque la répétition est permis?

8. Combien de façons différentes de choisir une douzaine beignets des 21 variétés dans un magasin de beignets?

9. Une boutique de bagels propose des bagels à l'oignon, des bagels aux graines de pavot, des œufs bagels, bagels salés, bagels pumpernickel, graines de sésame bagels, bagels aux raisins et bagels nature. Combien de façons sont là pour choisir

a) six bagels?
b) une douzaine de bagels?
c) deux douzaines de bagels?
d) une douzaine de bagels avec au moins un de chaque type?
e) une douzaine de bagels avec au moins trois bagels aux œufs et aucun plus de deux bagels salés?

10. Un magasin de croissants a des croissants nature, des croissants cerises, croissants au chocolat, croissants aux amandes, croissants aux pommes, et croissants au brocoli. De combien de façons existe-t-il choisir

a) une douzaine de croissants?
b) trois douzaines de croissants?
c) deux douzaines de croissants avec au moins deux de chaque type?
d) deux douzaines de croissants avec pas plus de deux brocolis des croissants?
e) deux douzaines de croissants avec au moins cinq croissants au chocolat sants et au moins trois croissants aux amandes?
f) deux douzaines de croissants avec au moins un croissant nature, au moins deux croissants aux cerises, au moins trois croissants tardifs, au moins un croissant aux amandes, au moins deux croissants aux pommes et pas plus de trois brocolis des croissants?

11. De combien de façons existe-t-il pour choisir huit pièces tirelire contenant 100 pièces identiques et 80 iden-nickels tical?

12. Combien de combinaisons différentes de pièces de un cent, nickels, dimes, quarts et demi dollars peut une tirelire con-savoir si elle contient 20 pièces?

13. Un éditeur de livres possède 3 000 exemplaires d'un livre ics. Combien de façons existe-t-il de stocker ces livres dans leurs trois entrepôts si les exemplaires du livre sont indiscernable?

14. Combien de solutions y a-t-il à l'équation

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17,$$

où x_1, x_2, x_3 et x_4 sont des entiers non négatifs?

15. Combien de solutions y a-t-il à l'équation

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 21,$$

où x_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, est un entier non négatif tel cette

a) $x_1 \geq 1$?
b) $x_i \geq 2$ pour $i = 1, 2, 3, 4, 5$?
c) $0 \leq x_1 \leq 10$?
d) $0 \leq x_1 \leq 3$, $1 \leq x_2 < 4$ et $x_3 \geq 15$?

16. Combien de solutions y a-t-il à l'équation

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 29,$$

où x_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, est un entier non négatif tel cette

a) $x_i > 1$ pour $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$?
b) $x_1 \geq 1$, $x_2 \geq 2$, $x_3 \geq 3$, $x_4 \geq 4$, $x_5 > 5$ et $x_6 \geq 6$?
c) $x_1 \leq 5$?
d) $x_1 < 8$ et $x_2 > 8$?

17. Combien de chaînes de 10 chiffres ternaires (0, 1 ou 2) y a-t-il qui contiennent exactement deux 0, trois 1 et cinq 2?

18. Combien de chaînes de 20 décimales existe-t-il qui tain deux 0s, quatre 1s, trois 2s, un 3, deux 4s, trois 5s, deux 7 et trois 9?

19. Supposons qu'une famille nombreuse ait 14 enfants, dont deux des ensembles de triplets identiques, trois ensembles de jumeaux identiques et deux enfants individuels. Combien de façons de s'asseoir ces enfants dans une rangée de chaises si les triplets identiques ou les jumeaux ne peuvent pas être distingués les uns des autres?

20. Combien de solutions existe-t-il à l'inégalité

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 11,$$

où x_1, x_2 et x_3 sont des entiers non négatifs? [*Indice:* en-troduire une variable auxiliaire x_4 telle que $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$.]

21. De combien de façons existe-t-il de distribuer six balles capables dans neuf bacs reconnaissables?

22. De combien de façons existe-t-il de distribuer 12 des balles capables dans six bacs distincts?

23. Combien de façons existe-t-il de distribuer 12 objets dans six boîtes distinctes de sorte que deux objets sont placés dans chaque boîte?

24. Combien de façons existe-t-il de distribuer 15 objets dans cinq boîtes distinctes de sorte que le les boîtes contiennent un, deux, trois, quatre et cinq objets, respectivement.

25. Combien d'entiers positifs inférieurs à 1 000 000 ont la somme de leurs chiffres égale à 19?

26. Combien d'entiers positifs inférieurs à 1 000 000 ont en fait un chiffre égal à 9 et avoir une somme de chiffres égale à 13?

27. Il y a 10 questions sur une finale mathématique discrète examen. Combien de façons existe-t-il d'attribuer des scores problèmes si la somme des scores est de 100 et chaque question vaut au moins 5 points?

28. Montrer qu'il y a $C(n + r - q_1 - q_2 - \cdots - q_r - 1, n - q_1 - q_2 - \cdots - q_r)$ sélection non ordonnée différente tions de n objets de r types différents qui incluent à moins q_1 objets de type un, q_2 objets de type deux , ..., et q_r objets de type r .

29. Combien de chaînes de bits différentes peuvent être transmises si la chaîne doit commencer par 1 bit, doit comprendre trois 1 bits supplémentaires (de sorte qu'un total de quatre 1 bits soit envoyé), doit comprendre un total de 12 0 bits et doit avoir au moins deux 0 bits suivant chaque 1 bit?

30. Combien de chaînes différentes peuvent être faites à partir des lettres à *MISSISSIPPI* , en utilisant toutes les lettres?

31. Combien de chaînes différentes peuvent être faites à partir des lettres en *ABRACADABRA* , en utilisant toutes les lettres?

32. Combien de chaînes différentes peuvent être faites à partir des lettres dans *AARDVARK* , en utilisant toutes les lettres, si les trois *A* doivent être consécutif?

33. Combien de chaînes différentes peuvent être faites à partir des lettres à *ORONO* , en utilisant tout ou partie des lettres?

34. Combien de chaînes de cinq caractères ou plus peuvent être formé à partir des lettres de *SEERESS* ?

35. Combien de chaînes de sept caractères ou plus peuvent être formé à partir des lettres *EVERGREEN* ?

36. Combien de chaînes de bits différentes peuvent être formées en utilisant six 1 et huit 0?

37. Un élève a trois mangues, deux papayes et deux kiwis des fruits. Si l'élève mange un fruit chaque jour, et seul le type de fruit compte, de combien de façons différentes ces fruits peuvent-ils être consommés?

38. Une professeure emballe sa collection de 40 numéros d'un journal des matiques en quatre boîtes avec 10 numéros par boîte. Comment de nombreuses façons peut-elle distribuer les journaux si

a) chaque case est numérotée de façon à ce qu'elles soient capable?

b) les cases sont identiques, de sorte qu'elles ne peuvent pas être guished?

39. Combien de façons de voyager dans l' espace *xyz à* partir du origine $(0, 0, 0)$ au point $(4, 3, 5)$ en effectuant les étapes un unité dans le sens x positif , une unité dans le y positif ou une unité dans la direction z positive ? (En mouvement dans le sens négatif x , y ou z est interdit, de sorte que aucun retour en arrière n'est autorisé.)

40. Combien y a-t-il de façons de voyager dans l' espace *xyzw* depuis l'origine $(0, 0, 0, 0)$ au point $(4, 3, 5, 4)$ en prenant étapes d'une unité dans le x positif, y positif, z positif ou direction w positive ?

41. Combien de façons existe-t-il de distribuer les mains de sept cartes chacun des cinq joueurs d'un jeu standard de 52 cartes?

42. En bridge, les 52 cartes d'un deck standard sont distribuées à quatre joueurs. Combien de façons différentes de gérer le pont mains à quatre joueurs?

43. Combien de façons existe-t-il de distribuer les mains de cinq cartes chacun des six joueurs d'un deck contenant 48 différents cartes?

44. De combien de façons une douzaine de livres peuvent-ils être placés sur quatre étagères distinctes

a) si les livres sont des copies identiques des mêmes Titre?

b) s'il n'y a pas deux livres identiques et les positions des des livres sur les étagères sont importants? [*Indice:* divisez cela en 12 tâches, en plaçant chaque livre séparément. Commencez avec le séquence 1, 2, 3, 4 pour représenter les étagères. Représenter envoyé les livres par b_i , $i = 1, 2, ..., 12$. Placez b_1 au à droite de l'un des termes 1, 2, 3, 4. Puis successivement placer b_2, b_3, ... et b_{12}.]

45. De combien de façons n livres placés sur k distin- étagères en mesure

a) si les livres sont des copies identiques des mêmes Titre?

b) s'il n'y a pas deux livres identiques et les positions des des livres sur les étagères sont importants?

46. Une étagère contient 12 livres d'affilée. Combien de façons là pour choisir cinq livres afin qu'il n'y ait pas deux livres adjacents sont choisis? [*Astuce:* Représentez les livres choisis par les bars et les livres non choisis par les stars. Comptez le nombre de séquences de cinq barres et sept étoiles de sorte que pas deux les barres sont adjacentes.]

* **47.** Utilisez la règle du produit pour prouver le théorème 4, en plaçant d'abord objets dans la première case, puis en plaçant des objets dans la seconde boîte, et ainsi de suite.

* **48.** Prouvez le théorème 4 en mettant d'abord en place un cor- réponse entre permutations de n objets avec n_i objets indiscernables de type i , $i = 1, 2, 3, ..., k$ et les distributions de n objets dans k cases telles que n_i ob- jets sont placés dans la case i , $i = 1, 2, 3, ..., k$ puis ap- appliquer le théorème 3.

* **49.** Dans cet exercice, nous allons prouver le théorème 2 en établir une correspondance biunivoque entre l'ensemble de combinaisons r avec répétition autorisée de $S = \{1, 2, 3, ..., n\}$ et l'ensemble des r -combinaisons de l'ensemble $T = \{1, 2, 3, ..., n + r - 1\}$.

a) Disposez les éléments en une combinaison r , avec etition permise, de S dans une séquence croissante $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_r$. Montrer que la séquence s'est formée en ajoutant $k - 1$ au k ème terme est strictement croissant. Conclure que cette séquence est composée de r distincts des éléments de T .

b) Montrer que la procédure décrite en (a) définit une correspondance biunivoque entre l'ensemble des r -combinaisons, avec répétition autorisée, de S et la r -ensembles composés de T . [*Astuce:* Montrez la correspondance la spondence peut être inversée en associant au r - combinaison $\{x_1, x_2, ..., x_r\}$ de T , avec $1 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_r \leq n + r - 1$, la combinaison r avec

répétition permise de S , formée en soustrayant
k - 1 du k ème élément.]

c) Conclure qu'il y a $C(n + r - 1, r)$ r - combinaisons avec répétition autorisées à partir d'un ensemble avec n éléments.

50. De combien de façons existe-t-il de distribuer cinq objets capables dans trois boîtes indiscernables?

51. De combien de façons existe-t-il de distribuer six objets dans quatre boîtes indiscernables de sorte que chacun des les boîtes contiennent au moins un objet?

52. De combien de façons existe-t-il de mettre cinq ees dans quatre bureaux identiques?

53. De combien de façons y a-t-il six emplois temporaires dans quatre bureaux identiques afin qu'il y ait au moins un employé temporaire dans chacun de ces quatre bureaux?

54. De combien de façons existe-t-il de distribuer cinq objets capables dans trois boîtes indiscernables?

55. De combien de façons existe-t-il de distribuer six objets capables dans quatre boîtes indiscernables de sorte que chaque des boîtes contient au moins un objet?

56. Combien y a-t-il de façons d'emballer huit DVD identiques en cinq boîtes indiscernables afin que chaque boîte contienne au moins un DVD?

57. Combien y a-t-il de façons d'emballer neuf DVD identiques dans trois boîtes indiscernables afin que chaque boîte contienne contient au moins deux DVD?

58. Combien y a-t-il de façons de distribuer cinq balles sept cases si chaque case doit avoir au plus une balle en elle si

a) les balles et les boîtes sont étiquetées?

b) les boules sont étiquetées, mais les boîtes ne sont pas étiquetées?

c) les boules ne sont pas étiquetées, mais les boîtes sont étiquetées?

d) les balles et les boîtes sont sans étiquette?

59. Combien y a-t-il de façons de distribuer cinq balles en trois boîtes si chaque boîte doit contenir au moins une balle si

a) les balles et les boîtes sont étiquetées?

b) les boules sont étiquetées, mais les boîtes ne sont pas étiquetées?

c) les boules ne sont pas étiquetées, mais les boîtes sont étiquetées?

d) les balles et les boîtes sont sans étiquette?

60. Supposons qu'une ligue de basket-ball compte 32 équipes, réparties en deux conférences de 16 équipes chacune. Chaque conférence est divisé en trois divisions. Supposons que le centre nord La division compte cinq équipes. Chacune des équipes du Nord La division centrale joue quatre matchs contre chacun des d'autres équipes de cette division, trois matchs contre chacun des les 11 équipes restantes dans la conférence, et deux matchs contre chacune des 16 équipes de l'autre conférence. Dans combien d'ordres différents les jeux de l'un des les équipes de la division centrale du Nord soient-elles programmées?

∗ **61.** Supposons qu'un inspecteur d'armes doit inspecter chacun cinq sites différents deux fois, visitant un site par jour. le inspecteur est libre de sélectionner l'ordre dans lequel visiter ces mais ne peut pas visiter le site X, le site le plus suspect, sur deux jours consécutifs. Dans combien de commandes différentes peuvent l'inspecteur visite ces sites?

62. Combien de termes différents existe-t-il dans l'expansion de $(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n$ après tout termes avec des ensembles identiques des exposants sont ajoutés?

∗ **63.** Démontrer le **théorème multinomial:** si n est un **entier** positif ger, alors

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n} C(n; n_1, n_2, \ldots, n_m) x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_m^{n_m},$$

où

$$C(n; n_1, n_2, \ldots, n_m) = \frac{n!}{n_1! \, n_2! \cdots n_m!}$$

est un **coefficient multinomial** .

64. Trouvez l'expansion de $(x + y + z)^4$.

65. Trouvez le coefficient de $x^3 y^2 z^5$ dans $(x + y + z)^{10}$.

66. Combien de termes y a-t-il dans l'expansion de

$(x + y + z)^{100}$?

Génération de permutations et de combinaisons

introduction

Les méthodes de comptage de divers types de permutations et de combinaisons ont été décrites dans le sections précédentes de ce chapitre, mais parfois des permutations ou des combinaisons doivent être pas seulement compté. Considérez les trois problèmes suivants. Supposons d'abord qu'un vendeur doit visiter six villes différentes. Dans quel ordre ces villes doivent-elles être visitées pour minimiser le total temps de voyage? Une façon de déterminer le meilleur ordre est de déterminer le temps de trajet pour chacun des 6! = 720 ordres différents dans lesquels les villes peuvent être visitées et choisissez celle avec le plus petit temps de voyage. Deuxièmement, supposons que l'on nous donne un ensemble de six entiers positifs et souhaitons trouver un sous-ensemble d'entre eux qui a 100 comme somme, si un tel sous-ensemble existe. Une façon de trouver ces chiffres est de générer tous les $2^6 = 64$ sous-ensembles et vérifier la somme de leurs éléments. Troisièmement, supposons qu'un laboratoire compte 95 employés. Un groupe de 12 de ces employés avec un ensemble particulier de 25 compétences est nécessaire pour un projet. (Chaque employé peut avoir une ou plusieurs de ces compétences.) Une façon de trouver un tel ensemble d'employés consiste à générer tous les ensembles de 12 de ces employés et à vérifier s'ils les compétences souhaitées. Ces exemples montrent qu'il est souvent nécessaire de générer des permutations et combinaisons pour résoudre les problèmes.

Génération de permutations

Tout ensemble avec n éléments peut être placé en correspondance biunivoque avec l'ensemble $\{1, 2, 3, ..., n\}$. Nous pouvons lister les permutations de tout ensemble de n éléments en générant les permutations des n les plus petits entiers positifs, puis en remplaçant ces entiers par les éléments correspondants. De nombreux algorithmes différents ont été développés pour générer le n ! permutations de cet ensemble. nous décrira l'un d'entre eux qui est basé sur l'ordre **lexicographique** (ou **dictionnaire)** de l'ensemble des permutations de $\{1, 2, 3, ..., n\}$. Dans cet ordre, la permutation $a_1 a_2 \cdots a_n$ précède la permutation de $b_1 b_2 \cdots b_n$, si pour certains k, avec $1 \leq k \leq n$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ..., $a_{k-1} = b_{k-1}$, et $a_k < b_k$. En d'autres termes, une permutation de l'ensemble des n plus petits entiers positifs précède (dans l'ordre lexicographique) une deuxième permutation si le nombre dans cette permutation dans la première position où les deux permutations sont en désaccord est inférieure au nombre dans cette position dans le deuxième permutation.

EXEMPLE 1 La permutation 23415 de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ précède la permutation 23514, car ces permutations s'accordent dans les deux premières positions, mais le nombre dans la troisième position dans la première la permutation, 4, est inférieure au nombre en troisième position dans la deuxième permutation, 5. De même, la permutation 41532 précède 52143. ▲

Un algorithme pour générer les permutations de $\{1, 2, ..., n\}$ peut être basé sur une procédure procédure qui construit la permutation suivante dans l'ordre lexicographique suivant une permutation donnée $a_1 a_2 \cdots a_n$. Nous montrerons comment cela peut être fait. Supposons d'abord que $a_{n-1} < a_n$. Échangez un_{n-1} et a_n pour obtenir une permutation plus grande. Aucune autre permutation n'est à la fois plus grande que la permutation et inférieure à la permutation obtenue en échangeant un_{n-1} et un_n. Par exemple, la permutation suivante la plus grande après 234156 est 234165. Par contre, si $a_{n-1} > a_n$, alors a une permutation plus importante ne peut pas être obtenue en échangeant ces deux derniers termes dans la permutation. Regardez les trois derniers entiers de la permutation. Si $a_{n-2} < a_{n-1}$, alors les trois derniers entiers de la permutation peut être réorganisée pour obtenir la permutation suivante la plus grande. Mettez le plus petit des deux entiers a_{n-1} et un_n qui est supérieure à une_{n-2} en position n - 2. Ensuite, placer le restant entier et un_{n-2} dans les deux dernières positions dans l'ordre croissant. Par exemple, le prochain plus grand la permutation après 234165 est 234516.

En revanche, si $a_{n-2} > a_{n-1}$ (et $a_{n-1} > a_n$), alors une permutation plus grande ne peut être obtenu en permutant les trois derniers termes de la permutation. Sur la base de ces observations, un une méthode générale peut être décrite pour produire la prochaine permutation plus grande dans l'ordre croissant suivant une permutation donnée $a_1 a_2 \cdots a_n$. Tout d'abord, trouvez les entiers a_j et a_{j+1} avec $a_j < a_{j+1}$ et

$$a_{j+1} > a_{j+2} > \cdots > a_n,$$

c'est-à-dire la dernière paire d'entiers adjacents dans la permutation où le premier entier de la paire est plus petit que le second. Ensuite, la permutation plus grande suivante dans l'ordre lexicographique est obtenue en mettant en j ème position le plus petit entier parmi a_{j+1}, a_{j+2}, ..., et a_n plus grand que a_j et listant dans l'ordre croissant le reste des entiers a_j, a_{j+1}, ..., a_n aux positions j + 1 à n. Il est facile de voir qu'il n'y a pas d'autre permutation plus grande que la permutation $a_1 a_2 \cdots a_n$ mais plus petit que la nouvelle permutation produite. (La vérification de ce fait est laissée comme un exercice pour le lecteur.)

EXEMPLE 2 Quelle est la prochaine permutation dans l'ordre lexicographique après 362541?

Solution: La dernière paire d'entiers a_j et a_{j+1} où $a_j < a_{j+1}$ est $un_3 = 2$ et $un_4 = 5$. Le le plus petit entier à droite de 2 supérieur à 2 dans la permutation est $un_5 = 4$. Par conséquent, 4 est placé en troisième position. Ensuite, les entiers 2, 5 et 1 sont placés dans l'ordre dans les trois derniers positions, donnant 125 comme les trois dernières positions de la permutation. Par conséquent, la prochaine permutation est 364125. ▲

Pour produire le n ! permutations des entiers $1, 2, 3, \ldots, n$, commencent par les plus petites permu- dans l'ordre lexicographique, à savoir $123 \cdots n$, et appliquer successivement la procédure décrite pour produire la prochaine permutation plus grande de $n ! - 1$ fois. Cela donne toutes les permutations de les n plus petits entiers dans l'ordre lexicographique.

EXEMPLE 3 Générer les permutations des entiers 1, 2, 3 dans l'ordre lexicographique.

Solution: commencez par 123. La permutation suivante est obtenue en échangeant 3 et 2 pour obtenir 132. Ensuite, parce que 3 > 2 et 1 < 3, permutez les trois nombres entiers en 132. Mettez le plus petit de 3 et 2 dans la première position, puis mettez 1 et 3 dans l'ordre croissant dans les positions 2 et 3 pour obtenir 213. Il est suivi de 231, obtenu en échangeant 1 et 3, car 1< 3. La prochaine une permutation plus grande a 3 en première position, suivi de 1 et 2 dans l'ordre croissant, à savoir, 312. Enfin, échangez 1 et 2 pour obtenir la dernière permutation, 321. Nous avons généré le permutations de 1, 2, 3 dans l'ordre lexicographique. Ils sont 123, 132, 213, 231, 312 et 321. ▲

L'algorithme 1 affiche la procédure pour trouver la prochaine permutation dans l'ordre lexicographique après une permutation qui n'est pas $nn - 1\, n - 2 \ldots 2\, 1$, qui est la plus grande permutation.

ALGORITHME 1 Génération de la permutation suivante dans l'ordre lexicographique.

procédure *permutation suivante* ($a_1 a_2 \ldots a_n$: permutation de
$\{1, 2, \ldots, n\}$ différent de $nn - 1 \ldots 2\, 1$)
$j := n - 1$
tandis que $a_j > a_{j+1}$
  $j := j - 1$
{ j est le plus grand indice avec $un_j < a_{j+1}$ }
$k := n$
tandis que $a_j > a_k$
  $k := k - 1$
{ A_k est le plus petit nombre entier plus grand que d' un_j vers la droite de la_j }
échanger a_j et a_k
$r := n$
$s := j + 1$
tandis que $r > s$
  échanger un_r et un_s
  $r := r - 1$
  $s := s + 1$

{cela met la queue de la permutation après la j ème position dans l'ordre croissant}
{ $a_1 a_2 \ldots a_n$ est maintenant la prochaine permutation}

Génération de combinaisons

Comment générer toutes les combinaisons des éléments d'un ensemble fini?Parce qu'une combinaison n'est qu'un sous-ensemble, nous pouvons utiliser la correspondance entre des sous-ensembles de $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ et des chaînes de bits de longueur n .

Rappelons que la chaîne de bits correspondant à un sous-ensemble a un 1 en position k si un_k est dans le sous-ensemble, et a un 0 dans cette position si un_k n'est pas dans le sous-ensemble.Si toutes les chaînes de bits de longueur n peuvent être répertoriées, puis par la correspondance entre sous-ensembles et chaînes de bits, une liste de tous les sous-ensembles est obtenue.

Rappelons qu'une chaîne de bits de longueur n est également l'expansion binaire d'un entier compris entre 0 et 2^n - 1. Les 2^n les chaînes de bits peuvent être répertoriées dans l'ordre de leur taille croissante sous forme d'entiers dans leur binaire extensions. Pour produire toutes les extensions binaires de longueur n , commencez par la chaîne de bits 000... 00, avec n zéros. Ensuite, trouvez successivement l'extension suivante jusqu'à ce que la chaîne de bits 111... 11 soit obtenue. À chaque étape, la prochaine expansion binaire est trouvée en localisant la première position de la droite qui est pas un 1, puis en changeant tous les 1 à droite de cette position en 0 et en faisant ce premier 0 (de à droite) a 1.

EXEMPLE 4 Recherchez la chaîne de bits suivante après 10 0010 0111.

Solution: le premier bit de droite qui n'est pas un 1 est le quatrième bit de droite.Changement ce bit à 1 et changez tous les bits suivants à 0s. Cela produit la prochaine chaîne de bits plus grande, 10 0010 1000. ▲

Procédure de production de la chaîne de bits suivante la plus grande après $b_{n-1} b_{n-2} \ldots b_1 b_0$ est donné comme Algorithme 2.

ALGORITHME 2 Génération de la prochaine chaîne de bits plus grande.

procédure *chaîne de bits suivante* ($b_{n-1} b_{n-2} \ldots b_1 b_0$: chaîne de bits non égale à 11... 11 *)*
$i := 0$
tandis que $b_i = 1$
  $b_i := 0$
  $i := i + 1$
$b_i := 1$
{ $b_{n-1} b_{n-2} \ldots b_1 b_0$ est maintenant la chaîne de bits suivante}

Ensuite, un algorithme pour générer les r -combinaisons de l'ensemble $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ sera donné. Une combinaison r peut être représentée par une séquence contenant les éléments du sous-ensemble dans l'ordre croissant. Les combinaisons r peuvent être répertoriées en utilisant un ordre lexicographique sur ces séquences. Dans cet ordre lexicographique, la première combinaison r est $\{1, 2, \ldots, r - 1, r\}$ et la dernière combinaison r est $\{n - r + 1, n - r + 2, \ldots, n - 1, n\}$. La prochaine combinaison r après $a_1 a_2 \cdots a_r$ peut être obtenu de la manière suivante: Premièrement, localisez le dernier élément a_i dans le séquence telle que $a_i = n - r + i$. Ensuite, remplacez un_i par $un_i + 1$ et un_j par $un_i + j - i + 1$, pour $j = i + 1$, $i + 2$, ..., r . Il appartient au lecteur de montrer que cela produit le prochain plus grand r -combinaison dans l'ordre lexicographique. Cette procédure est illustrée par l'exemple 5.

EXEMPLE 5 Trouvez la prochaine combinaison plus grande de l'ensemble {1, 2 , 3 , 4 , 5 , 6} après {1 , 2 , 5 , 6}.

Solution: Le dernier terme entre les termes d' un_i avec $un_1 = 1$, $a_2 = 2$, $un_3 = 5$, et $un_4 = 6$ de telle sorte que $a_i = 6 - 4 + i$ est $a_2 = 2$. Pour obtenir la combinaison 4 plus grande suivante, incrémentez a_2 par 1 pour obtenir $a_2 = 3$. Ensuite, définissez $un_3 = 3 + 1 = 4$ et $un_4 = 3 + 2 = 5$. Par conséquent, la combinaison 4 plus grande suivante est {1 , 3 , 4 , 5}. ▲

L'algorithme 3 affiche le pseudocode pour cette procédure.

ALGORITHME 3 Génération de la prochaine combinaison r dans l'ordre lexicographique.

procédure *suivante combinaison r (* { a_1 , a_2 , ..., a_r }: sous-ensemble correct de {1 , 2 , ..., n } différent de { $n - r + 1$, ..., n } avec $a_1 < a_2 < \cdots < a_r$ *)*

$i := r$

tandis que $a_i = n - r + i$
  $i := i - 1$

$a_i := a_i + 1$

pour $j := i + 1$ **à** r
  $a_j := a_i + j - i$

{{ a_1, a_2, ..., a_r } est maintenant la combinaison suivante}

Des exercices

1. Placez ces permutations de {1 , 2 , 3 , 4 , 5} en lexico-commande graphique: 43521, 15432, 45321, 23451, 23514, 14532, 21345, 45213, 31452, 31542.

2. Placez ces permutations de {1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6} en lexico-commande graphique: 234561, 231456, 165432, 156423, 543216, 541236, 231465, 314562, 432561, 654321, 654312, 435612.

3. Le nom d'un fichier dans un répertoire informatique se compose de trois lettres majuscules suivies d'un chiffre, où chaque la lettre est soit A, B ou C, et chaque chiffre est 1 ou 2. Répertoriez le nom de ces fichiers par ordre lexicographique, où nous classons les lettres en utilisant l'ordre alphabétique habituel des lettres.

4. Supposons que le nom d'un fichier dans un répertoire d'ordinateur se compose de trois chiffres suivis de deux lettres minuscules et chaque chiffre est 0, 1 ou 2, et chaque lettre est soit a soit b. Répertoriez le nom de ces fichiers par ordre lexicographique, où

10. Montrer que l'algorithme 1 produit le permu-dans l'ordre lexicographique.

11. Montrez que l'algorithme 3 produit le prochain plus grand r -combinaison dans l'ordre lexicographique après une donnée r -combinaison.

12. Développer un algorithme pour générer les r- permutations d'un ensemble de n éléments.

13. Énumérez toutes les 3 permutations de {1 , 2 , 3 , 4 , 5}.

Les exercices restants de cette section développent une autre rithme de génération des permutations de {1 , 2 , 3 , ..., n }. Cette L'algorithme est basé sur des extensions Cantor d'entiers. Chaque entier non négatif inférieur à n ! possède une extension Cantor unique sion

$$un_1 1! + a_2 2! + \cdots + a_{n-1} (n - 1)!$$

où a_i est un entier non négatif ne dépassant pas i , pour $i =$

nous classons les lettres en utilisant l'ordre alphabétique habituel des lettres. 1, 2, ..., n - 1. Les entiers a_1, a_2, ..., a_{n-1} sont appelés **Chiffres de cantor** de cet entier.

5. Trouvez la prochaine permutation plus grande dans l'ordre lexicographique après chacune de ces permutations.

a) 1432 **b)** 54123 **c)** 12453

d) 45231 **e)** 6714235 **f)** 31528764

6. Trouvez la prochaine permutation plus grande dans l'ordre lexicographique après chacune de ces permutations.

a) 1342 **b)** 45321 **c)** 13245

d) 612345 **e)** 1623547 **f)** 23587416

7. Utilisez l'algorithme 1 pour générer les 24 permutations du quatre premiers entiers positifs dans l'ordre lexicographique.

8. Utilisez l'algorithme 2 pour répertorier tous les sous-ensembles de l'ensemble {1, 2, 3, 4}.

9. Utilisez l'algorithme 3 pour répertorier toutes les 3 combinaisons de {1 , 2 , 3 , 4 , 5}.

Étant donné une permutation de {1 , 2 , ..., n }, soit a_{k-1} , k = 2 , 3 , ..., n , soit le nombre d'entiers inférieur à k qui suit k faible dans la permutation. Par exemple, dans la permutation 43215, a_1 est le nombre d'entiers inférieurs à 2 qui suivent faible 2, donc $a_1 = 1$. De même, pour cet exemple $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, et $a_4 = 0$. Considérez la fonction de l'ensemble de permu- de {1 , 2 , 3 , ..., n } à l'ensemble des entiers non négatifs moins de n ! qui envoie une permutation à l'entier qui a a_1 , a_2 , ..., a_{n-1} , ainsi défini, comme ses chiffres de Cantor.

14. Trouvez les chiffres de Cantor a_1 , a_2 , ..., a_{n-1} qui correspondent à ces permutations.

a) 246531 **b)** 12345 **c)** 654321

* **15.** Montrer que la correspondance décrite dans le préambule est une bijection entre l'ensemble des permutations de {1 , 2 , 3 , ..., n } et les entiers non négatifs inférieurs à n !.

16. Trouvez les permutations de {1 , 2 , 3 , 4 , 5} qui correspondent à ces nombres entiers par rapport à la correspondance entre expansions et permutations Cantor comme décrit dans le préambule de l'exercice 14.

a) 3 **b)** 89 **c)** 111

17. Développer un algorithme pour produire toutes les permutations d'un ensemble de n éléments basés sur la correspondance décrite dans le préambule de l'exercice 14.

Termes et résultats clés

TERMES

combinatoire: l'étude des arrangements d'objets

énumération: le comptage des arrangements d'objets

diagramme d'arbre: un diagramme composé d'une racine, laissant des branches la racine et d'autres branches laissant certains des points de terminaison des succursales

permutation: une disposition ordonnée des éléments d'un ensemble

***r*- permutation:** un agencement ordonné de r éléments d'un ensemble

***P* (*n, r*):** le nombre de r- permutations d'un ensemble à n éléments

***r* -combination:** une sélection non ordonnée d'éléments r d'un ensemble

***C* (*n, r*):** le nombre de r -combinaisons d'un ensemble avec n éléments

coefficient binomial $\binom{n}{r}$ **:** aussi le nombre de r -combinaisons d'un ensemble avec n éléments

preuve combinatoire: une preuve qui utilise des arguments de comptage plutôt que la manipulation algébrique pour prouver un résultat

Le triangle de Pascal: une représentation des coefficients binomiaux cients où la i ème rangée du triangle contient $\binom{i}{j}$ pour $j = 0 , 1 , 2 , ..., i$

***S* (*n, j*):** le nombre de Stirling du second type dénotant le nombre de façons de distribuer n objets distinctifs dans j boîtes indiscernables pour qu'aucune boîte ne soit vide

règle de soustraction pour le comptage ou **inclusion-exclusion pour ensembles:** si une tâche peut être effectuée de n_1 façons ou n_2 façons, alors le nombre de façons de faire la tâche est $n_1 + n_2$ moins le nombre de façons de faire la tâche qui sont communes à la deux manières différentes.

règle de soustraction ou **inclusion-exclusion pour les ensembles:** le nombre des éléments dans l'union de deux ensembles est la somme du nombre d'éléments dans ces ensembles moins le nombre d'éléments dans leur intersection.

règle de division pour le comptage: il existe n / d façons d'effectuer une tâche si cela peut être fait en utilisant une procédure qui peut être effectuée de n façons, et pour chaque façon w , exactement d des n voies correspondent à la voie w .

règle de division pour les ensembles: supposons qu'un ensemble fini A soit l'union de n sous-ensembles disjoints contenant chacun d éléments. Alors $n = |A| / d$.

le principe du pigeonhole: lorsque plus de k objets sont placé dans k boîtes, il doit y avoir une boîte contenant plus d'un objet.

le principe du pigeonnier généralisé: lorsque N objets sont placé dans k cases, il doit y avoir une case contenant au moins $\lceil N / k \rceil$ objets.

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

RÉSULTATS

règle de produit pour le comptage: le nombre de façons de procédure qui consiste en deux tâches est le produit du nombre des façons de faire la première tâche et le nombre de façons de faire la deuxième tâche après la première tâche.

règle de produit pour les ensembles: le nombre d'éléments dans la Le produit sien des ensembles finis est le produit du nombre de éléments dans chaque ensemble.

règle de somme pour le comptage: nombre de façons d'effectuer une tâche dans l'une des deux façons est la somme du nombre de façons de faire ces tâches si elles ne peuvent pas être effectuées simultanément.

règle de somme pour les ensembles: le nombre d'éléments dans l'union de ensembles finis disjoints par paire est la somme des nombres de éléments de ces ensembles.

$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

L'identité de Pascal: $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$

le théorème binomial: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$

Il y a n^r r- permutations d'un ensemble avec n éléments lorsque la répétition est autorisée.

Il existe des combinaisons $C(n + r - 1, r)$ r d'un ensemble avec n éléments lorsque la répétition est autorisée.

Il y en a $n! / (n_1! n_2! \cdots n_k!)$ permutations de n objets de k types où il y a n_i objets indiscernables de type i pour $i = 1, 2, 3, \ldots, k$.

l'algorithme de génération des permutations de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$

Questions de révision

1. Expliquez comment les règles de somme et de produit peuvent être utilisées pour trouver le nombre de chaînes de bits dont la longueur ne dépasse pas dix.

2. Expliquez comment trouver le nombre de chaînes de bits de longueur n'excédant pas 10 qui ont au moins un bit 0.

3. a) Comment la règle du produit peut-elle être utilisée pour trouver le numéro des fonctions d'un ensemble avec m éléments à un ensemble avec n éléments?

b) Combien de fonctions y a-t-il dans un ensemble de cinq éléments à un ensemble de 10 éléments?

c) Comment la règle du produit peut-elle être utilisée pour trouver le numéro des fonctions biunivoque d'un ensemble de m éléments à un ensemble avec n éléments?

d) Combien de fonctions un à un y a-t-il dans un ensemble avec cinq éléments à un ensemble de 10 éléments?

e) Combien y a-t-il de fonctions sur un ensemble avec cinq éléments à un ensemble de 10 éléments?

4. Comment pouvez-vous trouver le nombre de résultats possibles éliminatoires entre deux équipes où la première équipe qui gagne quatre matchs remportent les séries éliminatoires?

5. Comment pouvez-vous trouver le nombre de chaînes de bits de longueur dix qui commencent par 101 ou se terminent par 010?

6. a) Énoncez le principe du pigeonnier.

b) Expliquez comment le principe du pigeonnier peut être utilisé pour montrer que parmi 11 nombres entiers, au moins deux doivent avoir le même dernier chiffre.

7. a) Énoncer le principe généralisé des trous de pigeonnier.

b) Expliquez comment le principe généralisé des trous être utilisé pour montrer que parmi 91 entiers, il existe au moins dix qui se terminent par le même chiffre.

8. a) Quelle est la différence entre une combinaison r et une r- permutation d'un ensemble à n éléments?

b) Dériver une équation qui relie le nombre de r -com- combinaisons et le nombre de r- permutations d'un ensemble avec n éléments.

13. a) Explique comment trouver une formule pour le nombre de façons pour sélectionner r objets parmi n objets lorsque la répétition est autorisé et l'ordre n'a pas d'importance.

b) De combien de façons existe-t-il pour sélectionner une douzaine d'objets parmi des objets de cinq types différents si des objets du même type sont-ils indiscernables?

c) De combien de façons existe-t-il pour sélectionner une douzaine d'objets de ces cinq types différents s'il doit y avoir au moins trois objets du premier type?

d) De combien de façons existe-t-il pour sélectionner une douzaine d'objets de ces cinq types différents s'il ne peut y avoir plus de quatre objets du premier type?

e) De combien de façons existe-t-il pour sélectionner une douzaine d'objets de ces cinq types différents s'il doit y avoir au moins deux objets du premier type, mais pas plus de trois objets du deuxième type?

14. a) Soit n et r des entiers positifs. Expliquez pourquoi nombre de solutions de l'équation $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$, où x_i est un entier non négatif pour $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, est égal au nombre de combinaisons r d'un ensemble avec n éléments.

b) Combien y a-t-il de solutions en nombres entiers non négatifs à l'équation $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17$?

c) Combien de solutions en nombres entiers positifs existe-t-il pour l'équation dans la partie (b)?

c) De combien de façons existe-t-il pour sélectionner six élèves une classe de 25 pour faire partie d'un comité?

d) De combien de façons existe-t-il pour sélectionner six élèves une classe de 25 pour occuper six postes de direction différents sur un comité?

9. a) Qu'est-ce que le triangle de Pascal?

b) Comment peut-on produire une rangée du triangle de Pascal celui au dessus?

10. Qu'entend-on par preuve combinatoire d'une identité? En quoi une telle preuve est-elle différente d'une preuve algébrique?

11. Expliquez comment prouver l'identité de Pascal à l'aide d'une argument moral.

12. a) Énonce le théorème binomial.

b) Expliquer comment prouver le théorème binomial en utilisant un argument combinatoire.

c) Trouver le coefficient de $x^{100} y^{101}$ dans l'expansion de $(2x + 5$ ans $)^{201}$.

15. a) Dériver une formule pour le nombre de permutations de n objets de k types différents, où il y a n_1 indis- objets pouvant être différenciés de type un, n_2 indiscernables objets de type deux , ..., et n_k objets indiscernables projets de type k .

b) De combien de façons existe-t-il pour ordonner les lettres mot *INDISCREETNESS* ?

16. Décrire un algorithme pour générer toutes les permutations de l'ensemble des n plus petits entiers positifs.

17. a) Combien y a-t-il de façons de distribuer les mains de cinq cartes à six joueurs d'un jeu standard de 52 cartes?

b) De combien de façons sont là pour distribuer n distin- objets capables dans k boîtes distinctes de sorte que n_i les objets sont placés dans la case i ?

18. Décrire un algorithme pour générer toutes les combinaisons de l'ensemble des n plus petits entiers positifs.

Exercices supplémentaires

1. De combien de façons existe-t-il pour choisir 6 articles parmi 10 éléments teints lorsque

a) les éléments des choix sont ordonnés et la répétition est interdit?

b) les éléments des choix sont ordonnés et la répétition est permis?

c) les éléments dans les choix ne sont pas ordonnés et se répètent n'est pas autorisé?

d) les éléments dans les choix ne sont pas ordonnés et se répètent est autorisée?

2. De combien de façons existe-t-il pour choisir 10 articles parmi 6 dis- éléments teints lorsque

a) les éléments des choix sont ordonnés et la répétition est interdit?

b) les éléments des choix sont ordonnés et la répétition est permis?

c) les éléments dans les choix ne sont pas ordonnés et se répètent n'est pas autorisé?

d) les éléments dans les choix ne sont pas ordonnés et se répètent est autorisée?

3. Un test contient 100 vraies / fausses questions. Combien de de différentes manières un étudiant peut-il répondre aux questions du test, si les réponses peuvent être laissées en blanc?

4. Combien de chaînes de longueur 10 commencent par 000 ou se terminent par 1111?

5. Combien de chaînes de bits de longueur 10 sur l'alphabet $\{a, b, c\}$ ont exactement trois a s ou exactement quatre b s?

6. Les numéros de téléphone internes du système téléphonique sur un campus se compose de cinq chiffres, le premier chiffre n'étant pas égal à zéro. Combien de numéros différents peuvent être attribués dans ce système?

7. Un glacier a 28 saveurs différentes, 8 différentes sortes de sauce et 12 garnitures.

a) De combien de manières différentes un plat de trois boules faire de la crème glacée où chaque saveur peut être utilisée

13. Montrez que, étant donné tout ensemble de 10 entiers positifs non au-delà de 50, il existe au moins deux éléments à cinq éléments différents sous-ensembles de cet ensemble qui ont la même somme.

14. Un paquet de cartes de baseball contient 20 cartes. Combien des forfaits doivent être achetés pour garantir que deux cartes ces packages sont identiques s'il y en a 550 au total différentes cartes?

15. a) Combien de cartes doivent être choisies dans un jeu standard de 52 cartes pour garantir qu'au moins deux des quatre les as sont choisis?

b) Combien de cartes doivent être choisies dans un jeu standard de 52 cartes pour garantir qu'au moins deux des quatre as et au moins deux des 13 types sont choisis?

c) Combien de cartes doivent être choisies dans un jeu standard de 52 cartes pour garantir qu'il y a au moins deux cartes du même genre?

plus d'une fois et l'ordre des cuillères ne correspond pas matière?

b) Combien de types différents de petits coupes glacées existe-t-il si un petit sundae contient une boule de crème glacée, un sauce, et une garniture?

c) Combien de types différents de grandes coupes glacées existe-t-il si un grand sundae contient trois boules de crème glacée, où chaque saveur peut être utilisée plus d'une fois et l'ordre des boules n'a pas d'importance; deux types de sauce, où chaque sauce ne peut être utilisée qu'une seule fois et l'ordre des sauces n'a pas d'importance; et trois toppings, où chaque garniture ne peut être utilisée qu'une seule fois et l'ordre des garnitures n'a pas d'importance?

8. Combien d'entiers positifs moins de 1000

a) a exactement trois chiffres décimaux?

b) avoir un nombre impair de chiffres décimaux?

c) avoir au moins un chiffre décimal égal à 9?

d) n'ont pas de chiffres décimaux impairs?

e) avoir deux chiffres décimaux consécutifs égaux à 5?

f) sont des palindromes (c'est-à-dire, lisez le même avant et en arrière)?

9. Lorsque les nombres de 1 à 1000 sont écrits en décinotation mal, combien de chacun de ces chiffres sont utilisés?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 9

10. Il y a 12 signes du zodiaque. Combien de personnes nécessaire pour garantir qu'au moins six de ces personnes ont le même signe?

11. Une entreprise de biscuits de fortune fait 213 fortunes différentes. Un étudiant mange dans un restaurant qui utilise les fortunes de ce société et donne à chaque client un biscuit de fortune à la fin d'un repas. Quel est le plus grand nombre possible de fois que l'étudiant peut manger au restaurant sans obtenir la même fortune quatre fois?

12. Combien de personnes sont nécessaires pour garantir qu'au moins deux sont nés le même jour de la semaine et dans le même mois (peut-être dans des années différentes)?

d) Combien de cartes doivent être choisies dans un jeu standard de 52 cartes pour garantir qu'il y a au moins deux cartes de chacun des deux types différents?

∗ **16.** Montrer que dans tout ensemble de $n + 1$ entiers positifs ne dépassent passing $2n$ il doit y en avoir deux qui sont relativement premiers.

∗ **17.** Montrer que dans une séquence de m entiers, il existe un ou termes plus consécutifs avec une somme divisible par m.

18. Montrez que si cinq points sont ramassés à l'intérieur d'un carré avec une longueur de côté de 2, puis au moins deux de ces les points ne sont pas plus loin que $\sqrt{2}$ à part.

19. Montrer que l'expansion décimale d'un nombre rationnel doit se répéter à partir d'un certain point.

20. Une fois qu'un ver informatique infecte un ordinateur personnel via un infecté, il envoie une copie de lui-même à 100 e-mails les adresses électroniques qu'il trouve dans la boîte aux lettres électronique sur cet ordinateur personnel. Quel est le nombre maximum d'ordinateurs différents cet ordinateur peut infecter dans le temps nécessaire pour que le message infecté soit transféré cinq fois?

21. De combien de façons existe-t-il pour choisir une douzaine de beignets 20 variétés

a) s'il n'y a pas deux beignets de la même variété?

b) si tous les beignets sont de la même variété?

c) s'il n'y a pas de restrictions?

d) s'il existe au moins deux variétés parmi la douzaine beignets choisis?

e) s'il doit y avoir au moins six beignets fourrés aux bleuets?

f) s'il ne peut y en avoir plus de six remplis de bleuets des beignets?

22. Trouvez n si

a) $P(n, 2) = 110$. **b)** $P(n, n) = 5040$.

c) $P(n, 4) = 12\, P(n, 2)$.

23. Trouvez n si

a) $C(n, 2) = 45$. **b)** $C(n, 3) = P(n, 2)$.

c) $C(n, 5) = C(n, 2)$.

24. Montrer que si n et r sont des entiers non négatifs et $n \geq r$, ensuite

$P(n + 1, r) = P(n, r)(n + 1) / (n + 1 - r)$.

∗ **25.** Supposons que S soit un ensemble avec n éléments. Combien commandé les paires (A, B) sont telles que A et B sont des sous-ensembles de S avec $A \subseteq B$? [*Astuce:* montrer que chaque élément de S appartient à A, $B - A$ ou $S - B$.]

26. Donner une preuve combinatoire du corollaire 2 de la section 6.4 en établissant une correspondance entre les sous-ensembles d'un

dans chaque sous-ensemble A_i, il y a des éléments qui ont été assigné chaque couleur. Soit $m(d)$ le plus grand entier tel que chaque collection de moins de $m(d)$ fixe chaque con-La coloration des éléments d est bicolore.

a) Montrer que la collection de tous les sous-ensembles avec d éléments d'un ensemble S avec $2d - 1$ éléments n'est pas bicolore.

b) Montrez que $m(2) = 3$.

∗∗ **c)** Montrer que $m(3) = 7$. [*Astuce:* Montrer que la collection tion $\{1, 3, 5\}$, $\{1, 2, 6\}$, $\{1, 4, 7\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{2, 5, 7\}$, $\{3, 6, 7\}$, $\{4, 5, 6\}$ n'est pas bicolore. Montrez ensuite que défini avec un nombre pair d'éléments et les sous-ensembles de cet ensemble avec un nombre impair d'éléments. [*Indice:* prenez un ement *un* dans l'ensemble. Mettre en place la correspondance en mettant *un* dans le sous-ensemble s'il n'est pas déjà dedans et le retirer s'il est dans le sous-ensemble.]

27. Soit n et r *des* entiers avec $1 \leq r < n$. Montre CA

$C(n, r - 1) = C(n + 2, r + 1)$

$-2C(n + 1, r + 1) + C(n, r + 1)$.

28. Prouver en utilisant l'induction mathématique que $\sum_{j=2}^{n} C(j, 2) = C(n + 1, 3)$ chaque fois que n est un entier supérieur à 1.

29. Montrer que si n est un entier alors

$$\sum_{k=0}^{n} 3^k \binom{n}{k} = 4^n .$$

30. Montrez que $\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} 1 = \binom{n}{2}$ si n est un entier avec $n \geq 2$.

31. Montrez que $\sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} 1 = \binom{n}{3}$ si n est un teger avec $n \geq 3$.

32. Dans cet exercice, nous allons dériver une formule pour la somme de les carrés des n plus petits entiers positifs. Nous allons compter le nombre de triplets (i, j, k) où i , j et k sont entiers tels que $0 \leq i < k$, $0 \leq j < k$ et $1 \leq k \leq n$ de deux façons.

a) Montrer qu'il existe k^2 de ces triplets avec un k fixe . Déduce qu'il y a $\sum_{k=1}^{n} k^2$ de tels triplets.

b) Montrer que le nombre de ces triplets avec $0 \leq i < j < k$ et le nombre de ces triplets avec $0 \leq j < i < k$ égal à $C(n + 1, 3)$.

c) Montrer que le nombre de ces triplets avec $0 \leq i = j < k$ est égal à $C(n + 1, 2)$.

d) Combiner la partie (a) avec les parties (b) et (c), conclure cette

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 2C(n + 1, 3) + C(n + 1, 2)$$

$$= n(n + 1)(2n + 1)/6 .$$

∗ **33.** Combien de chaînes de bits de longueur n , où $n \geq 4$, contiennent exactement deux occurrences de 01?

34. Soit S un ensemble. Nous disons qu'une collection de ensembles $A_1, A_2, ..., A_n$ contenant chacun d éléments, où $d \geq 2$, est *bicolore* s'il est possible d'attribuer à chaque élément de S *l'* une des deux couleurs différentes de sorte que toutes les collections de six ensembles de trois éléments sont 2 couleurs.]

35. Un professeur écrit 20 questions à choix multiples, chacune avec la réponse possible a , b , c ou d , pour un discret test de mathématiques. Si le nombre de questions avec a , b , c , et d comme leur réponse est 8, 3, 4 et 5, respectivement, comment de nombreuses réponses différentes sont possibles, si les questions peut être placé dans n'importe quel ordre?

36. Combien d'arrangements différents existe-t-il pour huit personnes assis à une table ronde, où deux arrangements sont considéré comme le même si l'un peut être obtenu de l'autre par une rotation?

37. De combien de façons existe-t-il d'affecter 24 élèves à cinq conseillers pédagogiques?

38. De combien de façons existe-t-il de choisir une douzaine de pommes boisseau contenant 20 pommes Delicious indiscernables, 20 pommes Macintosh indiscernables et 20 pommes indistinctes pommes Granny Smith, si au moins trois de chaque doit être choisi?

39. Combien de solutions existe-t-il pour l'équation $x_1 + x_2 + x_3 = 17$, où x_1 , x_2 et x_3 sont des entiers non négatifs avec

a) $x_1 > 1$, $x_2 > 2$ et $x_3 > 3$?

b) $x_1 < 6$ et $x_3 > 5$?

c) $x_1 < 4$, $x_2 < 3$ et $x_3 > 5$?

40. a) Combien de chaînes différentes peuvent être faites à partir du mot *PEPPERCORN* lorsque toutes les lettres sont utilisées?

b) Combien de ces chaînes commencent et finissent par le lettre P ?

c) Dans combien de ces chaînes sont les trois lettres P s consécutif?

41. Combien de sous-ensembles d'un ensemble de dix éléments

a) a moins de cinq éléments?

b) a plus de sept éléments?

c) avoir un nombre impair d'éléments?

42. Un témoin d'un délit de fuite a déclaré à la police que la plaque d'immatriculation de la voiture dans l'accident, qui contient trois lettres suivies de trois chiffres, commence par la lettre teurs *AS* et contient à la fois les chiffres 1 et 2. Combien différentes plaques d'immatriculation peuvent correspondre à cette description?

43. De combien de façons existe-t-il de mettre n objets identiques m des conteneurs distincts pour qu'aucun conteneur ne soit vide?

44. Combien y a-t-il de façons de faire asseoir six garçons et huit filles dans une rangée de chaises de sorte qu'il n'y ait pas deux garçons assis à côté de L'une et l'autre?

45. Combien y a-t-il de façons de distribuer six objets à cinq boîtes si

52. Combien de séquences d'ARN à 11 éléments se composent de 4 As, 3C, 2U et 2G et se terminent par CAA?

a) les objets et les boîtes sont étiquetés?

b) les objets sont étiquetés, mais les boîtes ne sont pas étiquetées?

c) les objets ne sont pas étiquetés, mais les boîtes sont étiquetées?

d) les objets et les boîtes ne sont pas étiquetés?

46. De combien de façons existe-t-il de répartir cinq objets six cases si

a) les objets et les boîtes sont étiquetés?

b) les objets sont étiquetés, mais les boîtes ne sont pas étiquetées?

c) les objets ne sont pas étiquetés, mais les boîtes sont étiquetées?

d) les objets et les boîtes ne sont pas étiquetés?

Le **nombre de Stirling sans signe du premier type** $c(n, k)$, où k et n sont des entiers avec $1 \leq k \leq n$, est égal au nombre de façons d'organiser n personnes autour de k tables circulaires avec au au moins une personne assise à chaque table, où deux sièges *m les* gens autour d'une table circulaire sont considérés comme les mêmes si tout le monde a le même voisin de gauche et le même voisin de droite bor.

47. Trouvez ces nombres Stirling sans signe du premier type.

a) c (3,2) **b)** c (4,2)

c) c (4,3) **d)** c (5,4)

48. Montrer que si n est un entier positif, alors $\sum_{j=1}^{n} c(n, j) = n!$.

49. Montrer que si n est un entier positif avec $n \geq 3$, alors $c(n, n-2) = (3n-1)\,C(n, 3)/4$.

∗ **50.** Montrer que si n et k sont des entiers avec $1 \leq k < n$, alors $c(n+1, k) = c(n, k-1) + nc(n, k)$.

51. Donnez une preuve combinatoire que 2^n divise n ! chaque fois que n est un entier encore positif. [*Astuce:* utilisez le théorème 3 dans tion 6.5 pour compter le nombre de permutations de $2n$ objets où il y a deux objets indiscernables de n différences différents types.

Les exercices 53 et 54 sont basés sur une discussion dans [RoTe09].

Une méthode utilisée dans les années 1960 pour séquencer les chaînes d'ARN utilisées des enzymes pour briser les chaînes après certains maillons. Certaines enzymes briser les chaînes d'ARN après chaque lien G, tandis que d'autres les brisent après chaque lien C ou U. En utilisant ces enzymes, il est parfois possible de séquencer correctement toutes les bases d'une chaîne d'ARN.

∗ **53.** Supposons que lorsqu'une enzyme qui rompt les chaînes d'ARN après ter chaque maillon G est appliqué à une chaîne de 12 maillons, les fragments obtenus sont G, CCG, AAAG et UCCG, et lorsqu'un enzyme qui rompt les chaînes d'ARN après chaque liaison C ou U est appliqué, les fragments obtenus sont C, C, C, C, GGU, et GAAAG. Pouvez-vous déterminer l'ensemble de l'ARN à 12 liaisons chaîne à partir de ces deux ensembles de fragments? Si oui, qu'est-ce que c'est Chaîne d'ARN?

∗ **54.** Supposons que lorsqu'une enzyme qui rompt les chaînes d'ARN après ter chaque maillon G est appliqué à une chaîne de 12 maillons, les fragments obtenus sont AC, UG et ACG et lorsqu'une enzyme qui rompt les chaînes d'ARN après l'application de chaque liaison C ou U, les fragments obtenus sont U, GAC et GAC. Peut tu déterminer la chaîne d'ARN entière de ces deux ensembles de des fragments? Si oui, quelle est cette chaîne d'ARN?

55. Concevoir un algorithme pour générer toutes les r- permutations d'un ensemble fini lorsque la répétition est autorisée.

56. Concevoir un algorithme pour générer toutes les combinaisons R d'un ensemble fini lorsque la répétition est autorisée.

∗ **57.** Montrer que si m et n sont des entiers avec $m \geq 3$ et $n \geq 3$, alors $R(m, n) \leq R(m, n-1) + R(m-1, n)$.

∗ **58.** Montrer que $R(3, 4) \geq 7$ en montrant que dans un groupe de six les gens, où deux personnes sont des amis ou des ennemis, il ne sont pas nécessairement trois amis mutuels ou quatre emies.

Projets informatiques

Écrivez des programmes avec ces entrées et sorties.

1. Étant donné un entier positif n et un entier non négatif non dépassant n, trouver le nombre de r- permutations et r -combinaisons d'un ensemble avec n éléments.

2. Étant donné les entiers positifs n et r, trouvez le nombre de r -permutations lorsque la répétition est autorisée et r -com- combinaisons lorsque la répétition est autorisée d'un ensemble avec n el- ements.

3. Étant donné une séquence d'entiers positifs, trouvez le plus long plissement et la plus longue sous-séquence décroissante de la séquence.

∗ **4.** Étant donné une équation $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = C$, où C est un constante, et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des entiers non négatifs, liste toutes les solutions.

5. Étant donné un entier positif n, énumérez toutes les permutations du mettre $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ dans l'ordre lexicographique.

6. Étant donné un entier positif n et un entier non négatif r n'excédant pas n, énumérer toutes les combinaisons r de l'ensemble $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ dans l'ordre lexicographique.

7. Étant donné un entier positif n et un entier non négatif r ne dépassant pas n, énumérer toutes les r- permutations de l'ensemble $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ dans l'ordre lexicographique.

8. Étant donné un entier positif n, énumérez toutes les combinaisons des définir $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

9. Étant donné les entiers positifs n et r, énumérer toutes les r- permutations, avec répétition autorisée, de l'ensemble $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

10. Étant donné les entiers positifs n et r, énumérer toutes les combinaisons r, avec répétition autorisée, de l'ensemble $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Calculs et explorations

Utilisez un ou plusieurs programmes informatiques que vous avez écrits pour effectuer ces exercices.

1. Trouvez le nombre de résultats possibles dans un jeu à deux équipes off lorsque le vainqueur est la première équipe à gagner 5 sur 9, 6 sur 11, 7 sur 13 et 8 sur 15.

2. Quels coefficients binomiaux sont impairs? Pouvez-vous formuler un conjecture basée sur des preuves numériques?

3. Vérifier que *C (2 n, n)* est divisible par le carré d'un nombre premier, lorsque $n = 1$, 2 , ou 4, pour autant de nombres entiers positifs n que vous pouvez. [Le théorème qui dit que *C (2 n, n)* est divisible par le carré d'un nombre premier avec $n = 1$, 2 , ou 4 a été prouvé en 1996 par Andrew Granville et Olivier Ramaré. Leur la preuve a réglé une conjecture faite en 1980 par Paul Erd˝os et Ron Graham.]

4. Trouvez autant d'entiers impairs n inférieurs à 200 que vous le pouvez pour qui *C (n,* ⌊ *n* / 2⌋ *)* ne sont pas divisible par le carré d'un nombre premier. Formulez une conjecture basée sur vos preuves.

∗ **5.** Pour chaque entier inférieur à 100, déterminez si *C (2 n, n)* est divisible par 3. Pouvez-vous formuler une conjecture qui raconte us pour quels entiers n le coefficient binomial *C (2 n, n)* est divisible par 3 sur la base des chiffres de la base trois expansion de n ?

6. Générez toutes les permutations d'un ensemble à huit éléments.

7. Générez toutes les 6 permutations d'un ensemble de neuf éléments.

8. Générez toutes les combinaisons d'un ensemble avec huit éléments.

9. Générez toutes les 5 combinaisons avec répétition autorisée d'un sertie de sept éléments.

Projets d'écriture

Répondez à ces questions par des essais en utilisant des sources extérieures.

1. Décrivez quelques-unes des premières utilisations du principe de Dirichlet et d'autres mathématiciens.

2. Discuter des façons dont la numérotation téléphonique actuelle le plan peut être étendu pour répondre à la demande rapide pour plus de numéros de téléphone. (Voyez si vous pouvez en trouver des propositions émanant du secteur des télécommunications secteur.) Pour chaque nouveau plan de numérotation dont vous discutez, comment trouver le nombre de numéros de téléphone différents, il les soutiens.

3. Discuter de l'importance du raisonnement combinatoire dans le gène séquençage et problèmes connexes impliquant des génomes.

4. De nombreuses identités combinatoires sont décrites dans ce livre. Trouvez quelques sources de telles identités et décrivez les identités combinatoires en plus de celles déjà introduites dans ce livre. Donnez des preuves représentatives, y compris combinatoires, de certaines de ces identités.

5. Décrivez les différents modèles utilisés pour modéliser répartition des particules en mécanique statistique, y compris Maxwell – Boltzmann, Bose – Einstein et Fermi – Dirac statistiques. Dans chaque cas, décrivez les techniques de comptage utilisé dans le modèle.

6. Définissez les nombres de Stirling du premier type et décrivez certaines de leurs propriétés et les identités qu'ils satisfont.

7. Décrivez quelques-unes des propriétés et des identités les nombres linguistiques du deuxième type satisfont, y nection entre les nombres de Stirling du premier et du second sortes.

8. Décrire les dernières découvertes de valeurs et de limites pour Numéros de Ramsey.

9. Décrire des moyens supplémentaires de générer toutes les permutations d'un ensemble avec n éléments en plus de ceux trouvés dans la section 6.6. Comparez ces algorithmes et les algorithmes décrits dans le texte et les exercices de la section 6.6 en termes de leur complexité informatique.

10. Décrivez au moins une façon de générer toutes les partitions de un entier positif n . (Voir l'exercice 47 à la section 5.3.)

CHAPITRE

Probabilité discrète

7.1 Un Introduction à Discret Probabilité

7.2 Probabilité Théorie

7.3 Bayes Théorème

7.4 Valeur attendue et variance

La combinatoire et la théorie des probabilités ont des origines communes. La théorie de la probabilité était développé pour la première fois il y a plus de 300 ans, lorsque certains jeux de hasard ont été analysés. Bien que la théorie des probabilités ait été à l'origine inventée pour étudier le jeu, elle joue maintenant un rôle essentiel rôle dans une grande variété de disciplines. Par exemple, la théorie des probabilités est largement appliquée dans l'étude de la génétique, où elle peut être utilisée pour aider à comprendre l'hérédité des traits. Bien sûr, la probabilité reste une partie extrêmement populaire des mathématiques en raison de son applicabilité au jeu, qui continue d'être une entreprise humaine extrêmement populaire.

En informatique, la théorie des probabilités joue un rôle important dans l'étude de la plexité des algorithmes. En particulier, les idées et les techniques de la théorie des probabilités sont utilisées pour déterminer la complexité moyenne des cas des algorithmes. Des algorithmes probabilistes peuvent être utilisés pour résoudre de nombreux problèmes qui ne peuvent pas être résolus facilement ou pratiquement par des algorithmes déterministes. Dans un algorithme probabiliste, au lieu de toujours suivre les mêmes étapes quand on leur donne le même entrée, comme le fait un algorithme déterministe, l'algorithme fait un ou plusieurs choix aléatoires, ce qui peut conduire à une sortie différente. En combinatoire, la théorie des probabilités peut même être utilisée pour montrent qu'il existe des objets avec certaines propriétés. La méthode probabiliste, une technique en com- binatorics introduite par Paul Erd˝os et Alfréd Rényi, montre qu'un objet avec un existe en montrant qu'il existe une probabilité positive qu'un objet construit de façon aléatoire a cette propriété. La théorie des probabilités peut nous aider à répondre à des questions qui comportent de l'incertitude, comme comme déterminant si nous devons rejeter un message électronique entrant comme spam sur la base des mots qui apparaissent dans le message.

Une introduction à la probabilité discrète

introduction

La théorie des probabilités remonte à 1526 lorsque le mathématicien, médecin et joueur italien Girolamo Cardano a écrit le premier traitement systématique connu du sujet dans son livre *Liber de Ludo Aleae* (*Livre sur les jeux de hasard*). (Ce livre n'a été publié qu'en 1663, ce qui peut avoir freiné le développement de la théorie des probabilités.) Au XVIIe siècle, Le mathématicien français Blaise Pascal a déterminé les chances de gagner des paris populaires en fonction sur le résultat lorsqu'une paire de dés est lancée à plusieurs reprises. Au XVIIIe siècle, les Français mathématicien Laplace, qui a également étudié le jeu, a défini la probabilité d'un événement comme nombre de résultats positifs divisé par le nombre de résultats possibles. Par exemple, le probabilité qu'un dé monte un nombre impair quand il est lancé est le nombre de succès résultats - à savoir, le nombre de façons dont il peut arriver impair - divisé par le nombre de possibles résultats, à savoir le nombre de façons différentes dont le dé peut surgir. Il y a un total de six résultats possibles , à savoir, 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , et 6 et exactement trois d' entre elles sont réussies résultats, à savoir 1, 3 et 5. Par conséquent, la probabilité que le dé monte un nombre impair est $3/6 = 1/2$. (Notez qu'il a supposé que tous les résultats possibles sont également probables, ou, en d'autres termes, que le dé est juste.)

Dans cette section, nous nous limiterons aux expériences qui ont un nombre fini, tout aussi probable, résultats. Cela nous permet d'utiliser la définition de Laplace de la probabilité d'un événement. Nous allons continuer notre étude de probabilité dans la section 7.2, où nous étudierons des expériences avec de nombreux résultats qui ne sont pas nécessairement aussi probables. Dans la section 7.2, nous présenterons également certains concepts clés de la théorie des probabilités, y compris la probabilité conditionnelle, l'indépendance événements et variables aléatoires. Dans la section 7.4, nous présenterons les concepts de l'attente et variance d'une variable aléatoire.

Probabilité finie

Une **expérience** est une procédure qui donne l'un d'un ensemble donné de résultats possibles. L' **échantillon l'espace** de l'expérience est l'ensemble des résultats possibles. Un **événement** est un sous-ensemble de l'échantillon espace. Définition de Laplace de la probabilité d'un événement avec un nombre fini de résultats possibles va maintenant être indiqué.

DÉFINITION 1 Si S est un espace échantillon non vide fini de résultats également probables, et E est un événement, cela est, un sous-ensemble de S , alors la *probabilité* de E est $p(E) = \frac{|E|}{|S|}$.

La probabilité d'un l'événement ne peut jamais être négatif ou supérieur à un!

Selon la définition de Laplace, la probabilité d'un événement est comprise entre 0 et 1. Pour voir cela, notons que si E est un événement d'un espace d'échantillon fini S , alors $0 \leq |E| \leq |S|$, parce que $E \subseteq S$. Ainsi, $0 \leq p(E) = |E| / |S| \leq 1$.

Les exemples 1 à 7 illustrent comment la probabilité d'un événement est trouvée.

EXEMPLE 1 Une urne contient quatre boules bleues et cinq boules rouges. Quelle est la probabilité qu'une balle choisie à aléatoire de l'urne est bleu?

Solution: pour calculer la probabilité, notez qu'il y a neuf résultats possibles et quatre de ces résultats possibles produisent une boule bleue. Par conséquent, la probabilité qu'une balle bleue soit choisie est égal à $4 / 9$. ▲

EXEMPLE 2 Quelle est la probabilité que lorsque deux dés sont lancés, la somme des nombres sur les deux dés est 7?

Solution: Il y a un total de 36 résultats possibles tout aussi probables lorsque deux dés sont lancés. (La règle du produit peut être utilisée pour voir ceci; parce que chaque dé a six résultats possibles, le total

GIROLAMO CARDANO (1501-1576) Cardano, né à Pavie, en Italie, était l'enfant illégitime de Fazio Cardano, avocat, mathématicien et ami de Léonard de Vinci, et Chiara Micheria, une jeune veuve. Malgré la maladie et la pauvreté, Cardano a pu étudier dans les universités de Pavie et Padoue, d'où il a obtenu son diplôme de médecine. Cardano n'a pas été accepté au Collège des médecins de Milan en raison de son naissance illégitime, ainsi que son excentricité et son style de confrontation. Néanmoins, ses compétences médicales étaient très apprécié. L'une de ses principales réalisations en tant que médecin est la première description de la fièvre typhoïde.

Cardano a publié plus de 100 livres sur un large éventail de sujets, y compris la médecine, le naturel sciences, mathématiques, jeux d'argent, inventions et expériences physiques et astrologie. Il a également écrit un fascinant autobiographie. En mathématiques, le livre de Cardano *Ars Magna* , publié en 1545, a jeté les bases de algèbre abstraite. C'était le livre le plus complet sur l'algèbre abstraite depuis plus d'un siècle; il présente de nombreuses idées nouvelles de Cardano et d'autres, y compris des méthodes pour résoudre des équations cubiques et quartiques à partir de leurs coefficients. Cardano a également réalisé plusieurs contributions importantes à la cryptographie. Cardano était un défenseur de l'éducation pour les sourds, croyant, contrairement à ses contemporains, que les personnes sourdes pouvaient apprendre à lire et à écrire avant d'apprendre à parler, et pouvaient utiliser leur esprit aussi bien qu'entendre les gens.

Cardano manquait souvent d'argent. Cependant, il s'est maintenu solvable en jouant et en gagnant de l'argent en battant les autres aux échecs. Son livre sur les jeux de hasard, *Liber de Ludo Aleae* , écrit en 1526 (mais publié en 1663), offre la première systématique traitement des probabilités; il décrit également des moyens efficaces de tricher. Cardano était considéré comme un homme de caractère moral douteux; il était souvent décrit comme un menteur, un joueur, un lecher et un hérétique.

nombre de résultats lorsque deux dés sont lancés est $6^2 = 36$.) Il y a six résultats réussis, à savoir, $(1, 6)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(5, 2)$ et $(6, 1)$, où les valeurs des première et deuxième les dés sont représentés par une paire ordonnée. Par conséquent, la probabilité qu'un sept apparaisse lorsque deux dés justes sont laminées est de $6/36 = 1/6$. ▲

Les loteries sont extrêmement populaires dans le monde. Nous pouvons facilement calculer les chances de gagner différents types de loteries, comme illustré dans les exemples 3 et 4. (L'étrange de gagner le les loteries populaires Mega Millions et Powerball sont étudiées dans les exercices supplémentaires.)

EXEMPLE 3 Dans une loterie, les joueurs gagnent un gros lot en choisissant quatre chiffres qui correspondent, dans le bon ordre, quatre chiffres sélectionnés par un processus mécanique aléatoire. Un plus petit prix est gagné si seulement trois chiffres sont appariés. Quelle est la probabilité qu'un joueur remporte le gros lot? Quelle est la probabilité qu'un joueur gagne le petit prix?

Solution: Il n'y a qu'une seule façon de choisir correctement les quatre chiffres. Par la règle du produit, il sont $10^4 = 10,000$ façons de choisir quatre chiffres. Par conséquent, la probabilité qu'un joueur remporte le grand prix est de $1/$dix$, 000 = 0.0001$.

Les joueurs gagnent le plus petit prix lorsqu'ils choisissent correctement exactement trois des quatre chiffres. Exactement un chiffre doit être faux pour obtenir trois chiffres corrects, mais pas tous les quatre corrects. Par la somme règle, pour trouver le nombre de façons de choisir exactement trois chiffres correctement, nous ajoutons le nombre de façons de choisir quatre chiffres correspondant aux chiffres choisis dans toutes sauf la i ème position, pour $i = 1, 2, 3, 4$.

Pour compter le nombre de succès avec le premier chiffre incorrect, notez qu'il y a neuf choix possibles pour le premier chiffre (tous sauf le bon chiffre) et un choix pour chacun des d'autres chiffres, à savoir les chiffres corrects pour ces emplacements. Par conséquent, il y a neuf façons de choisir quatre chiffres où le premier chiffre est incorrect, mais les trois derniers sont corrects. De même, il y a neuf façons de choisir quatre chiffres où le deuxième chiffre est incorrect, neuf avec le troisième chiffre incorrect, et neuf avec le quatrième chiffre incorrect. Par conséquent, il y a un total de 36 façons de choisir quatre chiffres avec exactement trois des quatre chiffres corrects. Ainsi, la probabilité qu'un joueur gagne le plus petit prix est de $36/10, 000 = 9/$2,5 mille $= 0.0036$. ▲

EXEMPLE 4 Il existe maintenant de nombreuses loteries qui accordent des prix énormes aux personnes qui choisissent correctement un ensemble de six nombres sur les n premiers entiers positifs, où n est généralement compris entre 30 et 60. Ce est la probabilité qu'une personne choisisse les six bons nombres sur 40?

Solution: Il n'y a qu'une seule combinaison gagnante. Le nombre total de façons de choisir six un nombre sur 40 est

$$C(40, 6) = \frac{40!}{34!\,6!} = 3,838,380.$$

Par conséquent, la probabilité de choisir une combinaison gagnante est de $1/3,838,380 \approx 0.00000026$. (Ici, le symbole $\approx$ signifie approximativement égal à.) ▲

PIERRE-SIMON LAPLACE (1749–1827) Pierre-Simon Laplace est issu de modestes origines normandes. Dans son enfance, il a fait ses études dans une école dirigée par les Bénédictins. A 16 ans il entre à l'Université de Caen l'intention d'étudier la théologie. Cependant, il s'est vite rendu compte que ses véritables intérêts étaient les mathématiques. Après avoir complété ses études, il a été nommé professeur provisoire à Caen, et en 1769, il est devenu professeur de mathématiques à l'École militaire de Paris.

Laplace est surtout connu pour ses contributions à la mécanique céleste, à l'étude des mouvements du corps céleste. ies. Son *Traité de Mécanique Céleste* est considéré comme l'un des plus grands travaux scientifiques du début du XIXe siècle. tury. Laplace a été l'un des fondateurs de la théorie des probabilités et a apporté de nombreuses contributions à la statistique mathématique. tics. Son travail dans ce domaine est documenté dans son livre *Théorie Analytique des Probabilités* , dans lequel il définit la probabilité d'un événement comme le rapport du nombre de résultats favorables au nombre total de résultats d'une expérience.

Laplace était célèbre pour sa flexibilité politique. Il était fidèle, successivement, à la République française, à Napoléon et au roi Louis XVIII. Cette flexibilité lui a permis d'être productif avant, pendant et après la Révolution française.

Le poker et d'autres jeux de cartes gagnent en popularité.Pour gagner à ces jeux, il est utile de connaître la probabilité de mains différentes.Nous pouvons trouver la probabilité de mains spécifiques qui se posent dans les jeux de cartes en utilisant les techniques développées jusqu'à présent.Un jeu de cartes contient 52 cartes. Là sont 13 différents types de cartes, avec quatre cartes de chaque type.(Parmi les termes couramment utilisés au lieu de «genre» sont «rang», «valeur nominale», «dénomination» et «valeur».) Ces types sont deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, des dizaines, des crics, des reines, des rois et des as.Il y a également quatre costumes: pique, massues, coeurs et diamants, chacun contenant 13 cartes, avec une carte de chaque type dans un costume. Dans de nombreux jeux de poker, une main se compose de cinq cartes.

EXEMPLE 5 Trouvez la probabilité qu'une main de cinq cartes au poker contienne quatre cartes d'un même type.

Solution: selon la règle du produit, le nombre de mains de cinq cartes avec quatre cartes d'un même type est le produit du nombre de façons de choisir un type, du nombre de façons de choisir les quatre ce type sur les quatre dans le jeu de ce type, et le nombre de façons de choisir la cinquième carte. C'est

$$C(13,1)\,C(4,4)\,C(48,1).$$

Dans l'exemple 11 de la section 6.3, il y a $C(52,5)$ mains différentes de cinq cartes. D'où le la probabilité qu'une main contienne quatre cartes d'un même type est

$$\frac{C(13,1)\,C(4,4)\,C(48,1)}{C(52,5)} = \frac{13 \cdot 1 \cdot 48}{2,598,960} \approx 0.00024.$$

▲

EXEMPLE 6 Quelle est la probabilité qu'une main de poker contienne un full, c'est-à-dire trois d'un même type et deux d'un autre genre?

Solution: selon la règle du produit, le nombre de mains contenant une maison pleine est le produit du nombre de façons de choisir deux types dans l'ordre, le nombre de façons de choisir trois sur quatre pour le premier type et le nombre de façons d'en choisir deux sur quatre pour le second.(Notez que l'ordre des deux types compte, parce que, par exemple, trois reines et deux as sont différents de trois as et deux reines.) Nous voyons que le nombre de mains contenant une maison pleine est

$$P(13,2)\,C(4,3)\,C(4,2) = 13 \cdot 12 \cdot 4 \cdot 6 = 3744.$$

Parce qu'il y a $C(52,5) = 2,598,960$ mains de poker, la probabilité d'un full est

$$\frac{3744}{2,598,960} \approx 0.0014.$$

▲

EXEMPLE 7 Quelle est la probabilité que les nombres 11, 4, 17, 39 et 23 soient tirés dans cet ordre à partir d'un bac contenant 50 billes étiquetées avec les chiffres $1, 2, \ldots, 50$ si (a) la balle sélectionnée n'est pas retournée dans le bac avant que la balle suivante ne soit sélectionnée et (b) la balle sélectionnée est retournée dans le bac avant la balle suivante est sélectionnée?

Solution: (a) Selon la règle du produit, il existe $50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 = 254,251,200$ façons de sélectionner les balles parce qu'à chaque fois qu'une balle est tirée, il y a une balle de moins à choisir.Par conséquent, la probabilité que 11, 4, 17, 39 et 23 sont tirées dans cet ordre est de $1/254,251,200$. Ceci est un exemple d' **échantillonnage sans remplacement** .

(b) Selon la règle du produit, il y a $50^5 = 312,500,000$ façons de sélectionner les boules car il y a 50 balles possibles au choix à chaque fois qu'une balle est tirée.Par conséquent, la probabilité que 11, 4, 17, 39 et 23 sont tirées dans cet ordre est de $1/312,500,000$. Ceci est un exemple d' **échantillonnage avec remplacement** .

▲

Probabilités de compléments et d'unions d'événements

Nous pouvons utiliser des techniques de comptage pour trouver la probabilité d'événements dérivés d'autres événements.

THÉORÈME 1 Que E soit un événement dans un espace échantillon S. La probabilité de l'événement $E = S - E$, le complément événement mentaire de E, est donné par

$$p(E) = 1 - p(E).$$

Preuve: Pour trouver la probabilité de l'événement $E = S - E$, notez que $|E| = |S| - |E|$. Par conséquent,

$$p(E) = \frac{|S| - |E|}{|S|} = 1 - \frac{|E|}{|S|} = 1 - p(E).$$

Il existe une stratégie alternative pour trouver la probabilité d'un événement lorsqu'une approche directe ne fonctionne pas bien. Au lieu de déterminer la probabilité de l'événement, la probabilité de son complément peut être trouvé. C'est souvent plus facile à faire, comme le montre l'exemple 8.

EXEMPLE 8 Une séquence de 10 bits est générée aléatoirement. Quelle est la probabilité qu'au moins un de ces bits est 0?

Solution: Soit E l'événement au moins un des 10 bits égal à 0. Alors E est l'événement selon lequel tous les les bits sont 1s. Parce que l'espace d'échantillonnage S est l'ensemble de toutes les chaînes de bits de longueur 10, il s'ensuit que

$$p(E) = 1 - p(E) = 1 - \frac{|E|}{|S|} = 1 - \frac{1}{2^{10}}$$

$$= 1 - \frac{1}{1024} = \frac{1023}{1024}.$$

Par conséquent, la probabilité que la chaîne de bits contiendra au moins un bit 0 est 1023/ 1024. Il est tout à fait difficile de trouver cette probabilité directement sans utiliser le théorème 1. ▲

Nous pouvons également trouver la probabilité de l'union de deux événements.

THÉORÈME 2 Laissez E_1 et E_2 soit des événements dans l'espace échantillon S. alors

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2).$$

Preuve: Utilisation de la formule donnée à la section 2.2 pour le nombre d'éléments dans l'union de deux ensembles, il s'ensuit que

$$|E_1 \cup E_2| = |E_1| + |E_2| - |E_1 \cap E_2|.$$

Par conséquent,

$$p(E_1 \cup E_2) = \frac{|E_1 \cup E_2|}{|S|}$$

$$= \frac{|E_1| + |E_2| - |E_1 \cap E_2|}{|S|}$$

$$= \frac{|E_1|}{|S|} + \frac{|E_2|}{|S|} - \frac{|E_1 \cap E_2|}{|S|}$$

$$= p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2).$$

EXEMPLE 9 Quelle est la probabilité qu'un entier positif sélectionné au hasard dans l'ensemble des entiers positifs n'excédant pas 100 est divisible par 2 ou 5?

Solution: Soit E_1 l'événement où l'entier sélectionné au hasard est divisible par 2, et soit E_2 soit l'événement qu'il est divisible par 5. Alors $E_1 \cup E_2$ est l'événement qu'il est divisible par 2 ou 5. De plus, $E_1 \cap E_2$ est l'événement qu'il est divisible par 2 et 5, ou de manière équivalente, qu'il est divisible par 10. Parce que $|E_1| = 50$, $|E_2| = 20$, et $|E_1 \cap E_2| = 10$, il s'ensuit que

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2)$$

$$= \frac{50}{100} + \frac{20}{100} - \frac{\text{dix}}{100} = \frac{3}{5}.$$

▲

Raisonnement probabiliste

Un problème courant consiste à déterminer lequel des deux événements est le plus probable. Analyser la probabilité Les événements de ce type peuvent être délicats. L'exemple 10 décrit un problème de ce type. Il discute d'un célèbre problème provenant du jeu télévisé *Let's Make a Deal* et nommé d'après l'hôte de l'émission, Monty Hall.

EXEMPLE 10 **Le casse-tête à trois portes de Monty Hall** Supposons que vous participiez à un jeu télévisé. Tu as un chance de gagner un grand prix. Vous êtes invité à sélectionner l'une des trois portes à ouvrir; le gros lot est derrière l'une des trois portes et les deux autres portes sont perdantes. Une fois que vous avez sélectionné une porte, l'hôte du jeu télévisé, qui sait ce qui se trouve derrière chaque porte, fait ce qui suit. Premièrement, que ce soit ou non vous avez sélectionné la porte gagnante, il ouvre l'une des deux autres portes qu'il sait être perdante porte (sélection au hasard si les deux perdent des portes). Il vous demande ensuite si vous souhaitez passer les portes. Quelle stratégie devez-vous utiliser? Si vous changez de porte ou conservez votre original sélection, ou n'a-t-il pas d'importance?

Solution: la probabilité que vous sélectionniez la bonne porte (avant que l'hôte n'ouvre une porte et ne vous demande si vous voulez changer) est de $1/3$, parce que les trois portes sont également susceptibles d'être la bonne porte. La probabilité que ce soit la bonne porte ne change pas une fois que l'hôte du jeu télévisé ouvre l'une des autres portes, car il ouvrira toujours une porte que le prix n'est pas derrière.

La probabilité que vous ayez mal sélectionné est la probabilité que le prix soit derrière l'un des deux portes que vous n'avez pas sélectionnées. Par conséquent, la probabilité que vous avez sélectionné est incorrectement $2/3$. Si vous avez mal choisi, lorsque l'hôte du jeu télévisé ouvre une porte pour vous montrer que le prix est pas derrière, le prix est derrière l'autre porte. Vous gagnerez toujours si votre choix initial était incorrect et vous changez de portes. Ainsi, par des portes changeantes, la probabilité que vous gagnez est 2 / 3. Dans d' autres En d'autres termes, vous devez toujours changer de porte lorsque l'hôte du jeu vous en donne la possibilité. Cela double la probabilité de gagner. (Un traitement plus rigoureux de ce puzzle peut être que l'on trouve dans l'exercice 15 de la section 7.3. Pour bien plus sur ce fameux puzzle et ses variations, voir [Ro09].) ▲

Des exercices

1. Quelle est la probabilité qu'une carte sélectionnée au hasard à partir d'un jeu standard de 52 cartes est un as?

2. Quelle est la probabilité qu'un dé équitable arrive à six lorsque c'est roulé?

3. Quelle est la probabilité qu'un entier choisi au hasard choisi parmi les 100 premiers entiers positifs est impair?

4. Quelle est la probabilité qu'un jour choisi au hasard année bissextile (avec 366 jours possibles) est en avril?

5. Quelle est la probabilité que la somme des nombres sur deux dés est égal quand ils sont lancés?

6. Quelle est la probabilité qu'une carte choisie au hasard à partir d'un jeu standard de 52 cartes est un as ou un coeur?

7. Quelle est la probabilité que lorsqu'une pièce est retournée six fois de suite, ça atterrit tête en tête à chaque fois?

8. Quelle est la probabilité qu'une main de poker à cinq cartes tains l'as de cœur?

9. Quelle est la probabilité qu'une main de poker à cinq cartes ne contient pas la reine de cœur?

10. Quelle est la probabilité qu'une main de poker à cinq cartes tains les deux de diamants et les trois de pique?

11. Quelle est la probabilité qu'une main de poker à cinq cartes contient les deux de diamants, les trois de pique, les six de coeurs, les dix clubs et le roi des coeurs?

12. Quelle est la probabilité qu'une main de poker à cinq cartes contient exactement un as?

13. Quelle est la probabilité qu'une main de poker à cinq cartes contient au moins un as?

14. Quelle est la probabilité qu'une main de poker à cinq cartes tains cartes de cinq types différents?

15. Quelle est la probabilité qu'une main de poker à cinq cartes contient deux paires (c'est-à-dire deux de chacun des deux types différents et une cinquième carte d'un troisième type)?

16. Quelle est la probabilité qu'une main de poker à cinq cartes contient une couleur, c'est-à-dire cinq cartes de la même couleur?

17. Quelle est la probabilité qu'une main de poker à cinq cartes contient une ligne droite, c'est-à-dire cinq cartes qui ont consécutives sortes? (Notez qu'un as peut être considéré soit comme le la plus haute carte d'une ligne droite A-2-3-4-5 ou la plus haute 10-JQKA droit.)

23. Quelle est la probabilité qu'un entier positif ne dépasse pas 100 sélectionnés au hasard est divisible par 5 ou 7?

24. Trouvez la probabilité de gagner à une loterie en sélectionnant le corriger six entiers, où l'ordre dans lequel ces entiers sont sélectionnés, peu importe, à partir de l'intégra- gers ne dépassant pas

a) 30. **b)** 36. **c)** 42. **d)** 48.

25. Trouvez la probabilité de gagner à une loterie en sélectionnant le corriger six entiers, où l'ordre dans lequel ces entiers sont sélectionnés, peu importe, à partir de l'intégra- gers ne dépassant pas

a) 50. **b)** 52. **c)** 56. **d)** 60.

26. Trouvez la probabilité de ne sélectionner aucun des six bons tegers dans une loterie, où l'ordre dans lequel ces entiers sont sélectionnés n'a pas d'importance, parmi les entiers positifs non dépassement

a) 40. **b)** 48. **c)** 56. **d)** 64.

27. Trouver la probabilité de sélectionner exactement l'un des bons six entiers dans une loterie, où l'ordre dans lequel ces les entiers sont sélectionnés n'a pas d'importance, du positif nombres entiers ne dépassant pas

a) 40. **b)** 48. **c)** 56. **d)** 64.

28. Dans une superloterie, un joueur sélectionne 7 numéros parmi les 80 premiers entiers positifs. Quelle est la probabilité qu'un personne gagne le grand prix en choisissant 7 numéros qui figurent parmi les 11 numéros sélectionnés au hasard par un ordinateur.

29. Dans une superloterie, les joueurs gagnent une fortune s'ils choisissent huit nombres sélectionnés par un ordinateur parmi les positifs entiers ne dépassant pas 100. Quelle est la probabilité qu'un joueur gagne cette superloterie?

30. Quelle est la probabilité qu'un joueur d'une loterie gagne le prix offert pour avoir choisi correctement cinq (mais pas six) nombres sur six entiers choisis au hasard dans le entiers compris entre 1 et 40, inclus?

31. Supposons que 100 personnes participent à un concours et que différentes les gagnants sont sélectionnés au hasard pour les premier, deuxième et troisième prix. Quelle est la probabilité que Michelle gagne l'un des ces prix si elle fait partie des candidats?

32. Supposons que 100 personnes participent à un concours et que différentes

18. Quelle est la probabilité qu'une main de poker à cinq cartes contient une quinte flush, c'est-à-dire cinq cartes de la même couleur types consécutifs?

∗ **19.** Quelle est la probabilité qu'une main de poker à cinq cartes contient des cartes de cinq types différents et ne contient pas de flush ou une ligne droite?

20. Quelle est la probabilité qu'une main de poker à cinq cartes contient une quinte flush royale, c'est-à-dire le 10, jack, queen, king et as d'un costume?

21. Quelle est la probabilité qu'une mort équitable ne survienne nombre pair quand il est roulé six fois?

22. Quelle est la probabilité qu'un entier positif ne dépasse pas 100 sélectionnés au hasard est divisible par 3?

les gagnants sont sélectionnés au hasard pour les premier, deuxième et troisième prix. Quelle est la probabilité que Kumar, Janice et Pedro chacun gagne un prix si chacun a participé au concours?

33. Quelle est la probabilité que Abby, Barry et Sylvia gagnent premier, deuxième et troisième prix, respectivement, par tirage au sort si 200 personnes participent à un concours et

a) personne ne peut gagner plus d'un prix.
b) gagner plus d'un prix est autorisé.

34. Quelle est la probabilité que Bo, Colleen, Jeff et Rohini gagner les premier, deuxième, troisième et quatrième prix, respectivement, dans un dessin si 50 personnes participent à un concours et

a) personne ne peut gagner plus d'un prix.
b) gagner plus d'un prix est autorisé.

35. À la roulette, une roue à 38 chiffres est tournée. De ce nombre, 18 sont rouges et 18 sont noirs. Les deux autres chiffres, qui ne sont ni noir ni rouge, sont 0 et 00. La probabilité que lorsque la roue tourne, elle atterrit sur un point particulier nombre est égal à $1/38$.

a) Quelle est la probabilité que la roue tombe sur un rouge nombre?

b) Quelle est la probabilité que la roue tombe sur un noir numéro deux fois de suite?

c) Quelle est la probabilité que la roue atterrisse sur 0 ou 00?

d) Quelle est la probabilité qu'en cinq tours la roue atterrit jamais sur 0 ou 00?

e) Quelle est la probabilité que la roue se pose sur l'un des les six premiers nombres entiers sur un tour, mais ne se pose pas sur l'un d'eux lors de la prochaine rotation?

36. Ce qui est plus probable: lancer un total de 8 lorsque deux dés sont lancés ou roulent un total de 8 lorsque trois dés sont lancés?

37. Ce qui est plus probable: lancer un total de 9 lorsque deux dés sont lancés ou roulent un total de 9 lorsque trois dés sont lancés?

38. Deux événements E_1 et E_2 sont appelés **indépendants** si $p(E_1 \cap E_2) = p(E_1)\, p(E_2)$. Pour chacun des éléments suivants paires d'événements, qui sont des sous-ensembles de l'ensemble de résultats bleus quand une pièce est lancée trois fois, déterminez qu'ils soient indépendants ou non.

a) E_1 : la queue arrive avec la pièce est lancée le premier temps; E_2 : les têtes se lèvent lorsque la pièce est lancée deuxième fois.

b) E_1 : la première pièce sort pile; E_2 : deux, et non trois, les têtes se relèvent.

c) E_1 : la deuxième pièce monte en queue; E_2 : deux, et non trois, les têtes se relèvent.

(Nous étudierons plus en détail l'indépendance des événements dans Section 7.2.)

39. Expliquez ce qui ne va pas avec la déclaration selon laquelle Monty Hall Three-Door Puzzle la probabilité que le prix est derrière la première porte que vous sélectionnez et la probabilité que le prix est derrière l'autre des deux portes qui Monty n'a pas ouvert sont à $1/2$, parce qu'il ya deux portes à gauche.

40. Supposons qu'au lieu de trois portes, il y ait quatre portes dans le puzzle de Monty Hall. Quelle est la probabilité que vous gagner en ne changeant pas une fois l'hôte, qui sait ce qui est derrière chaque porte, ouvre une porte perdante et vous donne la chance de changer de porte? Quelle est la probabilité que vous gagner en changeant la porte que vous sélectionnez à l'un des deux portes restantes parmi les trois que vous n'avez pas sélectionnées?

41. Ce problème a été posé par le chevalier de Méré et a été résolu par Blaise Pascal et Pierre de Fermat.

a) Trouvez la probabilité de rouler au moins un six quand un le dé juste est lancé quatre fois.

b) Trouver la probabilité qu'un double six apparaisse au moins une fois quand une paire de dés est lancée 24 fois. Répond à interroger le chevalier de Méré à Pascal demandant si cette probabilité est supérieure à $1/2$.

c) Est-il plus probable qu'un six apparaisse au moins une fois un dé juste est lancé quatre fois ou qu'un double six vient au moins une fois quand une paire de dés est lancée 24 fois?

Théorie des probabilités

introduction

Dans la section 7.1, nous avons introduit la notion de probabilité d'un événement.(Rappelons qu'un événement est un sous-ensemble des résultats possibles d'une expérience.) Nous avons défini la probabilité d'un événement E comme Laplace l'a fait, c'est-à-dire

$$p(E) = \frac{|E|}{|S|},$$

le nombre de résultats dans E divisé par le nombre total de résultats. Cette définition suppose que tous les résultats sont également probables. Cependant, de nombreuses expériences ont des résultats qui ne sont pas tout aussi probable. Par exemple, une pièce de monnaie peut être biaisée de sorte qu'elle remonte deux fois plus souvent que queues. De même, la probabilité que l'entrée d'une recherche linéaire soit un élément particulier d'une liste, ou n'est pas dans la liste, dépend de la façon dont l'entrée est générée. Comment modéliser la probabilité de événements dans de telles situations? Dans cette section, nous montrerons comment définir les probabilités de résultats étudier les probabilités d'expériences où les résultats peuvent ne pas être tout aussi probables.

Supposons qu'une pièce de monnaie équitable soit retournée quatre fois, et la première fois qu'elle monte en tête Donné cette information, quelle est la probabilité que les têtes reviennent trois fois? Pour répondre à cela et

des questions similaires, nous introduirons le concept de *probabilité conditionnelle* . Le fait de savoir que le premier flip arrive les têtes changent la probabilité que les têtes reviennent trois fois? Si non, ces deux événements sont appelés *indépendants* , un concept étudié plus loin dans cette section.

De nombreuses questions portent sur une valeur numérique particulière associée au résultat de une expérience. Par exemple, lorsque nous retournons une pièce 100 fois, quelle est la probabilité que exactement 40 têtes apparaissent? À combien de têtes devrions-nous nous attendre? Dans cette section, nous introduira *des variables aléatoires* , qui sont des fonctions qui associent des valeurs numériques à la résultats des expériences.

Attribution de probabilités

Soit S l'espace d'échantillon d'une expérience avec un nombre fini ou dénombrable de résultats. nous attribuer une probabilité $p(s)$ à chaque résultat s . Nous exigeons que deux conditions soient remplies:

(i) $0 \leq p(s) \leq 1$ pour chaque $s \in S$

et

(ii) $\displaystyle\sum_{s \in S} p(s) = 1$.

La condition (*i*) stipule que la probabilité de chaque résultat est un nombre réel non négatif non supérieur que 1. La condition (*ii*) stipule que la somme des probabilités de tous les résultats possibles doit être 1; c'est-à-dire que lorsque nous faisons l'expérience, il est certain que l'un de ces résultats se produit. (Notez que lorsque l'espace échantillon est infini, $\sum_{s \in S} p(s)$ est une série infinie convergente.) C'est une généralisation de la définition de Laplace dans laquelle chacun des n résultats se voit attribuer une probabilité de $1/n$. En effet, les conditions (i) et (ii) sont remplies lorsque la définition de Laplace des probabilités de des résultats tout aussi probables sont utilisés et S est fini. (Voir l'exercice 4.)

Notez que lorsqu'il y a n résultats possibles, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, les deux conditions à remplir sont

(i) $0 \leq p(x_i) \leq 1$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$

et

(ii) $$\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1 .$$

La fonction p de l'ensemble de tous les résultats de l'espace d'échantillonnage S est appelée une **probabilité distribution** .

Pour modéliser une expérience, la probabilité $p(s)$ attribuée à un résultat s doit être égale à la limite du nombre de fois où s se produit divisé par le nombre de fois que l'expérience est effectuée, que ce nombre augmente sans limite. (Nous supposerons que toutes les expériences discutées ont des résultats prévisibles en moyenne, de sorte que cette limite existe.Nous supposons également que les résultats des essais successifs d'une expérience ne dépendent pas des résultats antérieurs.)

NOTE HISTORIQUE Le chevalier de Méré était un noble français, un joueur célèbre et un bon vivant. Il a réussi à faire des paris avec des cotes légèrement supérieures à $1/2$ (par exemple ayant au moins un six viennent en quatre lancers d'un dé juste). Sa correspondance avec Pascal l'interroge sur la probabilité d'avoir au moins un double six apparaît quand une paire de dés est lancée 24 fois, ce qui a conduit au développement de la théorie des probabilités. Selon un récit, Pascal a écrit à Fermat à propos du Chevalier disant quelque chose comme «C'est un bon gars mais, hélas, ce n'est pas un mathématicien. »

Remarque: Nous ne discuterons pas des probabilités d'événements lorsque l'ensemble des résultats n'est pas fini ou dénombrable, par exemple lorsque le résultat d'une expérience peut être n'importe quel nombre réel.Dans ces cas, le calcul intégral est généralement requis pour l'étude des probabilités d'événements.

Nous pouvons modéliser des expériences dans lesquelles les résultats sont tout aussi probables ou pas aussi probables en choisissant la fonction appropriée $p(s)$, comme l'illustre l'exemple 1.

EXEMPLE 1 Quelles probabilités devons-nous attribuer aux résultats H (têtes) et T (queues) lorsqu'une pièce est équitable est retourné? Quelles probabilités devraient être attribuées à ces résultats lorsque la pièce est biaisée afin que les têtes remontent deux fois plus souvent que les queues?

Solution: pour une pièce équitable, la probabilité que des têtes se lèvent lorsque la pièce est retournée est égale à la probabilité que la queue monte, donc les résultats sont tout aussi probables.Par conséquent, nous attribuons la probabilité de $1/2$ à chacun des deux résultats possibles, qui est, $p(H) = p(T) = 1/2$.

Pour la pièce biaisée, nous avons

$$p(H) = 2p(T).$$

Car

$p(H) + p(T) = 1,$

il s'ensuit que

$2p(T) + p(T) = 3p(T) = 1.$

Nous concluons que $p(T) = 1/3$, et $p(H) = 2/3$. ▲

DÉFINITION 1 Supposons que S soit un ensemble avec n éléments. La *distribution uniforme* attribue la probabilité $1/n$ à chaque élément de S.

Nous définissons maintenant la probabilité d'un événement comme la somme des probabilités des résultats dans cet événement.

DÉFINITION 2 La *probabilité* de l'événement E est la somme des probabilités des résultats dans E. C'est,

$$p(E) = \sum_{s \in E} p(s).$$

(Notez que lorsque E est un ensemble infini, $\sum_{s \in E} p(s)$ est une série infinie convergente.)

Notez que lorsqu'il y a n résultats dans l'événement E, c'est-à-dire si $E = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, alors $p(E) = \sum_{i=1}^{n} p(a_i)$. Notez également que la distribution uniforme attribue la même probabilité à un événement que la définition originale de Laplace de la probabilité attribue à cet événement. L'expérience de sélectionner un élément à partir d'un espace échantillon avec une distribution uniforme est appelé sélection d'un élément de S **au hasard**.

EXEMPLE 2 Supposons qu'un dé soit biaisé (ou chargé) de sorte que 3 apparaisse deux fois plus souvent que chaque autre nombre mais que les cinq autres résultats sont également probables. Quelle est la probabilité qu'un nombre impair apparaît quand on lance ce dé?

Solution: Nous voulons trouver la probabilité de l'événement $E = \{1, 3, 5\}$. Par l'exercice 2, nous avons

$p(1) = p(2) = p(4) = p(5) = p(6) = 1/7; p(3) = 2/7.$

Il s'ensuit que

$p(E) = p(1) + p(3) + p(5) = 1/7 + 2/7 + 1/7 = 4/7.$ ▲

Lorsque les résultats possibles sont tout aussi probables et qu'il existe un nombre fini de vient, la définition de la probabilité d'un événement donnée dans cette section (Définition 2) avec la définition de Laplace (Définition 1 de la section 7.1). Pour voir cela, supposons qu'il n'y ait pas n résultats tout aussi probables; chaque résultat possible a une probabilité de $1/n$, car la somme de leur les probabilités sont 1. Supposons que l'événement E contienne m résultats. Selon la définition 2,

$$p(E) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{n} = \frac{m}{n}.$$

Parce que $|E| = m$ et $|S| = n$, il s'ensuit que

$$p(E) = \frac{m}{n} = \frac{|E|}{|S|}.$$

Ceci est la définition de Laplace de la probabilité de l'événement E .

Probabilités de compléments et d'unions d'événements

Les formules de probabilités de combinaisons d'événements de la section 7.1 continuent de s'appliquer lorsque nous utilisons la définition 2 pour définir la probabilité d'un événement. Par exemple, le théorème 1 de La section 7.1 affirme que

$$p(E) = 1 - p(E),$$

où E est l'événement complémentaire de l'événement E . Cette égalité est également valable lorsque la définition 2 est utilisé. Pour voir cela, notez que parce que la somme des probabilités des n résultats possibles est 1, et chaque résultat est soit en E soit en E , mais pas dans les deux, nous avons

$$\sum_{s \in S} p(s) = 1 = p(E) + p(E).$$

Par conséquent, $p(E) = 1 - p(E)$.

Selon la définition de Laplace, par le théorème 2 de la section 7.1, nous avons

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2)$$

chaque fois que E_1 et E_2 sont des événements dans un espace échantillon S . Cela vaut également lorsque nous définissons le capacité d'un événement comme nous le faisons dans cette section. Pour voir cela, notons que $p(E_1 \cup E_2)$ est la somme de les probabilités des résultats dans $E_1 \cup E_2$. Lorsqu'un résultat x est dans un, mais pas dans les deux, de E_1 et E_2 , $p(x)$ apparaît exactement dans l'une des sommes pour $p(E_1)$ et $p(E_2)$. Quand un le résultat x est à la fois dans E_1 et E_2 , $p(x)$ se produit dans la somme pour $p(E_1)$, dans la somme pour $p(E_2)$, et dans la somme pour $p(E_1 \cap E_2)$, donc cela se produit 1 + 1 - 1 = 1 fois sur le côté droit.Conseiller par conséquent, le côté gauche et le côté droit sont égaux.

Notez également que si les événements E_1 et E_2 sont disjoints, alors $p(E_1 \cap E_2) = 0$, ce qui implique cette

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) + p(E_2).$$

Le théorème 1 généralise cette dernière formule en fournissant une formule pour la probabilité de la union d'événements disjoints par paires.

THÉORÈME 1 Si E_1, E_2, ... est une séquence d'événements disjoints par paire dans un espace échantillon S, alors

$$p\left(\bigcup_{je} E_i\right) = \sum_{je} p(E_i).$$

(Notez que ce théorème s'applique lorsque la séquence E_1, E_2, ... consiste en un nombre fini ou un nombre infiniment comptable d'événements disjoints par paires.)

Nous laissons au lecteur la preuve du théorème 1 (voir exercices 36 et 37).

Probabilite conditionnelle

Supposons que nous lançons une pièce trois fois, et les huit possibilités sont également probables.En outre, supposons que nous sachions que l'événement F, que le premier flip se déclenche, se produit.Compte tenu de ces informations, quelle est la probabilité de l'événement E, qu'un nombre impair de queues apparaisse?Parce que le premier flip monte la queue, il n'y a que quatre résultats possibles: *TTT*, *TTH*, *THT* et *THH*, où *H* et *T* représentent respectivement les têtes et les queues.Un nombre impair de queues n'apparaît que pour résultats *TTT* et *THH*. Parce que les huit résultats ont une probabilité égale, chacun des quatre résultats possibles, étant donné que F se produit, devraient également avoir une probabilité égale de $1/4$. Cette suggère que nous devrions assigner la probabilité du $2/4 = 1/2$ à E, étant donné que F se produit. Cette la probabilité est appelée la **probabilité conditionnelle** de E donné F.

En général, pour trouver la probabilité conditionnelle de E étant donné F, nous utilisons F comme espace d'échantillonnage. Pour un résultat de E à se produire, ce résultat doit également appartenir à $E \cap F$. Avec cette motivation, nous faisons la définition 3.

DÉFINITION 3 Soit E et F *des* événements avec $p(F) > 0$. La *probabilité conditionnelle* de E étant F, notée par $p(E \mid F)$, est défini comme

$$p(E \mid F) = \frac{p(E \cap F)}{p(F)}.$$

EXEMPLE 3 Une chaîne de bits de longueur quatre est générée de façon aléatoire de sorte que chacune des 16 chaînes de bits de longueur quatre est tout aussi probable. Quelle est la probabilité qu'il contienne au moins deux 0 consécutifs, étant donné que son premier bit est un 0?(Nous supposons que 0 bits et 1 bits sont également probables.)

Solution: Soit E l'événement qu'une chaîne de bits de longueur quatre contient au moins deux 0 consécutifs, et soit F l'événement si le premier bit d'une chaîne de bits de longueur quatre est un 0. La probabilité qu'un chaîne de bits de longueur quatre a au moins deux 0 consécutifs, étant donné que son premier bit est un 0, est égal à

$$p(E \mid F) = \frac{p(E \cap F)}{p(F)}.$$

Parce que $E \cap F = \{0000, 0001, 0010, 0011, 0100\}$, on voit que $p(E \cap F) = 5/16$. Parce que Il y a huit chaînes de bits de longueur quatre commençant par 0, on a $p(F) = 8/16 = 1/2$. Par conséquent,

$$p(E \mid F) = \frac{5/16}{1/2} = \frac{5}{8}.$$

▲

EXEMPLE 4 Quelle est la probabilité conditionnelle qu'une famille avec deux enfants ait deux garçons, étant donné avoir au moins un garçon? Supposons que chacune des possibilités BB, BG, GB et GG soit égale probablement, où B représente un garçon et G représente une fille. (Notez que BG représente une famille avec un garçon plus âgé et une jeune fille tandis que GB représente une famille avec une fille plus âgée et un jeune garçon.)

Solution: Soit E l'événement où une famille avec deux enfants a deux garçons et F soit le cas où une famille avec deux enfants a au moins un garçon. Il s'ensuit que $E = \{BB\}$, $F = \{BB, BG, GB\}$ et $E \cap F = \{BB\}$. Parce que les quatre possibilités sont également probables, il suivant que $p(F) = 3/4$ et $p(E \cap F) = 1/4$. Nous concluons que

$$p(E \mid F) = \frac{p(E \cap F)}{p(F)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}.$$

▲

Indépendance

Supposons qu'une pièce soit retournée trois fois, comme décrit dans l'introduction de notre discussion sur probabilite conditionnelle. Le fait de savoir que le premier flip survient (événement F) modifie-t-il probabilité que la queue remonte un nombre impair de fois (événement E)? En d'autres termes, est-ce le cas que $p(E \mid F) = p(E)$? Cette égalité est valable pour les événements E et F, parce que $p(E \mid F) = 1/2$ et $p(E) = 1/2$. Parce que cette égalité est vraie, nous disons que E et F sont **des événements indépendants**. Lorsque deux événements sont indépendants, la survenance de l'un des événements ne donne aucune information sur la probabilité que l'autre événement se produise.

Parce que $p(E \mid F) = p(E \cap F) / p(F)$, demander si $p(E \mid F) = p(E)$ est identique à demandant si $p(E \cap F) = p(E)\, p(F)$. Cela conduit à la définition 4.

DÉFINITION 4 Les événements E et F sont *indépendants* si et seulement si $p(E \cap F) = p(E)\, p(F)$.

EXEMPLE 5 Supposons que E est l'événement où une chaîne de bits générée aléatoirement de longueur quatre commence par un 1 et F est l'événement où cette chaîne de bits contient un nombre pair de 1. Sont E et F indépendants, si les chaînes de 16 bits de longueur quatre sont également probables?

Solution: il y a huit chaînes de bits de longueur quatre qui commencent par une: 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110 et 1111. Il existe également huit chaînes de bits de longueur quatre qui contiennent un nombre pair: 0000, 0011, 0101, 0110, 1001, 1010, 1100, 1111. Parce qu'il y a 16 chaînes de bits de longueur quatre, il s'ensuit que

$$p(E) = p(F) = 8/16 = 1/\text{deux}.$$

Parce que $E \cap F = \{1111, 1100, 1010, 1001\}$, nous voyons que

$$p(E \cap F) = 4/16 = 1/4.$$

Car

$$p(E \cap F) = 1/4 = (1/2)(1/2) = p(E)\, p(F),$$

nous concluons que E et F sont indépendants. ▲

La probabilité a de nombreuses applications en génétique, comme l'illustrent les exemples 6 et 7.

EXEMPLE 6 Supposons, comme dans l'exemple 4, que chacune des quatre façons dont une famille peut avoir deux enfants est également probable. Les événements E , qu'une famille avec deux enfants a deux garçons, et F , qu'une famille avec deux enfants ont au moins un garçon, indépendant?

Solution: Puisque $E = \{BB\}$, nous avons $p(E) = 1/4$. Dans l' exemple 4 nous avons montré que $p(F) = 3/4$ et en ce que $p(E \cap F) = 1/$ quatre . Mais $p(E)\,p(F) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$. Donc $p(E \cap F) \neq p(E)\,p(F)$, les événements E et F ne sont donc pas indépendants. ▲

EXEMPLE 7 Les événements E , qu'une famille avec trois enfants a des enfants des deux sexes, et F , sont-ils la famille a au plus un garçon, indépendant? Supposons que les huit façons dont une famille peut avoir trois les enfants sont tout aussi probables.

Solution: par hypothèse, chacune des huit façons dont une famille peut avoir trois enfants, BBB , BBG , BGB , BGG , GBB , GBG , GGB et GGG , a une probabilité de $1/8$. Parce que $E = \{BBG, BGB, BGG, GBB, GBG, GGB\}$, $F = \{BGG, GBG, GGB, GGG\}$ et $E \cap F = \{BGG, GBG, GGB\}$, il en résulte que $p(E) = 6/8 = 3/4$, $p(F) = 4/8 = 1/2$, et $p(E \cap F) = 3/8$. Parce que

$$p(E)\,p(F) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8},$$

il s'ensuit que $p(E \cap F) = p(E)\,p(F)$, donc E et F sont indépendants. (Cette conclusion peut sembler surprenant. En effet, si nous modifions le nombre d'enfants, la conclusion risque de ne plus tenir. Voir exercice 27.) ▲

INDÉPENDANCE PAIRWISE ET MUTUELLE On peut aussi définir l'indépendance des plus de deux événements. Cependant, il existe deux types d'indépendance différents, Définition 5.

DÉFINITION 5 Les événements $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sont *indépendants par paire* si et seulement si $p(E_i \cap E_j) = p(E_i)\,p(E_j)$ pour toutes les paires d'entiers i et j avec $1 \leq i < j \leq n$. Ces événements sont *mutuellement indépendant* si $p(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \cdots \cap E_{i_m}) = p(E_{i_1})\,p(E_{i_2}) \cdots p(E_{i_m})$ chaque fois que i_j , $j = 1, 2, \ldots, m$, sont des entiers avec $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq n$ et $m \geq 2$.

De la définition 5, nous voyons que chaque ensemble de n événements mutuellement indépendants est également par paires indépendant. Cependant, n événements indépendants par paire ne sont pas nécessairement mutuellement indépendants, comme nous le voyons dans l'exercice 25 des exercices supplémentaires. De nombreux théorèmes sur n événements incluent l'hypothèse que ces événements sont mutuellement indépendants, et pas seulement indépendants par paire. Nous présenterons plusieurs de ces théorèmes plus loin dans ce chapitre.

Essais de Bernoulli et distribution binomiale

Supposons qu'une expérience ne puisse avoir que deux résultats possibles. Par exemple, lorsqu'un bit est généré au hasard, les résultats possibles sont 0 et 1. Lorsqu'une pièce est retournée, le possible les résultats sont des têtes et des queues. Chaque performance d'une expérience avec deux résultats possibles est appelé un **procès Bernoulli** , après James Bernoulli, qui a fait d'importantes contributions à la probabilité théorie. En général, un résultat possible d'un procès Bernoulli est appelé un **succès** ou un **échec** . Si p est la probabilité de réussite et q est la probabilité d'échec, il s'ensuit que $p + q = 1$.

De nombreux problèmes peuvent être résolus en déterminant la probabilité de k succès lorsqu'un ex- le test consiste en n essais de Bernoulli mutuellement indépendants. (Les essais de Bernoulli sont **mutuellement indépendant** si la probabilité conditionnelle de succès d'un essai donné est de p , compte tenu des informations que ce soit sur les résultats des autres essais.) Considérons l'exemple 8.

EXEMPLE 8 Une pièce est biaisée de sorte que la probabilité de têtes est de 2⁄ 3. Quelle est la probabilité qu'exactement quatre les têtes se lèvent lorsque la pièce est retournée sept fois, en supposant que les flips sont indépendants?

Solution: Il y a $2^7 = 128$ résultats possibles lorsqu'une pièce est retournée sept fois. Le nombre de quatre des sept flips peuvent être des têtes est $C(7, 4)$. Parce que les sept flips sont indépendants, le probabilité de chacun de ces résultats (quatre têtes et trois queues) est $(2/3)^4($une$/3)^3$. Par conséquent, la probabilité d'apparaître exactement quatre têtes est

$$C(7,4)(2/3)^4(\text{une}/3)^3 = \frac{35 \cdot 16}{3^7} = \frac{560}{2187}.$$ ▲

En suivant le même raisonnement que celui utilisé dans l'exemple 8, nous pouvons trouver la probabilité de k succès dans n essais Bernoulli indépendants.

THÉORÈME 2 La probabilité d'exactement k succès dans n essais de Bernoulli indépendants, avec probabilité de succès p et probabilité d'échec $q = 1 - p$, est

$$C(n, k)\, p^k q^{n-k}.$$

Preuve: lorsque n essais de Bernoulli sont réalisés, le résultat est un n- tuple $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, où $t_i = S$ (pour le succès) ou $t_i = F$ (pour l'échec) pour $i = 1, 2, \ldots, n$. Parce que les n essais sont indépendant, la probabilité de chaque résultat de n essais consistant en k succès et $n - k$ échecs (dans n'importe quel ordre) est $p^k q^{n-k}$. Parce qu'il y a $C(n, k)$ n-tuples de S et F qui contiennent exactement k S, la probabilité d'exactement k succès est

$$C(n, k)\, p^k q^{n-k}.$$

On note $b(k; n, p)$ la probabilité de k succès dans n triples de Bernoulli indépendants als avec probabilité de succès p et probabilité d'échec $q = 1 - p$. Considéré comme un fonction de k, nous appelons cette fonction la **distribution binomiale**. Le théorème 2 nous dit que $b(k; n, p) = C(n, k)\, p^k q^{n-k}$.

EXEMPLE 9 Supposons que la probabilité qu'un bit 0 soit généré est 0. 9, que la probabilité qu'un bit 1 soit généré est 0 . 1, et que les bits sont générés indépendamment. Quelle est la probabilité qu'exactement huit 0 bits sont générés lorsque 10 bits sont générés?

Solution: selon le théorème 2, la probabilité de générer exactement huit bits 0 est

$$b(8; 10, 0.9) = C(10, 8)(0.9)^8(0.1)^2 = 0.1937102445.$$ ▲

JAMES BERNOULLI (1654-1705) James Bernoulli (également connu sous le nom de Jacob I), est né à Bâle, en Suisse. Il est l'un des huit mathématiciens éminents de la famille Bernoulli (voir la section 10.1 pour le Bernoulli arbre généalogique des mathématiciens). Suivant le souhait de son père, James a étudié la théologie et est entré au ministère. Mais contrairement aux désirs de ses parents, il étudie également les mathématiques et l'astronomie. Il a voyagé à travers l'Europe de 1676 à 1682, s'initie aux dernières découvertes en mathématiques et sciences. De retour à Bâle en 1682, il fonde une école de mathématiques et de sciences. Il a été nommé professeur de mathématiques à l'Université de Bâle en 1687, restant dans cette position pour le reste de sa vie.

James Bernoulli est surtout connu pour l'œuvre *Ars Conjectandi*, publiée huit ans après sa mort. Dans ce travail, il a décrit les résultats connus dans la théorie des probabilités et dans l'énumération, fournissant souvent une alternative preuves de résultats connus. Ce travail comprend également l'application de la théorie des probabilités aux jeux de hasard et son introduction de la théorème connu sous le nom de **loi des grands nombres**. Cette loi stipule que si $\epsilon > 0$, lorsque n devient arbitrairement grand, la probabilité approche 1 que la fraction de fois où un événement E se produit pendant n essais est à moins de ϵ de $p(E)$.

Notez que la somme des probabilités qu'il y ait k succès lorsque n Bernoulli indépendant des essais sont effectués, pour $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, est égal à

$$\sum_{k=0}^{n} C(n, k)\, p^{k} q^{n-k} = (p + q)^{n} = 1,$$

comme cela devrait être le cas. La première égalité dans cette chaîne d'égalités est une conséquence de la théorème binomial (voir section 6.4). La deuxième égalité suit parce que $q = 1 - p$.

Variables aléatoires

De nombreux problèmes concernent une valeur numérique associée au résultat d'une expérience ment. Par exemple, nous pouvons être intéressés par le nombre total d'un bit dans un généré aléatoirement chaîne de 10 bits; ou dans le nombre de fois que la queue monte quand une pièce est retournée 20 foisÀ étudier des problèmes de ce type, nous introduisons le concept d'une variable aléatoire.

DÉFINITION 6 Une *variable aléatoire* est une fonction de l'espace d'échantillonnage d'une expérience à l'ensemble de réels Nombres. C'est-à-dire qu'une variable aléatoire attribue un nombre réel à chaque résultat possible.

Remarque: Notez qu'une variable aléatoire est une fonction. Ce n'est pas une variable et ce n'est pas aléatoire! Le nom *variable aléatoire* (la traduction de *variabile casuale*) a été introduit par l'italien mathématicien FP Cantelli en 1916. À la fin des années 40, les mathématiciens W. Feller et JL Doob a lancé une pièce pour voir si les deux utiliseraient une «variable aléatoire» ou la plus appropriée terme «variable de chance». Feller a gagné; malheureusement, «variable aléatoire» a été utilisé dans les livres et depuis.

EXEMPLE 10 Supposons qu'une pièce soit lancée trois fois. Soit $X(t)$ la variable aléatoire égale à la nombre de têtes qui apparaissent lorsque t est le résultat. Alors $X(t)$ prend les valeurs suivantes:

$$X(HHH) = 3,$$
$$X(HHT) = X(HTH) = X(THH) = 2,$$
$$X(TTH) = X(THT) = X(HTT) = 1,$$
$$X(TTT) = 0.$$

▲

DÉFINITION 7 La *distribution* d'une variable aléatoire X sur un espace échantillon S est l'ensemble des paires $(r, p(X = r))$ pour tout $r \in X(S)$, où $p(X = r)$ est la probabilité que X prenne la valeur r. (L'ensemble des paires dans cette distribution est déterminée par les probabilités $p(X = r)$ pour $r \in X(S)$.)

EXEMPLE 11 Chacun des huit résultats possibles quand une pièce de monnaie juste est retourné trois fois a une probabilité de $1/8$. Ainsi, la distribution de la variable aléatoire $X(t)$ dans l'exemple 10 est déterminée par le probabilités $P(X = 3) = 1/8$, $P(X = 2) = 3/8$, $P(X = 1) = 3/8$, et $P(X = 0) = 1/8$. Conséquent, la distribution de $X(t)$ dans l' exemple 10 est l'ensemble des paires $(3, 1/8)$, $(2, 3/8)$, $(1, 3/8)$, et $(0$, une / huit $)$.

▲

EXEMPLE 12 Soit X la somme des nombres qui apparaissent quand une paire de dés est lancée. Quelles sont les valeurs de cette variable aléatoire pour les 36 résultats possibles (i, j), où i et j sont les nombres qui apparaissent sur le premier dé et le deuxième dé, respectivement, lorsque ces deux dés sont lancés?

Solution: la variable aléatoire X prend les valeurs suivantes:

$$X((1,1)) = 2,$$
$$X((1,2)) = X((2,1)) = 3,$$
$$X((1,3)) = X((2,2)) = X((3,1)) = 4,$$
$$X((1,4)) = X((2,3)) = X((3,2)) = X((4,1)) = 5,$$
$$X((1,5)) = X((2,4)) = X((3,3)) = X((4,2)) = X((5,1)) = 6,$$
$$X((1,6)) = X((2,5)) = X((3,4)) = X((4,3)) = X((5,2)) = X((6,1)) = 7,$$
$$X((2,6)) = X((3,5)) = X((4,4)) = X((5,3)) = X((6,2)) = 8,$$
$$X((3,6)) = X((4,5)) = X((5,4)) = X((6,3)) = 9,$$
$$X((4,6)) = X((5,5)) = X((6,4)) = 10,$$
$$X((5,6)) = X((6,5)) = 11,$$
$$X((6,6)) = 12.$$

▲

Nous poursuivrons notre étude des variables aléatoires dans la section 7.4, où nous montrerons comment ils peuvent être utilisés dans une variété d'applications.

Le problème de l'anniversaire

Un puzzle célèbre demande le plus petit nombre de personnes nécessaires dans une pièce pour qu'il soit plus probable qu'au moins deux d'entre eux ont le même jour de l'année que leur anniversaire. La plupart des gens trouver la réponse, que nous déterminons dans l'exemple 13, étonnamment petite. Après avoir résolu ce fameux problème, nous allons montrer comment un raisonnement similaire peut être adapté pour résoudre une question sur les fonctions de hachage.

EXEMPLE 13 Le problème de l'anniversaire Quel est le nombre minimum de personnes qui doivent être dans une pièce pour que la probabilité qu 'au moins deux d'entre eux ont le même anniversaire est supérieur à $1/2$?

Solution: Tout d'abord, nous énonçons certaines hypothèses. Nous supposons que les anniversaires des personnes les chambres sont indépendantes. De plus, nous supposons que chaque anniversaire est également probable et que il y a 366 jours dans l'année. (En réalité, plus de personnes naissent certains jours de l'année que d'autres, comme les jours neuf mois après certaines vacances, y compris le réveillon du Nouvel An, et ne les années ont 366 jours.)

Pour déterminer la probabilité qu'au moins deux des n personnes dans une pièce aient le même anniversaire, nous calculons d'abord la probabilité p_n que ces personnes aient toutes des anniversaires différents. Puis le la probabilité qu'au moins deux personnes aient le même anniversaire est $1-p_n$. Pour calculer p_n, on considère les anniversaires des n personnes dans un ordre fixe. Imaginez-les entrer dans la pièce un par un; nous calculerons la probabilité que chaque personne successive entrant dans la pièce ait un anniversaire différent de ceux des personnes déjà présentes.

L'anniversaire de la première personne ne correspond certainement pas à l'anniversaire de quelqu'un déjà la chambre. La probabilité que l'anniversaire de la deuxième personne soit différent de celui de la première personne est de $365/366$ parce que la deuxième personne a une date de naissance différente quand il ou elle est née un des 365 jours de l'année autre que le jour de la naissance de la première personne(L'hypothèse qu'il est également probable qu'une personne naisse l'un des 366 jours de l'année entre dans cette et les étapes suivantes.)

La probabilité que la troisième personne ait un anniversaire différent des deux anniversaires de les première et deuxième personnes ,étant donné que ces deux personnes ont des dates d'anniversaire est de $364/366$. générale, la probabilité que la j ème personne, avec $2 \leq j \leq 366$, ait un anniversaire différent de la anniversaires des j - 1 personnes déjà dans la salle étant donné que ces j - 1 personnes ont différents les anniversaires est

$$\frac{366 - (j - 1)}{366} = \frac{367 - j}{366}.$$

Parce que nous avons supposé que les anniversaires des personnes dans la pièce étaient indépendants, nous peut conclure que la probabilité que les n personnes dans la pièce aient des anniversaires différents est

$$p_n = \frac{365}{366}\frac{364}{366}\frac{363}{366}\cdots\frac{367-n}{366}.$$

Il s'ensuit que la probabilité que parmi n personnes il y ait au moins deux personnes avec le même anniversaire est

$$1 - p_n = 1 - \frac{365}{366}\frac{364}{366}\frac{363}{366}\cdots\frac{367-n}{366}.$$

Déterminer le nombre minimum de personnes dans la pièce afin que la probabilité qu'à moins deux d'entre eux ont le même anniversaire est supérieur à $1/2$, nous utilisons la formule que nous avons trouvé pour $1 - p_n$ pour le calculer pour des valeurs croissantes de n jusqu'à ce qu'il devienne supérieur à $1/2$. (Il y a des approches plus sophistiquées utilisant le calcul qui peuvent éliminer ce calcul, mais nous allons pas les utiliser ici.) Après un calcul considérable, nous constatons que pour $n = 22$, $1 - p_n \approx 0.475$, tandis que pour $n = 23$, $1 - p_n \approx 0.506$. Par conséquent, le nombre minimum de personnes nécessaires pour que la probabilité qu 'au moins deux personnes ont le même anniversaire est supérieure à $1/2$ est 23. ▲

La solution au problème d'anniversaire conduit à la solution de la question de l'exemple 14 sur les fonctions de hachage.

EXEMPLE 14 **Probabilité d'une collision dans les fonctions de hachage** Rappel de la section 4.5 qu'un hachage la fonction $h(k)$ est un mappage des clés (des enregistrements qui doivent être stockés dans une base de données) emplacements de stockage. Les fonctions de hachage mappent un large univers de touches (comme le 300 millions de numéros de sécurité sociale aux États-Unis) à un ensemble de stockage beaucoup plus petit Emplacements. Une bonne fonction de hachage produit peu de **collisions** , qui sont des correspondances de deux clés du même emplacement de mémoire, lorsque relativement peu d'enregistrements sont en cours de lecture dans un application. Quelle est la probabilité que deux clés ne soient pas mappées au même emplacement par un fonction de hachage, ou, en d'autres termes, qu'il n'y a pas de collisions?

Solution: pour calculer cette probabilité, nous supposons que la probabilité qu'une sélection aléatoire est mappée sur un emplacement est $1/m$, où m est le nombre d'emplacements disponibles, c'est-à-dire le la fonction de hachage distribue les clés uniformément.(En pratique, les fonctions de hachage peuvent ne pas supposition. Cependant, pour une bonne fonction de hachage, cette hypothèse devrait être proche de la correction.) De plus, nous supposons que les clés des enregistrements sélectionnés ont une probabilité égale d'être l'un des éléments de l'univers clé et que ces clés sont sélectionnées indépendamment.

Supposons que les clés soient $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Lorsque nous ajoutons le deuxième enregistrement, la probabilité qu'il est mappé sur un emplacement différent de l'emplacement du premier enregistrement, que $h(k_2) = h(k_1)$, est $(m - 1)/m$ car il y a m - 1 emplacements libres après le premier enregistrement.le probabilité que le troisième enregistrement soit mappé sur un emplacement libre après les premier et deuxième enregistrements ont été placés sans collision est $(m - 2)/m$. En général, la probabilité que le j ème enregistrement est mappé sur un emplacement libre après que les premiers j - 1 enregistrements ont été mappés sur les emplacements $h(k_1)$, $h(k_2), \ldots, h(k_{j-1})$ sans collision est $(m - (j - 1))/m$ car j - 1 des m emplacements sont pris.

Étant donné que les clés sont indépendantes, la probabilité que toutes les n clés soient mappées à différents emplacements est

$$p_n = \frac{m-1}{m}\cdot\frac{m-2}{m}\cdot \cdots \cdot\frac{m-n+1}{m}.$$

Il s'ensuit que la probabilité qu'il y ait au moins une collision, c'est-à-dire qu'au moins deux clés sont mappé au même emplacement, est

$$1 - p_n = 1 - \frac{m-1}{m} \cdot \frac{m-2}{m} \cdot \ldots \cdot \frac{m-n+1}{m}.$$

Les techniques de calcul peuvent être utilisées pour trouver la plus petite valeur de n étant donné une valeur de m telle que la probabilité d'une collision est supérieure à un seuil particulier. On peut montrer que le le plus petit entier n tel que la probabilité de collision est supérieure à $1/2$ est d' environ $n = 1.177\sqrt{m}$. Par exemple, lorsque $m = 1,000,000$, le plus petit entier n tel que la probabilité de collision est supérieure à $1/2$ est 1178. ▲

Algorithmes de Monte Carlo

Les algorithmes discutés jusqu'à présent dans ce livre sont tous déterministes. Autrement dit, chaque algorithme toujours procède de la même manière chaque fois que la même entrée est donnée.Cependant, il existe de nombreuses situations où nous aimerions qu'un algorithme fasse un choix aléatoire en une ou plusieurs étapes.Tel que la situation se présente lorsqu'un algorithme déterministe devrait passer par un nombre énorme, ou même un nombre inconnu, de cas possibles. Algorithmes qui font des choix aléatoires sur un ou plusieurs les étapes sont appelées **algorithmes probabilistes** . Nous allons discuter d'une classe particulière de probabiliste algorithmes de cette section, à savoir les **algorithmes de Monte Carlo** , pour les problèmes de décision. Monte Les algorithmes de Carlo produisent toujours des réponses aux problèmes, mais une faible probabilité demeure que ces réponses peuvent être incorrectes. Cependant, la probabilité que la réponse soit incorrecte diminue rapidement lorsque l'algorithme effectue un calcul suffisant. Les problèmes de décision ont soit «Vrai» ou «faux» comme réponse. La dénomination «Monte Carlo» fait référence au célèbre casino à Monaco; l'utilisation de l'aléatoire et les processus répétitifs dans ces algorithmes font les similaires à certains jeux de hasard. Ce nom a été introduit par les inventeurs de Monte Méthodes de Carlo, notamment Stan Ulam, Enrico Fermi et John von Neumann.

Méthodes de Monte Carlo ont été inventés pour aider développer le premier nucléaire armes.

Un algorithme de Monte Carlo pour un problème de décision utilise une séquence de tests. La probabilite que l'algorithme répond correctement au problème de décision à mesure que de nouveaux tests sont effectués en dehors. À chaque étape de l'algorithme, les réponses possibles sont «vraies», ce qui signifie que la réponse est "vrai" et aucune itération supplémentaire n'est nécessaire, ou "inconnue", ce qui signifie que la réponse pourrait être «vrai» ou «faux». Après avoir exécuté toutes les itérations dans un tel algorithme, la finale la réponse produite est «vraie» si au moins une itération donne la réponse «vraie», et la réponse est «Faux» si chaque itération donne la réponse «inconnu». Si la bonne réponse est «fausse», alors le l'algorithme répond «faux», car chaque itération donnera «inconnu». Cependant, si la bonne réponse est «vrai», alors l'algorithme pourrait répondre «vrai» ou «faux», car il peut être possible que chaque itération produise la réponse «inconnue» même si la réponse correcte était «vrai». Nous montrerons que cette possibilité devient extrêmement improbable car le nombre de tests augmente.

Supposons que p soit la probabilité que la réponse d'un test soit «vraie», étant donné que la réponse est "vrai". Il s'ensuit que $1-p$ est la probabilité que la réponse soit "inconnue", étant donné que la réponse est «vraie». Parce que l'algorithme répond «faux» lorsque toutes les n itérations donnent la réponse «Inconnu» et les itérations effectuent des tests indépendants, la probabilité d'erreur est $(1-p)^n$. Lorsque $p = 0$, cette probabilité se rapproche de 0 lorsque le nombre de tests augmente. Par conséquent, le probabilité que l'algorithme réponde «vrai» lorsque la réponse est «vraie» approche 1.

EXEMPLE 15 **Contrôle qualité** (Cet exemple est adapté de [AhUl95].) Supposons qu'un fabricant ordonne les puces de processeur par lots de taille n , où n est un entier positif. Le fabricant de puces n'a testé que certains de ces lots pour s'assurer que toutes les puces du lot sont bonnes (remplacement des puces défectueuses trouvées lors des tests par de bonnes).Dans des lots non testés auparavant, la probabilité qu'une puce particulière soit mauvaise est de 0. 1 lors de tests aléatoires est fait. Le fabricant de PC veut décider si toutes les puces d'un lot sont bonnes.À

Pour ce faire, le fabricant de PC peut tester chaque puce dans un lot pour voir si elle est bonne.cependant, cela nécessite n tests. En supposant que chaque test puisse être effectué en temps constant, ces tests nécessitent $O(n)$ secondes. Le fabricant du PC peut-il déterminer si un lot de puces a été testé par le fabricant de puces en utilisant moins de temps?

Solution: nous pouvons utiliser un algorithme de Monte Carlo pour déterminer si un lot de puces a été testé par le fabricant de puces tant que nous sommes prêts à accepter une certaine probabilité d'erreur.le algorithme est configuré pour répondre à la question: «Ce lot de puces n'a-t-il pas été testé par le fabricant de puces? »Il procède en sélectionnant successivement des puces au hasard dans le lot et en testant les un par un. Lorsqu'une puce défectueuse est rencontrée, l'algorithme répond «vrai» et s'arrête.Si une puce testée est bonne, l'algorithme répond «inconnu» et passe à la puce suivante.Après l'algorithme a testé un nombre spécifié de puces, disons k puces, sans obtenir de réponse de «Vrai», l'algorithme se termine par la réponse «faux»;c'est-à-dire que l'algorithme conclut que le lot est bon, c'est-à-dire que le fabricant de puces a testé toutes les puces du lot.

La seule façon pour cet algorithme de répondre incorrectement est de conclure qu'un test non testé lot de puces a été testé par le fabricant de puces. La probabilité qu'une puce soit bonne, mais que il provient d'un lot non testé, est $1 - 0.1 = 0.9$. Parce que les événements de test de différentes puces à partir d'un lot sont indépendants, la probabilité que toutes les k étapes de l'algorithme produisent la réponse «Inconnu», étant donné que le lot de puces n'est pas testé, est égal à 0.9^k.

En prenant k assez grand, nous pouvons rendre cette probabilité aussi petite que nous le voulons.Par exemple, en testant 66 puces, la probabilité que l'algorithme décide qu'un lot a été testé par le le fabricant de puces est 0.9^{66}, ce qui est inférieur à 0.001. Autrement dit, la probabilité est inférieure à 1 sur 1000 que l'algorithme n'a pas répondu correctement. Notez que cette probabilité est indépendante de n, la nombre de puces dans un lot. Autrement dit, l'algorithme de Monte Carlo utilise un nombre constant, ou $O(1)$, teste et nécessite $O(1)$ secondes, quel que soit le nombre de puces dans un lot.Tant que le PC fabricant peut vivre avec un taux d'erreur inférieur à 1 sur 1000, l'algorithme de Monte Carlo sauver le fabricant de PC de nombreux tests.Si un taux d'erreur plus faible est nécessaire, le fabricant du PC peut tester plus de puces dans chaque lot; le lecteur peut vérifier que 132 tests abaissent le taux d'erreur à moins de 1 à 1 , 000 , 000. ▲

EXEMPLE 16 **Test probabiliste de primauté** Au chapitre 4, nous avons remarqué qu'un entier composite, c'est-à-dire un entier supérieur à un qui n'est pas premier, passe le test de Miller (voir le préambule de l'exercice 44 dans la section 4.4) pour moins de $n/4$ bases b avec $1 < b < n$. Cette observation est à la base de un algorithme de Monte Carlo pour déterminer si un entier supérieur à un est premier.Car les nombres premiers importants jouent un rôle essentiel dans la cryptographie à clé publique (voir la section 4.6), générer de grands nombres premiers rapidement est devenu extrêmement important.

Le but de l'algorithme est de décider de la question «Est-ce que n est composite?» Étant donné un entier n supérieur à un, nous sélectionnons un entier b au hasard avec $1 < b < n$ et déterminons si n passe le test de Miller à la base b. Si n échoue au test, la réponse est «vraie» car n doit être composite, et l'algorithme se termine. Sinon, nous effectuons le test k fois, où k est positif entier. Chaque fois que nous sélectionnons un entier aléatoire b et déterminons si n passe le test de Miller à la base b. Si la réponse est «inconnue» à chaque étape, l'algorithme répond «faux», c'est-à-dire qu'il dit que n n'est pas composite, de sorte qu'il est premier. La seule possibilité pour l'algorithme de retourner un une réponse incorrecte se produit lorsque n est composite, et la réponse «inconnu» est la sortie à chaque des k itérations. La probabilité qu'un entier composite n réussisse le test de Miller pour un la base b sélectionnée est inférieure à $1/4$. Parce que l'entier b avec $1 < b < n$ est sélectionné au hasard à chaque itération et ces itérations sont indépendantes, la probabilité que n soit composite mais la répond algorithme que n est premier est inférieure à $(une/quatre)^k$. En prenant k pour être suffisamment grand, nous peut rendre cette probabilité extrêmement faible. Par exemple, avec 10 itérations, la probabilité que l'algorithme décide que n est premier quand il est vraiment composite est inférieure à 1 à 1, 000 , 000. Avec 30 itérations, cette probabilité tombe à moins de 1 sur 10^{18}, un événement extrêmement improbable.

Un nombre qui passe plusieurs itérations d'un primalité probabiliste test est appelé un *industriel force première*, même bien qu'il puisse être composite.

Pour générer de grands nombres premiers, disons avec 200 chiffres, nous choisissons au hasard un entier n avec 200 chiffres et exécutez cet algorithme, avec 30 itérations. Si l'algorithme décide que n est premier, nous

peut l'utiliser comme l'un des deux nombres premiers utilisés dans une clé de chiffrement pour le cryptosystème RSA. Si n est en fait composite et est utilisé dans le cadre de la clé, les procédures utilisées pour déchiffrer les messages seront ne produit pas le message crypté d'origine. La clé est ensuite jetée et deux nouveaux possibles des nombres premiers sont utilisés. ▲

La méthode probabiliste

Nous avons discuté des preuves d'existence dans le chapitre 1 et illustré la différence entre constructif preuves d'existence et preuves d'existence non constructives. La méthode probabiliste, introduite par Paul Erd˝os et Alfréd Rényi, est une technique puissante qui peut être utilisée pour créer des preuves d'existence. Pour utiliser la méthode probabiliste pour prouver les résultats sur un ensemble S, comme le existence d'un élément dans S avec une propriété spécifiée, nous attribuons des probabilités aux éléments de S. Nous utilisons ensuite les méthodes de la théorie des probabilités pour prouver les résultats sur les éléments de S. En particulier, nous pouvons montrer qu'un élément avec une propriété spécifiée existe en montrant que le la probabilité qu'un élément $x \in S$ ait cette propriété est positive. La méthode probabiliste est basée sur la déclaration équivalente dans le théorème 3.

THÉORÈME 3 **LA MÉTHODE PROBABILISTE** Si la probabilité qu'un élément choisi au hasard d'un S n'a pas de propriété particulière est inférieure à 1, il existe un élément dans S avec cette propriété.

Une preuve d'existence basée sur la méthode probabiliste n'est pas constructive car elle ne trouve pas un élément particulier avec la propriété souhaitée.

Nous illustrons la puissance de la méthode probabiliste en trouvant une borne inférieure pour le Ramsey nombre $R(k, k)$. Rappelons à la section 6.2 que $R(k, k)$ est égal au nombre minimum de personnes à une partie doit s'assurer qu'il y a au moins k amis ou k ennemis mutuels (en supposant que deux personnes sont des amis ou des ennemis).

THÉORÈME 4 Si k est un entier avec $k \geq 2$, alors $R(k, k) \geq 2^{k/2}$.

Preuve: On note que le théorème est valable pour $k = 2$ et $k = 3$ car $R(2, 2) = 2$ et $R(3, 3) = 6$, comme indiqué à la section 6.2. Supposons maintenant que $k \geq 4$. Nous allons utiliser la méthode probabiliste pour montrer que s'il y a moins de $2^{k/2}$ personnes lors d'une fête, il est possible qu'aucun k ne soit mutuel amis ou ennemis mutuels. Cela montrera que $R(k, k)$ est au moins $2^{k/2}$.

Pour utiliser la méthode probabiliste, nous supposons qu'il est également probable que deux personnes amis ou ennemis. (Notez que cette hypothèse n'a pas besoin d'être réaliste.) Supposons qu'il sont n personnes à la fête. Il s'ensuit qu'il existe $\binom{n}{k}$ différents ensembles de k personnes à ce partie, que nous listons comme $S_1, S_2, \ldots, S_{\binom{n}{k}}$. Soit E_i l'événement où toutes les k personnes de S_i sont ei- leurs amis ou ennemis communs. La probabilité qu'il y ait soit k amis mutuels ou k ennemis mutuels parmi les n personnes est égal à $p(\bigcup_{i=1}^{\binom{n}{k}} E_i)$.

Selon notre hypothèse, il est également probable que deux personnes soient des amis ou des ennemis. La probabilité que deux personnes soient amis est égale à la probabilité qu'elles soient ennemies; tous les deux probabilités égales à $1/2$. De plus, il existe $\binom{k}{2} = k(k-1)/2$ paires de personnes dans S_i car il y a k personnes à S_i. Par conséquent, la probabilité que toutes les k personnes dans S_i soient des amis mutuels et probabilité que tous les k personnes , S_i sont tous deux égaux ennemis mutuels $(\text{une}/2)^{k(k-1)/2}$. Il s'ensuit que $p(E_i) = 2(1/2)^{k(k-1)/2}$.

La probabilité qu'il y ait k amis mutuels ou k ennemis mutuels dans le groupe de n les gens est égal à $p(\bigcup_{i=1}^{\binom{n}{k}} E_i)$. En utilisant l'inégalité de Boole (exercice 15), il s'ensuit que

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{\binom{n}{k}} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\binom{n}{k}} p(E_i) = \binom{n}{k} \cdot 2\left(\frac{1}{2}\right)^{k(k-1)/2}.$$

Par l'exercice 17 de la section 6.4, nous avons $\binom{n}{k} \leq n^k/2^{k-1}$. Par conséquent,

$$\binom{n}{k} 2\left(\frac{1}{2}\right)^{k(k-1)/2} \leq \frac{n^k}{2^{k-1}} 2\left(\frac{1}{2}\right)^{k(k-1)/2}.$$

Maintenant, si $n < 2^{k/2}$ nous avons

$$\frac{n^k}{2^{k-1}} 2\left(\frac{1}{2}\right)^{k(k-1)/2} < \frac{2^{k(k/2)}}{2^{k-1}} 2\left(\frac{1}{2}\right)^{k(k-1)/2} = 2^{2-(k/2)} \leq 1,$$

où la dernière étape suit car $k \geq 4$.

Nous pouvons maintenant conclure que $p(\bigcup_{i=1}^{\binom{n}{k}} E_i) < 1$ lorsque $k \geq 4$. Par conséquent, la probabilité de la événement complémentaire, qu'il n'y a aucun ensemble de k amis ou ennemis mutuels au est supérieur à 0. Il s'ensuit que si $n < 2^{k/2}$, il y a au moins un ensemble tel qu'aucun sous-ensemble des k personnes sont des amis ou des ennemis mutuels.

Des exercices

1. Quelle probabilité attribuer au résultat de têtes quand une pièce biaisée est lancée, si les têtes sont trois fois aussi susceptibles de venir que les queues? Quelle probabilité devrait être attribué à l'issue des queues?

2. Trouvez la probabilité de chaque résultat lorsqu'un dé chargé est lancé, si un 3 est deux fois plus susceptible d'apparaître que chacun des cinq autres numéros sur le dé.

3. Trouvez la probabilité de chaque résultat lorsqu'un dé biaisé est roulé, si rouler un 2 ou rouler un 4 est trois fois plus probable comme rouler chacun des quatre autres nombres sur le dé et il est également susceptible de lancer un 2 ou un 4.

4. Montrez que les conditions (i) et (ii) sont remplies dans le cadre du définition de la probabilité, lorsque les résultats sont également probable.

5. Une paire de dés est chargée. La probabilité qu'un 4 apparaisse sur la première matrice est de $2 / 7$, et la probabilité qu'un 3 apparaît sur le deuxième dé est $2 / 7$. Autres résultats pour chaque dé apparaître avec la probabilité $1 / 7$. Quelle est la probabilité de 7 apparaissant comme la somme des nombres lorsque les deux dés sont roulés?

6. Quelle est la probabilité de ces événements lorsque nous sélectionner une permutation de $\{1 , 2 , 3\}$?

a) 1 précède 3.
b) 3 précède 1.
c) 3 précède 1 et 3 précède 2.

7. Quelle est la probabilité de ces événements lorsque nous sélectionner une permutation de $\{1 , 2 , 3 , 4\}$?

a) 1 précède 4.
b) 4 précède 1.
c) 4 précède 1 et 4 précède 2.
d) 4 précède 1, 4 précède 2 et 4 précède 3.
e) 4 précède 3 et 2 précède 1.

8. Quelle est la probabilité de ces événements lorsque nous sélectionner une permutation de $\{1 , 2 , ..., n \}$ où $n \geq 4$?

a) 1 précède 2.
b) 2 précède 1.
c) 1 précède immédiatement 2.
d) n précède 1 et $n - 1$ précède 2.
e) n précède 1 et n précède 2.

9. Quelle est la probabilité de ces événements lorsque nous sélectionner une permutation des 26 lettres minuscules de l'En-alphabet glish?

a) La permutation se compose des lettres en sens inverse ordre phabétique.
b) z est la première lettre de la permutation.
c) z précède a dans la permutation.
d) a précède immédiatement z dans la permutation.
e) a précède immédiatement m , qui précède immédiatement cède z dans la permutation.
f) m , n et o sont à leur place d'origine dans le permu-tation.

10. Quelle est la probabilité de ces événements lorsque nous sélectionner une permutation des 26 lettres minuscules de l'En-alphabet glish?

a) Les 13 premières lettres de la permutation sont en alphabet-ordre ical.
b) a est la première lettre de la permutation et z est la dernière lettre.
c) a et z sont côte à côte dans la permutation.
d) a et b ne sont pas côte à côte dans la permutation.
e) a et z sont séparés par au moins 23 lettres dans la mutation.
f) z précède a et b dans la permutation.

11. Supposons que E et F sont des événements tels que $p (E) = 0 . 7$ et $p (F) = 0 . 5$. Montrez que $p (E \cup F) \geq 0 . 7$ et $p (E \cap F) \geq 0 . 2$.

12. Supposons que E et F sont des événements tels que $p (E) = 0 . 8$ et $p (F) = 0 . 6$. Montrez que $p (E \cup F) \geq 0 . 8$ et $p (E \cap F) \geq 0 . 4$.

13. Montrer que si E et F sont des événements, alors $p (E \cap F) \geq p (E) + p (F) - 1$. Ceci est connu sous le **nom de Bonferroni l'égalité** .

14. Utilisez l'induction mathématique pour prouver le eralisation de l'inégalité de Bonferroni:

$$p (E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n)$$

20. Trouvez le plus petit nombre de personnes que vous devez choisir au hasard de sorte que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux a fête son anniversaire aujourd'hui est supérieure à $1 / 2$.

21. Trouvez le plus petit nombre de personnes que vous devez choisir au hasard de sorte que la probabilité qu'au moins deux d'entre eux sont tous deux nés le 1er Avril est supérieur à $1 / 2$.

∗ **22.** Le 29 février ne se produit que pendant les années bissextiles. Années divisibles par 4, mais pas par 100, sont toujours des années bissextiles. Années divisées par 100, mais pas par 400, ne sont pas des années bissextiles, mais des années divisible par 400 sont des années bissextiles.

a) Quelle distribution de probabilité pour les anniversaires devrait être utilisé pour refléter la fréquence du 29 février?
b) En utilisant la distribution de probabilité de la partie (a), est la probabilité que dans un groupe de n personnes au moins deux ont le même anniversaire?

23. Quelle est la probabilité conditionnelle qu'exactement quatre têtes apparaître lorsqu'une pièce de monnaie équitable est lancée cinq fois, étant donné que le premier flip est venu des têtes?

24. Quelle est la probabilité conditionnelle qu'exactement quatre têtes apparaître lorsqu'une pièce de monnaie équitable est lancée cinq fois, étant donné que le premier flip est venu pile?

25. Quelle est la probabilité conditionnelle qu'une génération aléatoire La chaîne de bits de longueur quatre contient au moins deux con-0 secutif, étant donné que le premier bit est un 1? (Supposons que

$\geq p(E_1) + p(E_2) + \cdots + p(E_n) - (n - 1)$,

où $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sont n événements.

15. Montrer que si $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sont des événements d'un échantillon fini plein d'espace,

$$p(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n) \leq p(E_1) + p(E_2) + \cdots + p(E_n).$$

C'est ce qu'on appelle **l'inégalité de Boole** .

16. Montrez que si E et F sont des événements indépendants, alors E et F sont également des événements indépendants.

17. Si E et F sont des événements indépendants, prouver ou infirmer que E et F sont nécessairement des événements indépendants.

Dans les exercices 18, 20 et 21, supposons que l'année compte 366 jours et tous les anniversaires sont également probables. Dans l'exercice 19, supposez-le est également probable qu'une personne naisse au cours d'un mois donné l'année.

18. a) Quelle est la probabilité que deux personnes choisies au dom sont nés le même jour de la semaine?

b) Quelle est la probabilité que dans un groupe de n personnes choisis au hasard, il y en a au moins deux nés sur le même jour de la semaine?

c) Combien de personnes choisies au hasard sont nécessaires pour faire la plus grande probabilité de $1/2$, que il y a au au moins deux personnes nées le même jour de la semaine?

19. a) Quelle est la probabilité que deux personnes choisies au dom sont nés au cours du même mois de l'année?

b) Quelle est la probabilité que dans un groupe de n personnes choisis au hasard, il y en a au moins deux nés dans le même mois de l'année?

c) Combien de personnes choisies au hasard sont nécessaires pour faire la plus grande probabilité de $1/2$, que il y a au au moins deux personnes nées le même mois de l'année?

les probabilités de 0 et de 1 sont les mêmes.)

26. Soit E l'événement qu'une chaîne de bits générée aléatoirement de longueur trois contient un nombre impair de 1, et soit F être l'événement où la chaîne commence par 1. Sont E et F indépendant?

27. Soit E et F les événements qu'une famille de n enfants a enfants des deux sexes et a au plus un garçon, respectivement activement. Sont E et F indépendant si

a) $n = 2$? **b)** $n = 4$? **c)** $n = 5$?

28. Supposons que la probabilité qu'un enfant soit un garçon est de 0,51 et que les sexes des enfants nés dans une famille sont indépendant. Quelle est la probabilité qu'une famille de cinq personnes les enfants a

a) exactement trois garçons?

b) au moins un garçon?

c) au moins une fille?

d) tous les enfants du même sexe?

29. Un groupe de six personnes joue le jeu de «l'étranger» pour déterminer qui achètera des rafraîchissements. Chaque personne retourne une juste monnaie. S'il y a une personne dont l'issue n'est pas comme tout autre membre du groupe, cette per- le fils doit acheter les rafraîchissements. Quelle est la probabilité qu'il y a une personne étrange après que les pièces ont été retournées une fois que?

30. Trouver la probabilité qu'une chaîne de bits générée aléatoirement de longueur 10 ne contient pas de 0 si les bits sont indépendants et si

a) un bit 0 et un bit 1 sont également probables.

b) la probabilité qu'un bit soit un 1 est de 0,6.

c) la probabilité que le i ième bit est un 1 est une / deux ^{je} pour $i = 1, 2, 3, \ldots, 10$.

31. Trouvez la probabilité qu'une famille avec cinq enfants pas de garçon, si le sexe des enfants est indépendant et si

a) un garçon et une fille sont également susceptibles.

b) la probabilité d'un garçon est de 0,51.

c) la probabilité que le i ème enfant soit un garçon est $0.51 - (i/100)$.

32. Trouver la probabilité qu'une chaîne de bits générée aléatoirement de longueur 10 commence par un 1 ou se termine par un 00 pour le même conditions que dans les parties (a), (b) et (c) de l'exercice 30, si les bits sont générés indépendamment.

33. Trouver la probabilité que le premier enfant d'une famille avec cinq enfants est un garçon ou que les deux derniers enfants du la famille sont des filles, pour les mêmes conditions que dans les parties a), (b) et (c) de l'exercice 31.

34. Trouver chacune des probabilités suivantes lorsque vous n indépen-

b) Supposons que l'observateur honnête nous dise qu'au moins un dé est venu cinq. Quelle est la probabilité que la somme du nombre qui est venu sur les dés est sept, étant donné cette information?

∗∗ 39. Cet exercice utilise la méthode probabiliste pour prouver résultat sur les tournois à tour de rôle. Dans un **tournoi à la ronde tournoi** avec m joueurs, tous les deux joueurs jouent un jeu dans lequel un joueur gagne et l'autre perd.

Nous voulons trouver des conditions sur des entiers positifs m et k avec $k < m$ tel qu'il est possible pour les résultats du tournoi d'avoir la propriété que pour chaque set de k joueurs, il y a un joueur qui bat chaque membre dans cet ensemble. Afin que nous puissions utiliser un raisonnement probabiliste pour tirer des conclusions sur les tournois à tour de rôle, nous supposons que lorsque deux joueurs s'affrontent, il est tout aussi probable que l'un ou l'autre joueur gagne la partie et nous supposons que le les résultats des différents jeux sont indépendants. Que E soit essais Bernoulli sont effectués avec une probabilité de succès p .

a) la probabilité d'absence de succès

b) la probabilité d'au moins un succès

c) la probabilité d'au plus un succès

d) la probabilité d'au moins deux succès

35. Trouver chacune des probabilités suivantes lorsque vous n indépen- essais Bernoulli sont effectués avec une probabilité de succès p .

a) la probabilité d'absence de défaillances

b) la probabilité d'au moins une défaillance

c) la probabilité d'au plus un échec

d) la probabilité d'au moins deux échecs

36. Utiliser l'induction mathématique pour prouver que si $E_1, E_2, \ldots, E_n$ est une séquence de n paires disjointes événements dans un espace échantillon S , où n est un entier positif, alors $p(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{i=1}^{n} p(E_i)$.

∗ **37.** (*Nécessite un calcul*) Montrez que si $E_1, E_2, \ldots$ est un infini séquence d'événements disjoints par paire dans un espace échantillon S , alors $p(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} p(E_i)$. [*Astuce:* utilisez l'exercice 36 et prendre des limites.]

38. Une paire de dés est lancée dans un endroit éloigné et lorsque vous demander à un observateur honnête si au moins un dé est apparu six, cet observateur honnête répond par l'affirmative.

a) Quelle est la probabilité que la somme des nombres qui est venu sur les deux dés est sept, étant donné les informations informations fournies par l'observateur honnête?

l'événement que pour chaque set S avec k joueurs, où k est un entier positif inférieur à m , il y a un joueur qui a battu tous les k joueurs en S .

a) Montrer que $p(E) \leq \sum_{j=1}^{\binom{m}{k}} p(F_j)$, où F_j est l'événement qu'il n'y a pas de joueur qui bat tous les k joueurs de la j e mis dans une liste des $\binom{m}{k}$ ensembles de k joueurs.

b) Montrer que la probabilité de F_j est $(1-2^{-k})^{m-k}$.

c) Conclure des parties (a) et (b) que $p(E) \leq \binom{m}{k}(1-2^{-k})^{m-k}$ et, par conséquent, qu'il doit être un tournoi avec la propriété décrite si $\binom{m}{k}(1-2^{-k})^{m-k} < 1$.

d) Utilisez la partie (c) pour trouver des valeurs de m telles qu'il tournoi avec m joueurs tel que pour chaque set S de deux joueurs, il y a un joueur qui a battu les deux joueurs en S . Répétez l'opération pour des ensembles de trois joueurs.

∗ **40.** Concevoir un algorithme de Monte Carlo qui détermine si une permutation des nombres entiers 1 à n a déjà été trié (c'est-à-dire qu'il est en ordre croissant), ou à la place, est un permutation dom. Une étape de l'algorithme devrait répondre «Vrai» s'il détermine que la liste n'est pas triée et «inconnue» autrement. Après k étapes, l'algorithme décide que l'in- les tegers sont triés si la réponse est «inconnue» à chaque étape. Montrez qu'au fur et à mesure que le nombre de pas augmente, le bilité que l'algorithme produit une réponse incorrecte est extrêmement petit. [*Astuce:* pour chaque étape, vérifiez si certains éléments sont dans le bon ordre. Assurez-vous que les tests sont indépendants.]

41. Utilisez le pseudocode pour écrire la primauté probabiliste test décrit dans l'exemple 16.

Théorème de Bayes

introduction

Il y a plusieurs fois où nous voulons évaluer la probabilité qu'un événement particulier se produise sur base de preuves partielles. Par exemple, supposons que nous connaissions le pourcentage de personnes qui ont une maladie particulière pour laquelle il existe un test de diagnostic très précis.Les personnes dont le test est positif

cette maladie aimerait connaître la probabilité qu'ils en soient réellement atteints.Dans cette section nous introduisons un résultat qui peut être utilisé pour déterminer cette probabilité, à savoir la probabilité que une personne a la maladie étant donné que cette personne est positive.Pour utiliser ce résultat, nous allons besoin de connaître le pourcentage de personnes qui ne sont pas atteintes de la maladie mais dont le test est positif et le pourcentage de personnes atteintes de la maladie mais dont le test est négatif.

De même, supposons que nous connaissions le pourcentage de messages électroniques entrants qui sont du spam.nous verra que nous pouvons déterminer la probabilité qu'un e-mail entrant soit du spam en utilisant l'occurrence de mots dans le message.Pour déterminer cette probabilité, nous devons connaître pourcentage de messages entrants qui sont du spam, pourcentage de messages indésirables dans lesquels chacun de ces mots apparaît, et le pourcentage de messages qui ne sont pas du spam dans lequel chacun ces mots se produisent.

Le résultat que nous pouvons utiliser pour répondre à de telles questions s'appelle le théorème de Bayes et remonte au XVIIIe siècle. Au cours des deux dernières décennies, le théorème de Bayes a été largement utilisé pour estimer les probabilités sur la base de preuves partielles dans des domaines aussi divers que médecine, droit, apprentissage automatique, ingénierie et développement de logiciels.

Théorème de Bayes

Nous illustrons l'idée derrière le théorème de Bayes avec un exemple qui montre que lorsque supplémentaire l'information est disponible, nous pouvons obtenir une estimation plus réaliste qu'un événement particulier se produit. Autrement dit, supposons que nous connaissons $p(F)$, la probabilité qu'un événement F se produise, mais nous avons des connaissances qu'un événement E se produit. Ensuite, la probabilité conditionnelle que F se produit étant donné que E se produit, $p(F \mid E)$, est une estimation plus réaliste que $p(F)$ que F se produit. Dans l'exemple 1, nous verrons que nous pouvons trouver $p(F \mid E)$ lorsque nous connaissons $p(F)$, $p(E \mid F)$ et $p(E \mid \overline{F})$.

EXEMPLE 1 Nous avons deux cases. Le premier contient deux boules vertes et sept boules rouges; le second contient quatre boules vertes et trois boules rouges. Bob sélectionne une balle en choisissant d'abord l'une des deux cases Aléatoire. Il sélectionne ensuite au hasard l'une des boules de cette case. Si Bob a sélectionné une balle rouge, quelle est la probabilité qu'il ait sélectionné une balle dans la première case?

Solution: Soit E l'événement que Bob a choisi une balle rouge; $\overline{E}$ est l'événement que Bob a choisi une boule verte. Soit F l'événement que Bob a choisi une balle dans la première case; $\overline{F}$ est l'événement qui Bob a choisi une balle dans la deuxième case. Nous voulons trouver $p(F \mid E)$, la probabilité que le la balle que Bob a choisie est venue de la première boîte, étant donné qu'elle est rouge Par la définition du conditionnel probabilité, on a $p(F \mid E) = p(F \cap E) / p(E)$. Pouvons-nous utiliser les informations fournies pour déterminer à la fois $p(F \cap E)$ et $p(E)$ afin que nous puissions trouver $p(F \mid E)$?

Tout d'abord, notez que parce que la première boîte contient sept boules rouges sur un total de neuf boules, on sait que $p(E \mid F) = 7/9$. De même, parce que la deuxième case contient trois boules rouges sur un total de sept boules, nous savons que $p(E \mid \overline{F}) = 3/7$. Nous avons supposé que Bob sélectionne un boîte au hasard, donc $p(F) = p(\overline{F}) = 1/2$. Parce que $p(E \mid F) = p(E \cap F) / p(F)$, il s'ensuit que $p(E \cap F) = p(E \mid F)\, p(F) = \frac{7}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{18}$ [comme nous l'avons remarqué plus tôt, c'est l'une des quantités nous devons trouver pour déterminer $p(F \mid E)$]. De même, comme $p(E \mid \overline{F}) = p(E \cap \overline{F}) / p(\overline{F})$, il s'ensuit que $p(E \cap \overline{F}) = p(E \mid \overline{F})\, p(\overline{F}) = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{14}$.

Nous pouvons maintenant trouver $p(E)$. Notez que $E = (E \cap F) \cup (E \cap \overline{F})$, où $E \cap F$ et $E \cap \overline{F}$ sont ensembles disjoints. (Si x appartient à la fois à $E \cap F$ et à $E \cap \overline{F}$, alors x appartient à la fois à F et $\overline{F}$, qui est impossible.) Il s'ensuit que

$$p(E) = p(E \cap F) + p(E \cap \overline{F}) = \frac{\text{sept}}{18} + \frac{3}{14} = \frac{49}{126} + \frac{27}{126} = \frac{76}{126} = \frac{38}{63}.$$

Nous avons maintenant trouvé à la fois $p(F \cap E) = 7/18$ et $p(E) = 38/63$. Nous concluons que

$$p(F \mid E) = \frac{p(F \cap E)}{p(E)} = \frac{7/18}{38/63} = \frac{49}{76} \approx 0.645.$$

Avant d'avoir des informations supplémentaires, nous avons supposé que la probabilité que Bob sélectionne le premier 1 / 2. Cependant, avec les informations supplémentaires que la balle choisie au hasard est rouge, cette la probabilité est passée à environ 0,645. Autrement dit, la probabilité que Bob ait sélectionné un balle de la première boîte passé de 1/ 2, quand aucune information supplémentaire était disponible, à 0,645 une fois que nous avons su que la balle sélectionnée était rouge. ▲

En utilisant le même type de raisonnement que dans l'exemple 1, nous pouvons trouver la probabilité conditionnelle qu'un événement F se produit, étant donné qu'un événement E s'est produit, lorsque l'on connaît $p(E \mid F)$, $p(E \mid F)$, et $p(F)$. Le résultat que nous pouvons obtenir est appelé **théorème de Bayes** ; il porte le nom de Thomas Bayes, un mathématicien et ministre britannique du XVIIIe siècle qui a présenté ce résultat.

THÉORÈME 1 **LE THÉORÈME DE BAYES** Supposons que E et F sont des événements d'un échantillon d'espace S tels que $p(E) = 0$ et $p(F) = 0$. Alors

$$p(F \mid E) = \frac{p(E \mid F)\, p(F)}{p(E \mid F)\, p(F) + p(E \mid F)\, p(F)}.$$

Preuve: La définition de la probabilité conditionnelle nous dit que $p(F \mid E) = p(E \cap F) / p(E)$ et $p(E \mid F) = p(E \cap F) / p(F)$. Par conséquent, $p(E \cap F) = p(F \mid E)\, p(E)$ et $p(E \cap F) = p(E \mid F)\, p(F)$. L'égalisation de ces deux expressions pour $p(E \cap F)$ montre que

$$p(F \mid E)\, p(E) = p(E \mid F)\, p(F).$$

En divisant les deux côtés par $p(E)$, nous constatons que

$$p(F \mid E) = \frac{p(E \mid F)\, p(F)}{p(E)}.$$

Ensuite, nous montrons que $p(E) = p(E \mid F)\, p(F) + p(E \mid F)\, p(F)$. Pour voir cela, première note que $E = E \cap S = E \cap (F \cup F) = (E \cap F) \cup (E \cap F)$. De plus, $E \cap F$ et $E \cap F$ sont disjoints, car si $x \in E \cap F$ et $x \in E \cap F$, alors $x \in F \cap F = \emptyset$. Par conséquent, $p(E) = p(E \cap F) + p(E \cap F)$. Nous avons déjà montré que $p(E \cap F) = p(E \mid F)\, p(F)$.

De plus, on a $p(E \mid F) = p(E \cap F) / p(F)$, ce qui montre que $p(E \cap F) = p(E \mid F)\, p(F)$. Il s'ensuit maintenant que

$$p(E) = p(E \cap F) + p(E \cap F) = p(E \mid F)\, p(F) + p(E \mid F)\, p(F).$$

Pour compléter la preuve, nous insérons cette expression pour $p(E)$ dans l'équation $p(F \mid E) = p(E \mid F)\, p(F) / p(E)$. Nous avons prouvé que

$$p(F \mid E) = \frac{p(E \mid F)\, p(F)}{p(E \mid F)\, p(F) + p(E \mid F)\, p(F)}.$$

APPLICATION DU THÉORÈME DE BAYES Le théorème de Bayes peut être utilisé pour résoudre les problèmes qui se posent dans de nombreuses disciplines. Ensuite, nous discuterons d'une application du théorème de Bayes à la médecine. Dans En particulier, nous illustrerons comment le théorème de Bayes peut être utilisé pour évaluer la probabilité que une personne testée positive pour une maladie a effectivement cette maladie. Les résultats obtenus à partir de Le théorème de Bayes est souvent quelque peu surprenant, comme le montre l'exemple 2.

EXEMPLE 2 Supposons qu'une personne sur 100 000 souffre d'une maladie rare particulière pour laquelle il existe un test de diagnostic précis. Ce test est correct 99,0% du temps lorsqu'il est administré à une personne sélectionnée au hasard qui a la maladie; il est correct 99,5% du temps lorsqu'il est donné à une personne sélectionnée au hasard qui n'a pas la maladie. Compte tenu de ces informations, pouvons-nous trouver

(a) la probabilité qu'une personne dont le test de dépistage de la maladie est positif a la maladie?

(b) la probabilité qu'une personne dont le test de dépistage de la maladie est négatif n'a pas la maladie?

Une personne dont le test est positif devrait-elle être très préoccupée par la maladie?

Solution: (a) Soit F l'événement où une personne choisie au hasard a la maladie, et soit E soit le cas où une personne choisie au hasard est positive pour la maladie. Nous voulons calculer $p(F \mid E)$. Pour utiliser le théorème de Bayes pour calculer $p(F \mid E)$, nous devons trouver $p(E \mid F)$, $p(E \mid F)$, $p(F)$ et $p(F)$.

Nous savons qu'une personne sur 100 000 a cette maladie, alors $p(F) = 1/100,000 = 0.00001$ et $p(F) = 1\text{-}0.00001 = 0.99999$. Parce qu'une personne atteinte de la maladie a un résultat positif à 99% le temps, on sait que $p(E \mid F) = 0.99$; c'est la probabilité d'un vrai positif, qu'une personne avec les tests de la maladie positifs. Il s'ensuit que $p(E \mid F) = 1 - p(E \mid F) = 1 - 0.99 = 0.01$; il s'agit de la probabilité d'un faux négatif, qu'une personne atteinte de la maladie soit testée négativement.

De plus, parce qu'une personne qui n'a pas le test de la maladie a un résultat négatif de 99,5% le temps, on sait que $p(E \mid F) = 0.995$. Il s'agit de la probabilité d'un vrai négatif, qu'un personne sans la maladie a un résultat négatif. Enfin, nous voyons que $p(E \mid F) = 1 - p(E \mid F) = 1 - 0.995 = 0.005$; c'est la probabilité d'un faux positif, qu'une personne sans la maladie tests positifs.

La probabilité qu'une personne dont le test est positif pour la maladie soit réellement atteinte est $p(F \mid E)$. Par le théorème de Bayes, nous savons que

$$p(F \mid E) = \frac{p(E \mid F)\, p(F)}{p(E \mid F)\, p(F) + p(E \mid F)\, p(F)}$$

$$= \frac{(0.99)(0.00001)}{(0.99)(0.00001) + (0.005)(0.99999)} \approx 0.002.$$

(b) La probabilité qu'une personne dont le test de dépistage de la maladie est négatif n'est pas atteinte est $p(F \mid E)$. Par le théorème de Bayes, nous savons que

$$p(F \mid E) = \frac{p(E \mid F)\, p(F)}{p(E \mid F)\, p(F) + p(E \mid F)\, p(F)}$$

$$= \frac{(0.995)(0.99999)}{(0.995)(0.99999) + (0.01)(0.00001)} \approx 0.9999999.$$

Par conséquent, 99,99999% des personnes dont le test est négatif ne souffrent vraiment pas de la maladie.

Dans la partie (a), nous avons montré que seulement 0,2% des personnes testées positives pour la maladie avoir la maladie. La maladie étant extrêmement rare, le nombre de faux positifs sur le test de diagnostic est beaucoup plus élevé que le nombre de vrais positifs, ce qui rend le pourcentage de personnes qui sont positifs et qui ont en fait une maladie extrêmement petite. Les personnes dont le test est positif les maladies ne devraient pas être trop préoccupées par le fait qu'elles ont effectivement la maladie. ▲

GÉNÉRALISER LE THÉORÈME DE BAYES Notez que dans l'énoncé du théorème de Bayes, le les événements F et F s'excluent mutuellement et couvrent tout l'espace d'échantillonnage S (c'est-à-dire $F \cup F = S$). Nous pouvons étendre le théorème de Bayes à toute collection d'événements mutuellement exclusifs qui couvrent l'ensemble échantillonner l'espace S, de la manière suivante.

THÉORÈME 2 **Théorème des baies généralisées** Supposons que E soit un événement à partir d'un espace échantillon S et que $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sont des événements mutuellement exclusifs tels que $\bigcup_{i=1}^{n} F_i = S$. Suppose que $p(E) = 0$ et $p(F_i) = 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$. alors

$$p(F_j \mid E) = \frac{p(E \mid F_j)\, p(F_j)}{\sum_{i=1}^{n} p(E \mid F_i)\, p(F_i)}.$$

Nous laissons la preuve de cette version généralisée du théorème de Bayes à l'exercice 17.

Filtres de spam bayésiens

La plupart des boîtes aux lettres électroniques reçoivent un flot de messages indésirables et non sollicités, appelés **spam** . Étant donné que le spam menace de submerger les systèmes de courrier électronique, une un travail a été consacré à son filtrage. Certains des premiers outils développés pour éliminer le spam étaient basés sur le théorème de Bayes, tels que **les filtres anti-spam bayésiens** .

Un filtre anti-spam bayésien utilise des informations sur les messages électroniques déjà vus pour deviner si un e-mail entrant est du spam. Les filtres anti-spam bayésiens recherchent des occurrences de des mots particuliers dans les messages. Pour un mot particulier w , la probabilité que w apparaisse dans un spam le message électronique est estimé en déterminant le nombre de fois où w apparaît dans un message de un grand nombre de messages connus pour être du spam et le nombre de fois qu'il apparaît dans un grand les messages connus pour ne pas être du spam. Lorsque nous examinons les messages électroniques pour déterminer s'ils pourrait être du spam, nous examinons des mots qui pourraient être des indicateurs de spam, tels que «offre», «spécial» ou «Opportunité», ainsi que des mots qui pourraient indiquer qu'un message n'est pas du spam, comme «maman» «Déjeuner» ou «Jan» (où Jan est l'un de vos amis). Malheureusement, les filtres anti-spam échouent parfois identifier un spam comme spam; c'est ce qu'on appelle un faux négatif. Et ils identifient parfois un message qui n'est pas du spam en tant que spam; c'est ce qu'on appelle un faux positif. Lors du test de spam, il est important de minimiser les faux positifs, car le filtrage des e-mails recherchés est bien pire que laisser passer du spam.

L'utilisation du mot *spam* pour les e-mails non sollicités vient d'un Monty Croquis de comédie Python à propos d'un café où le produit alimentaire Le spam arrive avec tout indépendamment du fait que les clients le veulent.

THOMAS BAYES (1702-1761) Thomas Bayes était le fils d'un ministre d'une secte religieuse connue sous le nom de Non-conformistes. Cette secte était considérée comme hérétique dans la Grande-Bretagne du XVIIIe siècle. À cause du secret des non-conformistes, on connaît peu la vie de Thomas Bayes. Quand Thomas était jeune, sa famille a déménagé à Londres. Thomas a probablement fait ses études en privé; Les enfants non conformistes ne fréquentaient généralement pas l'école. Dans 1719 Bayes entre à l'Université d'Édimbourg, où il étudie la logique et la théologie. Il a été ordonné Ministre non conformiste comme son père et a commencé son travail en tant que ministre assistant son père. En 1733, il est devenu ministre de la Chapelle presbytérienne à Tunbridge Wells, au sud-est de Londres, où il est resté ministre jusqu'à 1752.

Bayes est surtout connu pour son essai sur la probabilité publié en 1764, trois ans après sa mort. Cet essai a été envoyé à la Royal Society par un ami qui l'a trouvé dans les papiers laissés à la mort de Bayes. dans le introduction à cet essai, Bayes a déclaré que son objectif était de trouver une méthode qui pourrait mesurer la probabilité qu'un événement se produise, en supposant que nous n'en savons rien, mais que, dans les mêmes circonstances, cela s'est produit une certaine proportion de fois. Les conclusions de Bayes ont été acceptées par le grand mathématicien français Laplace mais ont ensuite été contestées par Boole, qui a remis en question les dans son livre *Laws of Thought* . Depuis lors, les techniques de Bayes sont sujettes à controverse.

Bayes a également écrit un article publié à titre posthume: «Une introduction à la doctrine des fluxions et une défense des mathématiciens contre les objections de l'auteur de l'analyste », qui a soutenu les fondements logiques du calcul. Bayes a été élu membre de la Royal Society en 1742, avec le soutien d'importants membres de la Société, même si à cette époque fois qu'il n'avait aucun ouvrage mathématique publié. La seule publication connue de Bayes de son vivant était prétendument un livre mystique intitulé *Divine Bienveillance* , discutant de la causalité originelle et du but ultime de l'univers. Bien que le livre soit généralement attribué à Bayes, aucun nom d'auteur n'apparaissait sur la page de titre, et l'ensemble du travail serait de provenance douteuse. Les preuves des talents mathématiques de Bayes proviennent d'un cahier qui a été presque certainement écrit par Bayes, qui contient beaucoup travaux mathématiques, y compris des discussions sur les probabilités, la trigonométrie, la géométrie, les solutions d'équations, les séries et les différentiels calcul. Il y a aussi des sections sur la philosophie naturelle, dans lesquelles Bayes examine des sujets qui incluent l'électricité, l'optique et le céleste mécanique. Bayes est également l'auteur d'une publication mathématique sur les séries asymptotiques, parue après sa mort.

Nous allons développer des filtres anti-spam bayésiens de base.Tout d'abord, supposons que nous ayons un ensemble B de messages connu pour être un spam et un ensemble G de messages connus pour ne pas être du spam.(Par exemple, les utilisateurs pourraient classer les messages comme spam lorsqu'ils les examinent dans leur boîte de réception.) Nous identifions ensuite mots qui se produisent dans B et G . Nous comptons le nombre de messages dans l'ensemble contenant chacun mot pour trouver $n_B(w)$ et $n_G(w)$, le nombre de messages contenant le mot w dans les ensembles B et G , respectivement. Ensuite, la probabilité empirique qu'un message de spam contienne le mot w est $p(w) = n_B(w) / |B|$, et la probabilité empirique qu'un message qui n'est pas du spam contienne le mot w est $q(w) = n_G(w) / |G|$. On note que $p(w)$ et $q(w)$ estiment les probabilités que un message de spam entrant et un message entrant qui n'est pas du spam contiennent le mot w , respectivement.

Supposons maintenant que nous recevions un nouveau message électronique contenant le mot w . Soit S l'événement que le message est du spam. Soit E l'événement où le message contient le mot w . Les événements S , que le message est du spam, et S , que le message n'est pas du spam, partitionnez l'ensemble de tous les messages. Par conséquent, selon le théorème de Bayes, la probabilité que le message soit du spam, étant donné qu'il contient le mot w , est

$$p(S \mid E) = \frac{p(E \mid S)\, p(S)}{p(E \mid S)\, p(S) + p(E \mid S)\, p(S)} .$$

Pour appliquer cette formule, nous estimons d'abord $p(S)$, la probabilité qu'un message entrant soit spam, ainsi que $p(S)$, la probabilité que le message entrant ne soit pas du spam.Sans préalable connaissance de la probabilité qu'un message entrant soit du spam, pour simplifier nous supposons que le message est également susceptible d'être du spam qu'il ne l'est pas.Autrement dit, nous supposons que $p(S) = p(S) = 1/2$. En utilisant cette hypothèse, nous constatons que la probabilité qu'un message soit du spam, étant donné qu'il contient le mot w , est

$$p(S \mid E) = \frac{p(E \mid S)}{p(E \mid S) + p(E \mid S)} .$$

(Notez que si nous avons des données empiriques sur le rapport entre les messages de spam et les messages pas de spam, nous pouvons changer cette hypothèse pour produire une meilleure estimation de $p(S)$ et de $p(S)$; voir l'exercice 22.)

Ensuite, nous estimons $p(E \mid S)$, la probabilité conditionnelle que le message contienne le mot w étant donné que le message est du spam, par $p(w)$. De même, nous estimons $p(E \mid S)$, la con-probabilité supplémentaire que le message contienne le mot w , étant donné que le message n'est pas du spam, par $q(w)$. L'insertion de ces estimations pour $p(E \mid S)$ et $p(E \mid S)$ nous indique que $p(S \mid E)$ peut être Estimé par

$$r(w) = \frac{p(w)}{p(w) + q(w)} ;$$

c'est-à-dire que $r(w)$ estime la probabilité que le message soit du spam, étant donné qu'il contient le mot w . Si $r(w)$ est supérieur à un seuil que nous fixons, tel que 0.9, puis nous classons le message comme spam.

EXEMPLE 3 Supposons que nous ayons trouvé que le mot «Rolex» apparaît dans 250 des 2000 messages connus être du spam et dans 5 des 1 000 messages connus pour ne pas être du spam.Estimer la probabilité qu'un message entrant contenant le mot «Rolex» est du spam, en supposant qu'il est tout aussi probable que un message entrant est du spam ou non.Si notre seuil de rejet d'un message comme spam est 0.9, allons-nous rejeter de tels messages?

Solution: Nous utilisons le nombre de fois que le mot «Rolex» apparaît dans les messages de spam et les messages qui ne sont pas du spam pour trouver que $p(\text{Rolex}) = 250/2000 = 0.125$ et $q(\text{Rolex}) = 5/1000 = 0.005$.

Parce que nous supposons qu'il est tout aussi probable qu'un message entrant soit du spam qu'il l'est ne pas être du spam, on peut estimer la probabilité qu'un message entrant contenant le mot "Rolex" est du spam par

$$r(\text{Rolex}) = \frac{p(\text{Rolex})}{p(\text{Rolex}) + q(\text{Rolex})} = \frac{0.125}{0.125 + 0.005} = \frac{0.125}{0.130} \approx 0.962.$$

Parce que $r(\text{Rolex})$ est supérieur au seuil 0.9, nous rejetons les messages comme spam. ▲

La détection du spam sur la base de la présence d'un seul mot peut conduire à des faux positifs excessifs et les faux négatifs. Par conséquent, les filtres anti-spam vérifient la présence de plusieurs mots. Pour Par exemple, supposons que le message contienne les mots w_1 et w_2. Soit E_1 et E_2 désignent événements que le message contient les mots w_1 et w_2, respectivement. Pour faire nos calculs plus simple, nous supposons que E_1 et E_2 sont des événements indépendants et que $E_1 \mid S$ et $E_2 \mid S$ sont événements indépendants et que nous n'avons aucune connaissance préalable de savoir si le message est du spam. (Les hypothèses selon lesquelles E_1 et E_2 sont indépendantes et que $E_1 \mid S$ et $E_2 \mid S$ sont indépendant peut introduire une erreur dans nos calculs; nous supposons que cette erreur est faible.) En utilisant le théorème de Bayes et nos hypothèses, nous pouvons montrer (voir exercice 23) que $p(S \mid E_1 \cap E_2)$, la probabilité que le message soit du spam étant donné qu'il contient à la fois w_1 et w_2, est

$$p(S \mid E_1 \cap E_2) = \frac{p(E_1 \mid S)\, p(E_2 \mid S)}{p(E_1 \mid S)\, p(E_2 \mid S) + p(E_1 \mid S)\, p(E_2 \mid S)}.$$

On estime la probabilité $p(S \mid E_1 \cap E_2)$ par

$$r(w_1, w_2) = \frac{p(w_1)\, p(w_2)}{p(w_1)\, p(w_2) + q(w_1)\, q(w_2)}.$$

Autrement dit, $r(w_1, w_2)$ estime la probabilité que le message soit du spam, étant donné qu'il contient le mots w_1 et w_2. Lorsque $r(w_1, w_2)$ est supérieur à un seuil prédéfini, tel que 0.9, nous déterminons que le message est probablement du spam.

EXEMPLE 4 Supposons que nous formions un filtre anti-spam bayésien sur un ensemble de 2000 messages de spam et 1000 messages qui ne sont pas du spam. Le mot «stock» apparaît dans 400 messages de spam et 60 messages qui ne sont pas spam, et le mot «sous-évalué» apparaît dans 200 messages de spam et 25 messages qui ne sont pas Spam. Estimer la probabilité qu'un message entrant contenant à la fois les mots «stock» et «Sous-évalué» est du spam, en supposant que nous ne savons pas s'il s'agit de spam. Allons-nous rejeter ces messages comme spam lorsque nous fixons le seuil à 0.9?

Solution: utiliser le nombre de chacun de ces deux mots dans des messages connus pour être du spam ou ne pas être connu lespam, nous obtenons les estimations suivantes: $p(\text{stock}) = 400/2000 = 0.2$, $q(\text{magasin}) = 60/1000 = 0.06$, $p(\text{sous-évalué}) = 200/2000 = 0.1$, et $q(\text{sous-évalué}) = 25/1000 = 0.025$. En utilisant ces probabilités, nous pouvons estimer la probabilité que le message est du spam par

$$r(\text{stock}, \text{sous-évalué}) = \frac{p(\text{stock})\, p(\text{sous-évalué})}{p(\text{stock})\, p(\text{sous-évalué}) + q(\text{stock})\, q(\text{sous-évalué})}$$

$$= \frac{(0.2)(0.1)}{(0.2)(0.1) + (0.06)(0.025)} \approx 0.930.$$

Parce que nous avons fixé le seuil de rejet des messages à 0.9, ces messages seront rejetés par le filtre. ▲

Plus nous utilisons de mots pour estimer la probabilité qu'un message entrant soit du spam, meilleure est notre chance de déterminer correctement s'il s'agit de spam. En général, si E_i est le si le message contient le mot w_i, en supposant que le nombre de messages de spam entrants est approximativement le même que le nombre de messages entrants qui ne sont pas du spam et que événements $E_i \mid S$ sont indépendants, puis par le théorème de Bayes la probabilité qu'un message contenant tous les mots $w_1, w_2, \ldots, w_k$ est spam est

$$p\left(S \mid \bigcap_{i=1}^{k} E_i\right) = \frac{\prod_{i=1}^{k} p(E_i \mid S)}{\prod_{i=1}^{k} p(E_i \mid S) + \prod_{i=1}^{k} p(E_i \mid S)}.$$

On peut estimer cette probabilité par

$$r(w_1, w_2, \ldots, w_k) = \frac{\prod_{i=1}^{k} p(w_i)}{\prod_{i=1}^{k} p(w_i) + \prod_{i=1}^{k} q(w_i)}.$$

Pour le filtre anti-spam le plus efficace, nous choisissons des mots pour lesquels la probabilité que chacun de ces mots apparaît dans le spam est soit très élevé ou très faible. Lorsque nous calculons cette valeur pour un message particulier, nous rejetons le message comme spam si $r(w_1, w_2, \ldots, w_k)$ dépasse un préréglage seuil, tel que 0 . 9.

L'empoisonnement bayésien, le insertion de mots supplémentaires dans vaincre les filtres anti-spam, peut utiliser au hasard ou délibérément sélectionné mots.

Une autre façon d'améliorer les performances d'un filtre anti-spam bayésien consiste à examiner capacités que des paires de mots particulières apparaissent dans le spam et dans les messages qui ne le sont pasnous traiter ensuite l'apparence de ces paires de mots comme l'apparence d'un seul bloc, plutôt que comme l'apparition de deux mots distincts. Par exemple, la paire de mots «améliorer les performances» indique très probablement du spam, tandis que les «performances de l'opéra» indiquent un message qui n'est pas du spam. De même, nous pouvons évaluer la probabilité qu'un message soit du spam en examinant la structure d'un message pour déterminer où les mots y apparaissent. De plus, les filtres anti-spam examinent l'apparence de certains types de chaînes de caractères plutôt que de simples mots. Par exemple, un message avec le valide L'adresse e-mail d'un de vos amis est moins susceptible d'être du spam (si elle n'est pas envoyée par un ver) qu'une contenant une adresse e-mail provenant d'un pays connu pour être à l'origine de nombreux spams. Là est une guerre en cours entre les gens qui créent du spam et ceux qui essaient de filtrer leurs messages. Cela conduit à l'introduction de nombreuses nouvelles techniques pour vaincre les filtres anti-spam, y compris l'insertion dans les messages de spam de longues chaînes de mots qui apparaissent dans les messages qui ne sont pas du spam, ainsi que y compris des mots à l'intérieur des images. Les techniques dont nous avons discuté ici ne sont que les premières étapes dans la lutte contre cette guerre contre le spam.

Des exercices

1. Supposons que E et F sont des événements dans un espace échantillon et $p(E) = 1/3$, $P(f) = 1/2$, et $p(E \mid F) = 2/5$. Recherche $p(F \mid E)$.

2. Supposons que E et F sont des événements dans un espace échantillon et $p(E) = 2/3$, $P(f) = 3/4$, et $p(F \mid E) = 5/8$ Recherche $p(E \mid F)$.

3. Supposons que Frida sélectionne une balle en choisissant d'abord l'une des deux cases au hasard, puis en sélectionnant une balle de cette boîte au hasard. La première boîte contient deux boules blanches et trois boules bleues, et la deuxième boîte contient quatre blanches balles et une balle bleue. Quelle est la probabilité que Frida a choisi une balle de la première case si elle a sélectionné un bleu Balle?

4. Supposons qu'Ann sélectionne une balle en choisissant d'abord l'une des deux boîtes au hasard, puis en sélectionnant une balle dans cette boîte. La première boîte contient trois boules orange et quatre noires balles, et la deuxième boîte contient cinq boules orange et six boules noires. Quelle est la probabilité qu'Ann ait choisi une balle de la deuxième case si elle a sélectionné une orange Balle?

5. Supposons que 8% de tous les coureurs cyclistes utilisent des stéroïdes, un cycliste qui utilise des stéroïdes est positif pour les stéroïdes 96% du temps, et qu'un cycliste qui n'utilise pas les stéroïdes sont positifs pour les stéroïdes 9% du temps. Quoi est la probabilité qu'un cycliste choisi au hasard qui tests positifs pour les stéroïdes utilise-t-il réellement des stéroïdes?

6. Lorsqu'un test de stéroïdes est administré aux joueurs de football, 98% des joueurs prenant des stéroïdes sont positifs et 12% des les joueurs ne prenant pas de stéroïdes sont positifs. Supposons que 5% des joueurs de football prennent des stéroïdes. Quelle est la probabilité qu'un joueur de football qui teste positif prend des stéroïdes?

7. Supposons qu'un test d'utilisation de l'opium ait un faux positif de 2% et un taux de faux négatifs de 5%. Soit 2% des personnes les personnes qui n'utilisent pas de test d'opium positif pour l'opium, et

5% des utilisateurs d'opium sont négatifs pour l'opium. En outre, supposons que 1% des personnes utilisent réellement l'opium.

a) Trouvez la probabilité qu'une personne dont le test est négatif pour l'utilisation de l'opium n'utilise pas l'opium.

b) Trouver la probabilité qu'une personne dont le test est positif pour l'utilisation de l'opium utilise en fait l'opium.

8. Supposons qu'une personne sur 10 000 personnes ait une maladie génétique. Il existe un excellent test pour la maladie; 99,9% des personnes atteintes de la maladie sont positives et seulement 0,02% qui n'ont pas un test de maladie positif.

a) Quelle est la probabilité qu'une personne qui teste la positive a la maladie génétique?

b) Quelle est la probabilité qu'une personne qui teste tive n'a pas la maladie?

9. Supposons que 8% des patients testés dans une clinique soient infectés par le VIH. De plus, supposons que lorsqu'un sang test de dépistage du VIH est donné, 98% des patients infectés par Test VIH positif et que 3% des patients non infectés séropositifs. Quelle est la probabilité que

a) un patient dont le test de dépistage du VIH est positif est avec cela?

b) un patient dont le test de dépistage du VIH est positif avec ce test n'est pas infecté?

c) un patient dont le test de dépistage du VIH est négatif avec ce test est avec cela?

d) un patient dont le test de dépistage du VIH est négatif avec ce test n'est pas infecté?

10. Supposons que 4% des patients testés dans une clinique soient infectés par la grippe aviaire. De plus, supposons que lorsqu'un test sanguin pour la grippe aviaire est effectué, 97% des patients infectés par le test de l'influenza aviaire positifs et que 2% des patients non infectés par la grippe aviaire test positif. Quelle est la probabilité que

a) un patient dont le test de dépistage de la grippe aviaire est positif le test en est infecté?

b) un patient dont le test de dépistage de la grippe aviaire est positif test n'est pas infecté par elle?

c) un patient dont le test de grippe aviaire est négatif avec le test en est infecté?

d) un patient dont le test de grippe aviaire est négatif avec test n'est pas infecté par elle?

11. Une entreprise d'électronique prévoit d'introduire un nouveau téléphone appareil photo. L'entreprise commande un marketing rapport pour chaque nouveau produit qui prédit le succès ou la défaillance du produit. De nouveaux produits introduits par l'entreprise, 60% ont été des succès. En outre, 70% de leurs produits à succès devraient être succès, tandis que 40% des produits ayant échoué étaient prévus être des succès. Trouvez la probabilité que cette nouvelle caméra le téléphone réussira si son succès a été prédit.

∗ **12.** Une sonde spatiale près de Neptune communique avec la Terre des chaînes de bits. Supposons que dans ses transmissions il envoie un 1 un tiers du temps et un 0 deux tiers du temps. Lorsqu'un 0 est envoyé, la probabilité qu'il soit reçu correct est de 0,9 et la probabilité qu'il soit reçu incorrectement (en tant que 1) est 0,1. Lorsqu'un 1 est envoyé, la probabilité que il est reçu correctement est de 0,8, et la probabilité qu'il soit reçu de manière incorrecte (comme un 0) est de 0,2.

a) Trouvez la probabilité qu'un 0 soit reçu.

b) Utilisez le théorème de Bayes pour trouver la probabilité qu'un a 0 a été transmis, étant donné qu'un 0 a été reçu.

13. Supposons que E , F_1 , F_2 et F_3 soient des événements d'un l'espace d'échantillon S et que F_1 , F_2 et F_3 sont disjoints sage et leur union est S . Trouver $p(F_1 \mid E)$ si $P(E \mid F_1) = 1/8$, $P(E \mid F_2) = 1/4$, $p(E \mid F_3) = 1/6$, $p(F_1) = 1/4$, $p(F_2) = 1/4$, et $p(F_3) = 1/2$.

14. Supposons que E , F_1 , F_2 et F_3 soient des événements d'un l'espace d'échantillon S et que F_1 , F_2 et F_3 sont disjoints sage et leur union est S . Trouvez $p(F_2 \mid E)$ si $p(E \mid F_1) = 2/7$, $P(E \mid F_2) = 3/8$, $P(E \mid F_3) = 1/2$, $p(F_1) = 1/6$, $p(F_2) = 1/2$, et $p(F_3) = 1/3$.

15. Dans cet exercice, nous utiliserons le théorème de Bayes pour résoudre Puzzle Monty Hall (exemple 10 dans la section 7.1). Rappel que dans ce puzzle, vous êtes invité à sélectionner l'un des trois portes à ouvrir. Il y a un gros prix derrière l'un des trois portes et les deux autres portes sont perdantes. Après Vous sélectionnez une porte, Monty Hall ouvre l'une des deux portes que vous n'a pas choisi qu'il sait être une porte perdante, sélectionnant au aléatoire si les deux perdent des portes. Monty vous demande si vous souhaitez changer de porte. Supposons que les trois les portes du puzzle sont étiquetées 1, 2 et 3. Soit W le variable aléatoire dont la valeur est le numéro du gagnant porte; supposer que $p(W = k) = 1/3$ pour $k = 1, 2, 3$. Soit M désigne la variable aléatoire dont la valeur est le nombre de la porte que Monty ouvre. Supposons que vous choisissez la porte i .

a) Quelle est la probabilité que vous gagniez le prix si le jeu se termine sans que Monty vous demande si vous vous voulez changer de porte?

b) Trouvez $p(M = j \mid W = k)$ pour $j = 1, 2, 3$ et $k = 1, 2, 3$.

c) Utilisez le théorème de Bayes pour trouver $p(W = j \mid M = k)$ où i et j et k sont des valeurs distinctes.

d) Expliquez pourquoi la réponse à la partie (c) vous indique si vous devriez changer de porte lorsque Monty vous donne le chance de le faire.

16. Ramesh peut se mettre au travail de trois manières différentes: en clé, en voiture ou en bus. En raison du trafic de banlieue, il est une chance de 50% qu'il sera en retard quand il conduira son voiture. Quand il prend le bus, qui utilise une voie spéciale servi pour les bus, il y a 20% de chances qu'il soit en retard. La probabilité qu'il soit en retard lorsqu'il chevauche son le cycle n'est que de 5%. Ramesh arrive tard un jour. Son patron veut estimer la probabilité qu'il conduise sa voiture à travailler ce jour-là.

a) Supposons que le patron suppose qu'il y a $1/3$ Risque que Ramesh prend chacune des trois façons dont il peut se rendre travail. Quelle estimation de la probabilité que Ramesh conduisait sa voiture, le patron obtient-il du théorem sous cette hypothèse?

b) Supposons que le patron sache que Ramesh conduit 30% des le temps, ne prend le bus que 10% du temps, et prend son vélo 60% du temps. Quelle estimation pour le probabilité que Ramesh conduise sa voiture fait le patron obtenir du théorème de Bayes en utilisant cette information?

∗ **17.** Prouvez le théorème 2, la forme étendue du théorem. Autrement dit, supposons que E est un événement d'un échantillon l'espace S et que $F_1, F_2, \ldots, F_n$ s'excluent mutuellement des événements tels que $\bigcup_{i=1}^{n} F_i = S$. Supposons que $p(E) = 0$ et $p(F_i) = 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$. Montre CA

$$p(F_j \mid E) = \frac{p(E \mid F_j)\, p(F_j)}{\sum_{i=1}^{n} p(E \mid F_i)\, p(F_i)}.$$

[*Astuce:* utilisez le fait que $E = \bigcup_{i=1}^{n} (E \cap F_i)$.]

18. Supposons qu'un filtre anti-spam bayésien soit formé sur un ensemble de 500 messages de spam et 200 messages qui ne sont pas du spam. Le mot «passionnant» apparaît dans 40 messages de spam et dans 25 messages qui ne sont pas du spam. Un incomêtre rejeté comme spam s'il contient le mot «Excitant» et le seuil de rejet du spam est 0 . 9?

19. Supposons qu'un filtre anti-spam bayésien soit formé sur un ensemble de 1000 messages de spam et 400 messages qui ne sont pas Spam. Le mot «opportunité» apparaît dans 175 messages de spam. messages et 20 messages qui ne sont pas du spam. Un message à venir soit rejeté comme spam s'il contient le mot «opportunité» et le seuil de rejet d'un message sage est 0 . 9?

20. Pourrions-nous rejeter un message comme spam dans l'exemple 4

a) en utilisant simplement le fait que le mot «sous-évalué» apparaît dans le message?

b) en utilisant simplement le fait que le mot «stock» apparaît dans le message?

21. Supposons qu'un filtre anti-spam bayésien soit formé sur un ensemble de 10 000 messages de spam et de 5 000 messages non Spam. Le mot «amélioration» apparaît dans 1500 spams messages et 20 messages qui ne sont pas du spam, tandis que le mot «à base de plantes» apparaît dans 800 messages de spam et 200 les messages qui ne sont pas du spam. Estimer la probabilité que un message reçu contenant à la fois les mots ment »et« à base de plantes »est du spam. Le message sera-t-il rejeté comme spam si le seuil de rejet du spam est 0 . 9?

22. Supposons que nous ayons des informations préalables concernant si un message entrant aléatoire est du spam. En parti-
En particulier, supposons que sur une période de temps, nous trouvons que s les messages de spam arrivent et les messages h arrivent qui sont pas de spam.

a) Utilisez ces informations pour estimer $p(S)$, la probabilité un message entrant est du spam, et $p(\overline{S})$, le probabilité qu'un message entrant ne soit pas du spam.

b) Utilisez le théorème de Bayes et la partie (a) pour estimer le capacité qu'un message entrant contenant le mot w est du spam, où $p(w)$ est la probabilité que w se produise dans un message de spam et $q(w)$ est la probabilité que w se produit dans un message qui n'est pas du spam.

23. Supposons que E_1 et E_2 sont les événements qu'un entrant le message électronique contient les mots w_1 et w_2 , respectivement. En supposant que E_1 et E_2 sont des événements indépendants et que $E_1 \mid S$ et $E_2 \mid S$ sont des événements indépendants, où S est le si un message entrant est du spam, et que nous avons aucune connaissance préalable quant à savoir si le message est du spam, montre que

$$p(S \mid E_1 \cap E_2) = \frac{p(E_1 \mid S)\, p(E_2 \mid S)}{p(E_1 \mid S)\, p(E_2 \mid S) + p(E_1 \mid \overline{S})\, p(E_2 \mid \overline{S})}.$$

Valeur et variance attendues

introduction

La **valeur attendue** d'une variable aléatoire est la somme de tous les éléments dans un espace échantillon du produit de la probabilité de l'élément et de la valeur de la variable aléatoire à cet élément. Par conséquent, la valeur attendue est une moyenne pondérée des valeurs d'une variable aléatoire.le La valeur attendue d'une variable aléatoire fournit un point central pour la distribution des valeurs de cette variable aléatoire. Nous pouvons résoudre de nombreux problèmes en utilisant la notion de la valeur attendue d'un variable aléatoire, telle que déterminer qui a un avantage dans les jeux de hasard et l'informatique la complexité moyenne des algorithmes. Une autre mesure utile d'une variable aléatoire est son **variance** , qui nous indique la répartition des valeurs de cette variable aléatoire. Nous pouvons utiliser le variance d'une variable aléatoire pour nous aider à estimer la probabilité qu'une variable aléatoire prenne valeurs loin de sa valeur attendue.

Valeurs attendues

De nombreuses questions peuvent être formulées en termes de valeur que nous attendons d'une variable aléatoire, ou plus précisément, la valeur moyenne d'une variable aléatoire lorsqu'une expérience est effectuée un grand nombre de fois. Les questions de ce type comprennent: Combien de têtes devraient apparaître

quand une pièce est retournée 100 fois? Quel est le nombre attendu de comparaisons utilisées pour trouver un élément dans une liste à l'aide d'une recherche linéaire? Pour étudier ces questions, nous introduisons le concept de valeur attendue d'une variable aléatoire.

DÉFINITION 1 La *valeur attendue* , également appelée *espérance* ou *moyenne* , de la variable aléatoire X sur la l'espace d'échantillon S est égal à

$$E(X) = \sum_{s \in S} p(s) X(s).$$

L' *écart* de X à $s \in S$ est $X(s) - E(X)$, la différence entre la valeur de X et le moyenne de X .

Notez que lorsque l'espace échantillon S a n éléments $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i) X(x_i)$.

Remarque: Lorsqu'il y a une infinité d'éléments de l'espace échantillon, l'attente est dé-condamné à une amende uniquement lorsque la série infinie dans la définition est absolument convergente.En particulier, l'attente d'une variable aléatoire sur un espace échantillon infini est finie si elle existe.

EXEMPLE 1 **Valeur attendue d'un** dé Soit X le nombre qui apparaît lorsqu'un dé équitable est lancé. Quoi est la valeur attendue de X ?

Solution: La variable aléatoire X prend les valeurs 1 , 2 , 3 , 4 , 5, ou 6, chacune avec une probabilité de 1 / 6. Il s'ensuit que

$$E(X) = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 = \frac{21}{6} = \frac{\text{sept}}{2}.$$

▲

EXEMPLE 2 Une pièce équitable est lancée trois fois. Soit S l'espace d'échantillon des huit résultats possibles, et soit X la variable aléatoire qui attribue à un résultat le nombre de têtes dans ce résultat. Quelle est la valeur attendue de X ?

Solution: dans l'exemple 10 de la section 7.2, nous avons répertorié les valeurs de X pour les huit résultats possibles lorsqu'une pièce est lancée trois fois. Parce que la pièce est juste et que les flips sont indépendants, le la probabilité de chaque résultat est de $1/8$. Par conséquent,

$$E(X) = \frac{1}{8} [X(HHH) + X(HHT) + X(HTH) + X(THH) + X(TTH)$$

$$+ X(THT) + X(HTT) + X(TTT)\,]$$

$$= \frac{1}{8}(3+2+2+2+1+1+1+0) = \frac{12}{8}$$

$$= \frac{3}{2}.$$

Par conséquent, le nombre attendu de têtes qui se présentent lorsqu'une pièce équitable est retournée trois fois est de 3 / deux. ▲

Lorsqu'une expérience a relativement peu de résultats, nous pouvons calculer la valeur attendue de une variable aléatoire directement à partir de sa définition, comme cela a été fait dans l'exemple 2. Cependant, quand un l'expérience a un grand nombre de résultats, il peut être gênant de calculer la valeur attendue valeur d'une variable aléatoire directement à partir de sa définition. Au lieu de cela, nous pouvons trouver la valeur attendue

d'une variable aléatoire en regroupant tous les résultats attribués la même valeur par le hasard variable, comme le montre le théorème 1.

THÉORÈME 1 Si X est une variable aléatoire et $p(X = r)$ est la probabilité que $X = r$, de sorte que $p(X = r) = \sum_{s \in S,\, X(s) = r} p(s)$, puis

$$E(X) = \sum_{r \in X(S)} p(X = r)\, r.$$

Preuve: Supposons que X est une variable aléatoire de gamme $X(S)$, et que $p(X = r)$ soit le proba-possibilité que la variable aléatoire X prenne la valeur r. Par conséquent, $p(X = r)$ est la somme des probabilités des résultats s tels que $X(s) = r$. Il s'ensuit que

$$E(X) = \sum_{r \in X(S)} p(X = r)\, r.$$

L'exemple 3 et la démonstration du théorème 2 illustreront l'utilisation de cette formule. Par exemple 3 nous trouverons la valeur attendue de la somme des nombres qui apparaissent sur deux dés justes lorsque ils sont roulés. Dans le théorème 2, nous trouverons la valeur attendue du nombre de succès lorsque n *Des* essais de Bernoulli sont effectués.

EXEMPLE 3 Quelle est la valeur attendue de la somme des nombres qui apparaissent quand une paire de dés équitables est roulé?

Solution: Soit X la variable aléatoire égale à la somme des nombres qui apparaissent quand un la paire de dés est lancée. Dans l'exemple 12 de la section 7.2, nous avons indiqué la valeur de X pour les 36 sorties vient de cette expérience. La plage de X est $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Par l'exemple 12 de Section 7.2, nous voyons que

$$p(X = 2) = p(X = 12) = 1/36,$$

$p(X = 3) = p(X = 11) = 2/36 = 1/18$,
$p(X = 4) = p(X = 10) = 3/36 = 1/$ douze ,

$p(X = 5) = p(X = 9) = 4/36 = 1/9$,

$p(X = 6) = p(X = 8) = 5/36$,

$p(X = 7) = 6/36 = 1/$ six .

En substituant ces valeurs dans la formule, nous avons

$$\begin{aligned} E(X) &= 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{1}{18} + 4 \cdot \frac{1}{12} + 5 \cdot \frac{1}{9} + 6 \cdot \frac{5}{36} + 7 \cdot \frac{1}{6} \\ &\quad + 8 \cdot \frac{5}{36} + 9 \cdot \frac{1}{9} + 10 \cdot \frac{1}{12} + 11 \cdot \frac{1}{18} + 12 \cdot \frac{1}{36} \\ &= 7. \end{aligned}$$

▲

THÉORÈME 2 Le nombre de succès escompté lorsque n essais de Bernoulli mutuellement indépendants sont formé, où p est la probabilité de réussite de chaque essai, est np .

Preuve: Soit X la variable aléatoire égale au nombre de succès dans n essais. Par
Le théorème 2 de la section 7.2 montre que $p(X = k) = C(n, k) p^k q^{n-k}$. Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{n} kp(X = k) && \text{par Theorem 1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} kC(n, k) p^k q^{n-k} && \text{par le théorème 2 dans la section 7.2} \\ &= \sum_{k=1}^{n} nC(n-1, k-1) p^k q^{n-k} && \text{par l'exercice 21 de la section 6.4} \\ &= np \sum_{k=1}^{n} C(n-1, k-1) p^{k-1} q^{n-k} && \text{factoriser } np \text{ de chaque terme} \\ &= np \sum_{j=0}^{n-1} C(n-1, j) p^j q^{n-1-j} && \text{indice de sommation glissant avec } j = k-1 \\ &= np(p+q)^{n-1} && \text{par le théorème binomial} \\ &= np. && \text{car } p + q = 1 \end{aligned}$$

Ceci complète la preuve car elle montre que le nombre attendu de succès dans n mutuellement
les essais indépendants de Bernoulli sont np .

Nous montrerons également que l'hypothèse selon laquelle les essais de Bernoulli sont mutuellement indépendants
Le théorème 2 n'est pas nécessaire.

Linéarité des attentes

Le théorème 3 nous dit que les valeurs attendues sont linéaires. Par exemple, la valeur attendue de la somme des variables aléatoires est la somme de leurs valeurs attendues.Nous trouverons cette propriété excessivement utile.

THÉORÈME 3 Si X_i , $i = 1, 2, \ldots, n$ avec n un entier positif, sont des variables aléatoires sur S , et si a et b sont des nombres réels,

(i) $E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$

(ii) $E(aX + b) = aE(X) + b$.

Preuve: la partie *(i)* suit pour $n = 2$ directement à partir de la définition de la valeur attendue, car

$$\begin{aligned} E(X_1 + X_2) &= \sum_{s \in S} p(s)(X_1(s) + X_2(s)) \\ &= \sum_{s \in S} p(s) X_1(s) + \sum_{s \in S} p(s) X_2(s) \\ &= E(X_1) + E(X_2). \end{aligned}$$

Le cas pour n variables aléatoires suit facilement par induction mathématique en utilisant le cas de deux Variables aléatoires. (Nous laissons au lecteur le soin de compléter la preuve.)

Pour prouver la partie *(ii)* , notez que

$$\begin{aligned} E(aX + b) &= \sum_{s \in S} p(s)(aX(s) + b) \\ &= a \sum_{s \in S} p(s) X(s) + b \sum_{s \in S} p(s) \\ &= aE(X) + b \text{ car } \sum_{s \in S} p(s) = 1 . \end{aligned}$$

Les exemples 4 et 5 illustrent comment utiliser le théorème 3.

EXEMPLE 4 Utilisez le théorème 3 pour trouver la valeur attendue de la somme des nombres qui apparaissent quand une paire de les dés équitables sont lancés. (Cela a été fait dans l'exemple 3 sans l'avantage de ce théorème.)

Solution: Soit X_1 et X_2 les variables aléatoires avec $X_1((i, j)) = i$ et $X_2((i, j)) = j$, donc que X_1 est le nombre apparaissant sur le premier dé et X_2 est le nombre apparaissant sur le second dé. Il est facile de voir que $E(X_1) = E(X_2) = 7/2$ parce que tous deux égaux $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)/6 =$ Vingt-et-un $/ 6 = 7/2$. La somme des deux nombres qui apparaissent lorsque les deux dés sont lancés est la somme $X_1 + X_2$. D'après le théorème 3, la valeur attendue de la somme est $E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) =$ $7/2 + 7/2 = 7$. ▲

EXEMPLE 5 Dans la démonstration du théorème 2, nous avons trouvé la valeur attendue du nombre de succès lorsque n des essais de Bernoulli indépendants sont effectués, où p est la probabilité de réussite de chaque essai par calcul direct. Montrer comment le théorème 3 peut être utilisé pour dériver ce résultat là où le Bernoulli les essais ne sont pas nécessairement indépendants.

Solution: Soit X_i la variable aléatoire avec $X_i((t_1, t_2, ..., t_n)) = 1$ si t_i est un succès et $X_i((t_1, t_2, ..., t_n)) = 0$ si t_i est un échec. La valeur attendue de X_i est $E(X_i) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p$ pour $i = 1, 2, ..., n$. Soit $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, pour que X compte le nombre de succès lors de la réalisation de ces n essais de Bernoulli. Théorème 3, appliqué au la somme de n variables aléatoires, montre que $E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) = np$. ▲

Nous pouvons profiter de la linéarité des attentes pour trouver les solutions de nombreuses personnes apparemment problèmes difficiles. L'étape clé consiste à exprimer une variable aléatoire dont nous souhaitons espérer trouver comme la somme de variables aléatoires dont les attentes sont faciles à trouver. Exemples 6 et 7 illustrent cette technique.

EXEMPLE 6 **Valeur attendue du problème du hayon** Un nouvel employé vérifie les chapeaux de n personnes à un restaurant, oubliant de mettre des numéros de chèque de réclamation sur les chapeaux. Lorsque les clients reviennent pour leur chapeaux, le vérificateur leur rend des chapeaux choisis au hasard parmi les chapeaux restants. Quel est le nombre attendu de chapeaux retournés correctement?

Solution: Soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de personnes qui reçoivent la bonne chapeau du vérificateur. Soit X_i la variable aléatoire avec $X_i = 1$ si la i ème personne reçoit le chapeau correct et $X_i = 0$ sinon. Il s'ensuit que

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

Puisqu'il est également probable que le vérificateur retourne l'un des chapeaux à cette personne, il s'ensuit que la probabilité que la i ème personne reçoive le chapeau correct est de $1/n$. Par conséquent, par le théorème 1, pour tout i nous avons

$$E(X_i) = 1 \cdot p(X_i = 1) + 0 \cdot p(X_i = 0) = 1 \cdot 1/n + 0 = 1/n.$$

Par la linéarité des attentes (Théorème 3), il s'ensuit que

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) = n \cdot 1/n = 1.$$

Par conséquent, le nombre moyen de personnes qui reçoivent le bon chapeau est exactement de 1. Remarque que cette réponse est indépendante du nombre de personnes qui ont vérifié leurs chapeaux! (Nous trouverons une formule explicite pour la probabilité que personne ne reçoive le chapeau correct dans Exemple 4 de la section 8.6.) ▲

EXEMPLE 7 **Nombre attendu d'inversions dans une permutation** La paire ordonnée (i, j) est appelée un **inversion** dans une permutation des n premiers entiers positifs si $i < j$ mais j précède i dans le permutation. Par exemple, il y a six inversions dans la permutation 3, 5, 1, 4, 2; celles-ci les inversions sont

$$(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 5).$$

Soit $I_{i,j}$ la variable aléatoire sur l'ensemble de toutes les permutations des n premiers entiers positifs avec $I_{i,j} = 1$ si (i, j) est une inversion de la permutation et $I_{i,j} = 0$ sinon. Il s'ensuit que si X est la variable aléatoire égale au nombre d'inversions dans la permutation, alors

$$X = \sum_{1 \leq i < j \leq n} Je_{i,j}.$$

Notez qu'il est tout aussi probable que i précède j dans une permutation choisie au hasard que pour j à précéder i. (Pour voir ceci, notez qu'il y a un nombre égal de permutations avec chacun de ces propriétés.) Par conséquent, pour toutes les paires i et j, nous avons

$$E(I_{i,j}) = 1 \cdot p(I_{i,j} = 1) + 0 \cdot p(I_{i,j} = 0) = 1 \cdot 1/2 + 0 = 1/2.$$

Parce qu'il y a $\binom{n}{2}$ paires i et j avec $1 \leq i < j \leq n$ et par la linéarité des attentes (Théorème 3), nous avons

$$E(X) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} E(I_{i,j}) = \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{n(n-1)}{4}.$$

Il s'ensuit qu'il y a en moyenne $n(n-1)/4$ inversions dans une permutation des n premiers entiers positifs. ▲

Complexité informatique moyenne

Le calcul de la complexité de calcul d'un cas moyen d'un algorithme peut être interprété comme calculer la valeur attendue d'une variable aléatoire. Laissez l'espace échantillon d'une expérience être l'ensemble des entrées possibles a_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, et soit X la variable aléatoire qui affecte à a_j le nombre d'opérations utilisées par l'algorithme lorsqu'il reçoit un_j en entrée. Basé sur notre connaissance de l'entrée, on attribue une probabilité $p(a_j)$ à chaque valeur d'entrée possible a_j. Alors, la complexité moyenne de l'algorithme est

$$E(X) = \sum_{j=1}^{n} p(a_j)X(a_j).$$

Ceci est la valeur attendue de X.

Trouver la complexité de calcul d'un cas moyen d'un algorithme est généralement beaucoup plus difficile que de trouver sa pire complexité de calcul, et implique souvent l'utilisation de méthodes sophistiquées. Cependant, il existe certains algorithmes pour lesquels l'analyse requise trouver la complexité de calcul du cas moyen n'est pas difficile. Par exemple, dans l'exemple 8 nous allons illustrer comment trouver la complexité de calcul de cas moyen de la recherche linéaire algorithme sous différentes hypothèses concernant la probabilité que l'élément pour lequel nous la recherche est un élément de la liste.

EXEMPLE 8 Complexité moyenne des cas de l'algorithme de recherche linéaire On nous donne un nombre réel x et une liste de n nombres réels distincts. L'algorithme de recherche linéaire, décrit dans la section 3.1, localise x en le comparant successivement à chaque élément de la liste, se terminant lorsque x est localisé ou lorsque tous les éléments ont été examinés et qu'il a été déterminé que x n'est pas dans le liste. Quelle est la complexité de calcul dans le cas moyen de l'algorithme de recherche linéaire si le probabilité que x soit dans la liste est p et il est également probable que x soit l'un des n éléments du liste? (Il existe $n + 1$ types d'entrée possibles: un type pour chacun des n nombres de la liste et un dernier type pour les nombres ne figurant pas dans la liste, que nous traitons comme une seule entrée.)

Solution: dans l'exemple 4 de la section 3.3, nous avons montré que 2 comparaisons $i + 1$ sont utilisées si x est égal à le i ème élément de la liste et, dans l'exemple 2 de la section 3.3, nous avons montré que $2n + 2$ comparaisons sont utilisés si x n'est pas dans la liste. La probabilité que x soit égal a_i, le i ème élément de la liste, est p / n, et la probabilité que x ne soit pas dans la liste est $q = 1 - p$. Il s'ensuit que le cas moyen la complexité de calcul de l'algorithme de recherche linéaire est

$$\begin{aligned}
E &= \frac{3p}{n} + \frac{5p}{n} + \cdots + \frac{(2n+1)p}{n} + (2n+2)q \\
&= \frac{p}{n}(3 + 5 + \cdots + (2n+1)) + (2n+2)q \\
&= \frac{p}{n}((n+1)^2 - 1) + (2n+2)q \\
&= p(n+2) + (2n+2)q.
\end{aligned}$$

(La troisième égalité découle de l'exemple 2 de la section 5.1.) Par exemple, lorsque x est garanti pour être dans la liste, on a $p = 1$ (donc la probabilité que $x = a_i$ soit $1 / n$ pour chaque i) et $q = 0$. Alors $E = n + 2$, comme nous l'avons montré dans l'exemple 4 de la section 3.3.

Lorsque p, la probabilité que x est dans la liste, est de $1 / 2$, il en résulte que $q = 1 - p = 1 / 2$, donc $E = (n + 2) / 2 + n + 1 = (3n + 4) / 2$. De même, si la probabilité que x soit dans la liste est $3 / 4$, on a $p = 3 / 4$ et $q = 1 / 4$, alors $E = 3(n + 2) / 4 + (n + 1) / 2 = (5n + 8) / 4$.

Enfin, lorsque x est garanti de ne pas figurer dans la liste, nous avons $p = 0$ et $q = 1$. Il s'ensuit que $E = 2n + 2$, ce qui n'est pas surprenant car il faut chercher dans toute la liste. ▲

L'exemple 9 illustre comment la linéarité des attentes peut nous aider à trouver le cas moyen complexité d'un algorithme de tri, le tri par insertion.

EXEMPLE 9 Complexité moyenne des cas du tri par insertion Quel est le nombre moyen de comparaisons utilisé par le tri par insertion pour trier n éléments distincts?

Solution: Nous supposons d'abord que X est la variable aléatoire égale au nombre de comparaisons utilisées par le tri par insertion (décrit dans la section 3.1) pour trier une liste $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de n éléments distincts. Alors $E(X)$ est le nombre moyen de comparaisons utilisées. (Rappelons qu'à l'étape i pour $i = 2, \ldots, n$, le tri par insertion insère le i ème élément de la liste d'origine dans la position correcte dans le tri liste des i -1 premiers éléments de la liste d'origine.)

On laisse X_i la variable aléatoire égale au nombre de comparaisons utilisées pour insérer un $_i$ dans la position correcte après que les premiers i - 1 éléments $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}$ ont été triés. Car

$$X = X_2 + X_3 + \cdots + X_n,$$

nous pouvons utiliser la linéarité des attentes pour conclure que

$$E(X) = E(X_2 + X_3 + \cdots + X_n) = E(X_2) + E(X_3) + \cdots + E(X_n).$$

Pour trouver $E(X_i)$ pour $i = 2, 3, \ldots, n$, soit $p_j(k)$ la probabilité que le plus grand des les premiers j éléments de la liste se trouvent à la k ème position, c'est-à-dire que max $(a_1, a_2, \ldots, a_j) = a_k$, où $1 \leq k \leq j$. Étant donné que les éléments de la liste sont distribués au hasard, il est tout aussi probable pour que le plus grand élément parmi les premiers j éléments se produise à n'importe quelle position. Par conséquent, $p_j(k) = 1/j$. Si $X_i(k)$ est égal au nombre de comparaisons utilisées par le tri par insertion si a_i est inséré en k ème position dans la liste une fois *que* $_1, a_2, \ldots, a_{i-1}$ ont été triés, il s'ensuit que $X_i(k) = k$. Parce qu'il est possible que *un* $_i$ est inséré dans l'une des premières i positions, nous Trouve ça

$$E(X_i) = \sum_{k=1}^{je} p_i(k) \cdot X_i(k) = \sum_{k=1}^{je} \frac{1}{je} \cdot K = \frac{1}{je} \cdot \sum_{k=1}^{je} k = \frac{1}{je} \cdot \frac{i(i+1)}{2} = \frac{i+1}{2}.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=2}^{n} E(X_i) = \sum_{i=2}^{n} \frac{i+1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=3}^{n+1} j \\ &= \frac{1}{2} \frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{1}{2}(1+2) = \frac{n^2+3n-4}{4}. \end{aligned}$$

Pour obtenir le tiers de ces égalités, nous avons décalé l'indice de sommation en fixant $j = i + 1$. Pour obtenir la quatrième égalité, nous avons utilisé la formule $\sum_{k=1}^{m} k = m(m+1)/2$ (d'après le tableau 2 de Section 2.4) avec $m = n + 1$, soustrayant les termes manquants avec $j = 1$ et $j = 2$. Nous conclure que le nombre moyen de comparaisons utilisées par le tri par insertion pour trier n éléments est égal à $(n^2 + 3n - 4)/4$, qui est (n^2). ▲

La distribution géométrique

Nous tournons maintenant notre attention vers une variable aléatoire avec une infinité de résultats possibles.

EXEMPLE 10 Supposons que la probabilité qu'une pièce remonte en queue est p. Cette pièce est retournée à plusieurs reprises jusqu'à ce que ça monte la queue. Quel est le nombre de flips escompté jusqu'à ce que cette pièce monte en queue?

Solution: nous notons d'abord que l'espace d'échantillonnage se compose de toutes les séquences qui commencent par nombre de têtes, notée H, suivi d'une queue, notée T. Par conséquent, le ple espace est l'ensemble $\{T, HT, HHT, HHHT, HHHHT, \ldots\}$. Notez qu'il s'agit d'un échantillon infini espace. On peut déterminer la probabilité d'un élément de l'espace échantillon en notant que les lancers de pièces sont indépendants et que la probabilité d'une tête est de $1 - p$. Par conséquent, $p(T) = p$, $p(HT) = (1-p)p$, $p(HHT) = (1-p)^2 p$, et en général la probabilité que la pièce soit retournée n fois avant qu'une queue ne remonte, c'est-à-dire que n - 1 têtes remontent suivies d'une queue, soit $(1-p)^{n-1} p$.

(L'exercice 14 demande de vérifier que la somme des probabilités des points de l'échantillon l'espace est 1.)

Soit maintenant X la variable aléatoire égale au nombre de flips dans un élément du espace d'échantillon. Autrement dit, $X(T) = 1$, $X(HT) = 2$, $X(HHT) = 3$, etc. Notez que $p(X = j) = (1 - p)^{j-1} p$. Le nombre attendu de flips jusqu'à ce que la pièce remonte à la queue est égal à $E(X)$.

En utilisant le théorème 1, nous constatons que

$$E(X) = \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot p(X = j) = \sum_{j=1}^{\infty} j(1-p)^{j-1} p = p \sum_{j=1}^{\infty} j(1-p)^{j-1} = p \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

[La troisième égalité dans cette chaîne découle du tableau 2 de la section 2.4, qui nous indique cette $\sum_{j=1}^{\infty} j(1-p)^{j-1} = 1/(1-(1-p))^2 = 1/p^2$.] Il s'ensuit que le nombre attendu nombre de fois où la pièce est retournée jusqu'à ce que la queue se lève soit $1/p$. Notez que lorsque le pièce est juste, nous avons $p = 1/2$, de sorte que le nombre attendu de flips jusqu'à ce qu'il arrive queue est égal à $1/(1/2) = 2$. ▲

La variable aléatoire X qui est égale au nombre de flips attendus avant qu'une pièce ne se lève queues est un exemple de variable aléatoire avec une **distribution géométrique**.

DÉFINITION 2 Une variable aléatoire X a une *distribution géométrique avec le paramètre p* si $p(X = k) = (1 - p)^{k-1} p$ pour $k = 1, 2, 3, \ldots$, où p est un nombre réel avec $0 \leq p \leq 1$.

Les distributions géométriques se produisent dans de nombreuses applications car elles sont utilisées pour étudier le temps requis avant qu'un événement particulier ne se produise, comme le temps requis avant de trouver un objet avec une certaine propriété, le nombre de tentatives avant qu'une expérience réussisse, le nombre de fois un produit peut être utilisé avant qu'il ne tombe en panne, et ainsi de suite.

Lorsque nous avons calculé la valeur attendue du nombre de flips nécessaires avant qu'une pièce ne vienne jusqu'à la queue, nous avons prouvé le théorème 4.

THÉORÈME 4 Si la variable aléatoire X a la distribution géométrique avec le paramètre p, alors $E(X) = 1/p$.

Variables aléatoires indépendantes

Nous avons déjà discuté d'événements indépendants. Nous allons maintenant définir ce que cela signifie pour deux variables à être indépendantes.

DÉFINITION 3 Les variables aléatoires X et Y sur un espace échantillon S sont *indépendantes* si

$$p(X = r_1 \text{ et } Y = r_2) = p(X = r_1) \cdot p(Y = r_2),$$

ou en mots, si la probabilité que $X = r_1$ et $Y = r_2$ soit égale au produit des probabilités que $X = r_1$ et $Y = r_2$, pour tous les nombres réels r_1 et r_2.

EXEMPLE 11 Les variables aléatoires X_1 et X_2 de l'exemple 4 sont-elles indépendantes?

Solution: Soit $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, et que $i \in S$ et $j \in S$. Parce qu'il y en a 36 possibles résultats lorsque la paire de dés est lancée et que chacun est également probable, nous avons

$$p(X_1 = i \text{ et } X_2 = j) = 1/36.$$

En outre, $p(X_1 = i) = 1/6$ et $p(X_2 = j) = 1/6$, parce que la probabilité que i apparaît sur le premier dé et la probabilité que j apparaisse sur le deuxième dé sont tous deux $1/6$. Il s'ensuit que

$$p(X_1 = i \text{ et } X_2 = j) = \frac{1}{36} \quad \text{et } p(X_1 = i)\, p(X_2 = j) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36},$$

donc X_1 et X_2 sont indépendants. ▲

EXEMPLE 12 Montrer que les variables aléatoires X_1 et $X = X_1 + X_2$, où X_1 et X_2 sont telles que définies dans Exemple 4, ne sont pas indépendants.

Solution: Notez que $p(X_1 = 1 \text{ et } X = 12) = 0$, car $X_1 = 1$ signifie que le nombre apparaît - sur le premier dé est 1, ce qui implique que la somme des nombres apparaissant sur les deux dés ne peuvent pas êtreégale à 12. D'autre part, $p(X_1 = 1) = 1/6$ et $p(X = 12) = 1/36$. Ainsi $p(X_1 = 1 \text{ et } X = 12) = p(X_1 = 1) \cdot p(X = 12)$. Ce contre-exemple montre que X_1 et X ne sont pas indépendants. ▲

La valeur attendue du produit de deux variables aléatoires indépendantes est le produit de leurs valeurs attendues, comme le montre le théorème 5.

THÉORÈME 5 Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes sur un espace échantillon S, alors $E(XY) = E(X)\,E(Y)$.

Preuve: Pour prouver cette formule, nous utilisons l'observation clé que l'événement $XY = r$ est le disjoint union des événements $X = r_1$ et $Y = r_2$ sur tous $r_1 \in X(S)$ et $r_2 \in Y(S)$ avec $r = r_1 r_2$. nous avoir

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_{r \in XY(S)} r \cdot p(XY = r) && \text{par Theorem 1} \\
&= \sum_{r_1 \in X(S),\, r_2 \in Y(S)} r_1 r_2 \cdot p(X = r_1 \text{ et } Y = r_2) && \text{exprimant } XY = r \text{ comme une union disjointe} \\
&= \sum_{r_1 \in X(S)} \sum_{r_2 \in Y(S)} r_1 r_2 \cdot p(X = r_1 \text{ et } Y = r_2) && \text{en utilisant une double somme pour commander les termes} \\
&= \sum_{r_1 \in X(S)} \sum_{r_2 \in Y(S)} r_1 r_2 \cdot p(X = r_1) \cdot p(Y = r_2) && \text{par l'indépendance de } X \text{ et } Y \\
&= \sum_{r_1 \in X(S)} \Big(r_1 \cdot p(X = r_1) \cdot \sum_{r_2 \in Y(S)} r_2 \cdot p(Y = r_2) \Big) && \text{en factorisant } r_1 \cdot p(X = r_1) \\
&= \sum_{r_1 \in X(S)} r_1 \cdot p(X = r_1) \cdot E(Y) && \text{par la définition de } E(Y) \\
&= E(Y) \Big(\sum_{r_1 \in X(S)} r_1 \cdot p(X = r_1) \Big) && \text{en factorisant } E(Y) \\
&= E(Y)\,E(X) && \text{par la définition de } E(X)
\end{aligned}$$

Nous complétons la preuve en notant que $E(Y)\,E(X) = E(X)\,E(Y)$, qui est une conséquence de la loi commutative pour la multiplication.

Notez que lorsque X et Y sont des variables aléatoires qui ne sont pas indépendantes, nous ne pouvons pas conclure que $E(XY) = E(X)\,E(Y)$, comme le montre l'exemple 13.

EXEMPLE 13 Soit X et Y des variables aléatoires qui comptent le nombre de têtes et le nombre de queues lorsque une pièce est retournée deux fois. Parce que $p(X = 2) = 1/4$, $p(X = 1) = 1/2$, et $p(X = 0) = 1/4$, par Théorème 1 que nous avons

$$E(X) = 2 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{4} = 1.$$

Un calcul similaire montre que $E(Y) = 1$. Nous notons que $XY = 0$ lorsque deux têtes et aucune queue ou deux queues et aucune tête ne montent et que $XY = 1$ quand une tête et une queue viennent vers le haut. Par conséquent,

$$E(XY) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Il s'ensuit que

$$E(XY) = E(X)\,E(Y).$$

Cela ne contredit pas le théorème 5 car X et Y ne sont pas indépendants, comme le lecteur devrait vérifier (voir l'exercice 16). ▲

Variance

La valeur attendue d'une variable aléatoire nous indique sa valeur moyenne, mais rien sur la façon dont largement ses valeurs sont distribuées. Par exemple, si X et Y sont les variables aléatoires de l'ensemble $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, avec $X(s) = 0$ pour tout $s \in S$ et $Y(s) = -1$ si $s \in \{1, 2, 3\}$ et $Y(s) = 1$ si $s \in \{4, 5, 6\}$, alors les valeurs attendues de X et Y sont toutes les deux nulles. Cependant, le hasard la variable X ne varie jamais de 0, tandis que la variable aléatoire Y diffère toujours de 0 par 1. La la variance d'une variable aléatoire nous aide à caractériser l'étendue de la distribution d'une variable aléatoire. En particulier, il fournit une mesure de l'étendue de la distribution de X sur sa valeur attendue.

DÉFINITION 4 Laissez - X une variable aléatoire sur un espace échantillon S. La *variance* de X, notée $V(X)$, est

$$V(X) = \sum_{s \in S} (X(s) - E(X))^2 p(s).$$

Autrement dit, $V(X)$ est la moyenne pondérée du carré de l'écart de X. La *norme la déviation* de X, notée $\sigma(X)$, est définie comme étant $\sqrt{V(X)}$.

Le théorème 6 fournit une expression simple utile pour la variance d'une variable aléatoire.

THÉORÈME 6 Si X est une variable aléatoire sur un espace échantillon S, alors $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

Preuve: notez que

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{s \in S} (X(s) - E(X))^2 p(s) \\ &= \sum_{s \in S} X(s)^2 p(s) - 2E(X) \sum_{s \in S} X(s)p(s) + E(X)^2 \sum_{s \in S} p(s) \\ &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 \\ &= E(X^2) - E(X)^2. \end{aligned}$$

Nous avons utilisé le fait que $\sum_{s \in S} p(s) = 1$ dans l'avant-dernière étape.

Nous pouvons utiliser les théorèmes 3 et 6 pour dériver une formule alternative pour $V(X)$ qui fournit un aperçu de la signification de la variance d'une variable aléatoire.

COROLLARY 1 Si X est une variable aléatoire sur un espace d'échantillon S et $E(X) = \mu$, alors $V(X) = E((X - \mu)^2)$.

μ est la lettre grecque mu.

Preuve: si X est une variable aléatoire avec $E(X) = \mu$, alors

$$\begin{aligned}
E((X-\mu)^2) &= E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) && \text{en expansion } (X-\mu)^2 \\
&= E(X^2) - E(2\mu X) + E(\mu^2) && \text{par la partie (i) du théorème 3} \\
&= E(X^2) - 2\mu E(X) + E(\mu^2) && \text{par la partie (ii) du théorème 3, notant que } \mu \text{ est une constante} \\
&= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 && \text{comme } E(\mu^2) = \mu^2 \text{, car } \mu^2 \text{ est une constante} \\
&= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 && \text{car } E(X) = \mu \\
&= E(X^2) - \mu^2 && \text{simplifier} \\
&= V(X) && \text{par le théorème 6 et notant que } E(X) = \mu .
\end{aligned}$$

Ceci complète la preuve.

Le corollaire 1 nous dit que la variance d'une variable aléatoire X est la valeur attendue de la carré de la différence entre X et sa propre valeur attendue. Ceci est couramment exprimé comme disant que la variance de X est la moyenne du carré de son écart. Nous disons également que l'écart-type de X est la racine carrée de la moyenne du carré de son écart (souvent lu comme le «carré moyen de la racine» de la déviation).

Nous calculons maintenant la variance de certaines variables aléatoires.

EXEMPLE 14 Quelle est la variance de la variable aléatoire X avec $X(t) = 1$ si un essai de Bernoulli est un succès et $X(t) = 0$ s'il s'agit d'un échec, où p est la probabilité de réussite et q est la probabilité de échec?

Solution: Parce que X ne prend que les valeurs 0 et 1, il s'ensuit que $X^2(t) = X(t)$. Par conséquent,

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1 - p) = pq. \quad \blacktriangle$$

EXEMPLE 15 **Variance de la valeur d'une matrice** Quelle est la variance de la variable aléatoire X , où X est le nombre qui apparaît quand un dé équitable est lancé?

Solution: Nous avons $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$. Par l'exemple 1, nous savons que $E(X) = 7/2$. Pour trouver $E(X^2)$ notons que X^2 prend les valeurs i^2 , $i = 1, 2, ..., 6$, chacune avec une probabilité $1/6$. Il s'ensuit cette

$$E(X^2) = \frac{1}{6}(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) = \frac{91}{6}.$$

Nous concluons que

$$V(X) = \frac{91}{6} - \left(\frac{\text{sept}}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}.$$

▲

EXEMPLE 16 Quelle est la variance de la variable aléatoire $X((i, j)) = 2i$, où i est le nombre apparaissant sur le premier dé et j est le nombre apparaissant sur le deuxième dé, lorsque deux dés sont lancés?

Solution: Nous utiliserons le théorème 6 pour trouver la variance de X. Pour ce faire, nous devons trouver valeurs attendues de X et X^2. Notez que parce que $p(X = k)$ est égal à $1/6$ pour $k = 2, 4, 6, 8, 10, 12$ et vaut 0 sinon,

$$E(X) = (2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12)/6 = 7,$$

et

$$E(X^2) = (2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2 + 12^2)/6 = 182/3.$$

Il résulte du Théorème 6 que

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 182/\text{trois} - 49 = 35/\text{trois}.$$

▲

Une autre propriété utile est que la variance de la somme de deux ou plusieurs aléatoires indépendants variables est la somme de leurs variances.La formule qui exprime cette propriété est connue sous le nom de **La formule de Bienaymé** , d'après Irenée-Jules Bienaymé, le mathématicien français qui l'a découverte en 1853. La formule de Bienaymé est utile pour calculer la variance du résultat de n indépendants Les procès de Bernoulli, par exemple.

THÉORÈME 7 **FORMULE DE BIENAYMÉ** Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes sur un espace échantillon S, puis $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$. De plus, si X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, avec n un entier positif, sont des variables aléatoires indépendantes par paire sur S, puis $V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)$.

IRENÉE-JULES BIENAYMÉ (1796–1878) Bienaymé, né à Paris, s'installe avec sa famille à Bruges en 1803 lorsque son père devient administrateur du gouvernement. Bienaymé a fréquenté le Lycée impérial de Bruges, et lorsque sa famille revient à Paris en 1811, le Lycée Louis-le-Grand. Adolescent, il a aidé à défendre Paris pendant les guerres napoléoniennes de 1814; en 1815, il devient élève de l'École polytechnique. En 1816, il rejoint le ministère des Finances pour aider à subvenir aux besoins de sa famille. En 1819, il a quitté la fonction publique, prenant un emploi de conférencier mathématiques à l'Académie militaire de Saint-Cyr. Mécontent des conditions qui régnaient là-bas, il retourna bientôt au Ministère des finances. Il a atteint le poste d'inspecteur général, restant jusqu'à ce qu'il soit forcé de prendre sa retraite en 1848 pour des raisons politiques. Il a pu revenir comme inspecteur général en 1850, mais il a pris sa retraite une deuxième fois en 1852. En 1851, il fut brièvement professeur à la Sorbonne et servit également de statisticien expert pour Napoléon III. Bienaymé fut l'un des fondateurs de la Société Mathématique de France, et en 1875 en fut le président.

Bienaymé était connu pour son ingéniosité, mais ses articles ont frustré les lecteurs en omettant des preuves importantes. Il a publié peu, souvent dans des revues obscures. Cependant, il a apporté une contribution importante à la probabilité et aux statistiques, et à leurs applications au les sciences sociales et la finance. Parmi ses contributions importantes figurent l'inégalité Bienaymé-Chebyshev, qui fournit une simple la preuve de la loi des grands nombres, une généralisation de la méthode des moindres carrés de Laplace, et la formule de Bienaymé pour la variance d'un somme des variables aléatoires. Il a étudié l'extinction des familles aristocratiques, en déclin malgré la croissance démographique générale. Bienaymé était un linguiste qualifié; il a traduit les œuvres de Chebyshev, un ami proche, du russe vers le français. Il a été suggéré que son une relative obscurité résulte de sa modestie, de son manque d'intérêt à affirmer la priorité de ses découvertes et du fait que son travail était souvent en avance sur son temps. Lui et son frère ont épousé deux sœurs qui étaient les filles d'un ami de la famille. Bienaymé et sa femme avait deux fils et trois filles.

Preuve: d' après le théorème 6, nous avons

$$V(X+Y) = E((X+Y)^2) - E(X+Y)^2.$$

Il s'ensuit que

$$V(X+Y) = E(X^2 + 2XY + Y^2) - (E(X) + E(Y))^2$$
$$= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - E(X)^2 - 2E(X)E(Y) - E(Y)^2.$$

Parce que X et Y sont indépendants, selon le théorème 5, nous avons $E(XY) = E(X)E(Y)$. Il s'ensuit que

$$V(X+Y) = (E(X^2) - E(X)^2) + (E(Y^2) - E(Y)^2)$$
$$= V(X) + V(Y).$$

Nous laissons au lecteur la preuve du cas pour n variables aléatoires indépendantes par paire (Exercice 34). Une telle preuve peut être construite en généralisant la preuve que nous avons donnée pour la cas pour deux variables aléatoires. Notez qu'il n'est pas possible d'utiliser l'induction mathématique dans un façon simple de prouver le cas général (voir exercice 33).

EXEMPLE 17 Trouver la variance et l'écart-type de la variable aléatoire X dont la valeur lorsque deux justes les dés sont lancés est $X((i, j)) = i + j$, où i est le nombre apparaissant sur le premier dé et j est le nombre apparaissant sur le deuxième dé.

Solution: Soit X_1 et X_2 les variables aléatoires définies par $X_1((i, j)) = i$ et $X_2((i, j)) = j$ pour un lancer de dés. Alors $X = X_1 + X_2$, et X_1 et X_2 sont indépendants, comme L'exemple 11 a montré. Du Théorème 7, il s'ensuit que $V(X) = V(X_1) + V(X_2)$. Un sim- comme dans l'exemple 16, avec l'exercice 29 du supplément Exercices, nous apprend que $V(X_1) = V(X_2) = 35/12$. Par conséquent, $V(X) = 35/12 + 35/12 = 35/$ six et $\sigma(X) = \sqrt{35/6}$. ▲

Nous allons maintenant trouver la variance de la variable aléatoire qui compte le nombre de succès lorsque n essais Bernoulli indépendants sont effectués.

EXEMPLE 18 Quelle est la variance du nombre de succès lorsque n essais Bernoulli indépendants sont menés formé, où, à chaque essai, p est la probabilité de réussite et q est la probabilité d'échec?

Solution: Soit X_i la variable aléatoire avec $X_i((t_1, t_2, ..., t_n)) = 1$ si l'essai t_i est un succès et $X_i((t_1, t_2, ..., t_n)) = 0$ si l'essai t_i est un échec. Soit $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Puis X compte le nombre de succès dans les n essais. Du théorème 7, il s'ensuit que $V(X) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)$. En utilisant l'exemple 14, nous avons $V(X_i) = pq$ pour $i = 1, 2, ..., n$. Il s'ensuit que $V(X) = npq$. ▲

PAFNUTY LVOVICH CHEBYSHEV (1821–1894) Chebyshev est né dans la noblesse d'Okatovo, en Russie. Son père était un officier de l'armée à la retraite qui avait combattu contre Napoléon. En 1832, la famille, avec ses neuf enfants, a déménagé à Moscou, où Pafnuty a terminé ses études secondaires à la maison. Il est entré au Département de Physique et mathématiques à l'Université de Moscou. En tant qu'étudiant, il a développé une nouvelle méthode pour les racines des équations. Il est diplômé de l'Université de Moscou en 1841 avec un diplôme en mathématiques, et il poursuit ses études, réussit son examen de maîtrise en 1843 et termine sa thèse de maîtrise en 1846.

Chebyshev a été nommé en 1847 à un poste d'assistant à l'Université de Saint-Pétersbourg. Il a écrit et a soutenu une thèse en 1847. Il est devenu professeur à Saint-Pétersbourg en 1860, poste qu'il a occupé jusqu'en 1882. Son livre sur la théorie des congruences écrit en 1849 a été influent dans le développement de la théorie des nombres. Le sien le travail sur la distribution des nombres premiers était fondamental. Il a prouvé la conjecture de Bertrand que pour chaque entier $n > 3$, il y a premier entre n et $2n - 2$. Chebyshev a aidé à développer des idées qui ont ensuite été utilisées pour prouver le théorème des nombres premiers. Chebyshev's les travaux sur l'approximation des fonctions à l'aide de polynômes sont largement utilisés lorsque les ordinateurs sont utilisés pour trouver des valeurs de fonctions. Chebyshev s'intéressait également à la mécanique. Il a étudié la conversion du mouvement rotatif en mouvement rectiligne par mécanique couplage. Le mouvement parallèle de Chebyshev est composé de trois barres liées qui rapproche le mouvement rectiligne.

L'inégalité de Tchebychev

Quelle est la probabilité qu'une variable aléatoire prenne une valeur loin de sa valeur attendue? Théorème 8, appelée inégalité de Chebyshev, aide à répondre à cette question en fournissant une limite supérieure sur la probabilité que la valeur d'une variable aléatoire diffère de la valeur attendue de la variable aléatoire variable de plus d'un montant spécifié.

THÉORÈME 8 **INÉGALITÉ DE CHEBYSHEV** Soit X une variable aléatoire sur un espace échantillon S avec fonction de probabilité p . Si r est un nombre réel positif, alors

$$p(|X(s) - E(X)| \geq r) \leq V(X)/r^2.$$

Preuve: que A soit l'événement

$$A = \{s \in S \mid X(s) - E(X) \mid \geq r\}.$$

Ce que nous voulons prouver, c'est que $p(A) \leq V(X)/r^2$. Notez que

$$V(X) = \sum_{s \in S} (X(s) - E(X))^2 p(s)$$
$$= \sum_{s \in A} (X(s) - E(X))^2 p(s) + \sum_{s \in A} (X(s) - E(X))^2 p(s).$$

La deuxième somme de cette expression est non négative, car chacun de ses sommets est non négatif. De plus, parce que pour chaque élément s dans A , $(X(s) - E(X))^2 \geq r^2$, la première somme de cette expression est à moins $\sum_{s \in A} r^2 p(s)$. Par conséquent, $V(X) \geq \sum_{s \in A} r^2 p(s) = r^2 p(A)$. Il s'ensuit que $V(X)/r^2 \geq p(A)$, donc $p(A) \leq V(X)/r^2$, complétant la preuve.

EXEMPLE 19 **Écart par rapport à la moyenne lors du comptage des queues** Supposons que X est la variable aléatoire qui compte le nombre de queues lorsqu'une pièce équitable est lancée n fois. Notez que X est le nombre de succès lorsque n essais de Bernoulli indépendants, chacun avec une probabilité de success $1/2$ sont effectuée. Il s'ensuit que $E(X) = n/2$ (par le théorème 2) et $V(X) = n/4$ (par l'exemple 18). Appliquer l'inégalité de Chebyshev avec $r = \sqrt{n}$ montre que

$$p(|X(s) - n/2| \geq \sqrt{n}) \leq (n/4)/(\sqrt{n})^2 = 1/\text{quatre}.$$

Par conséquent, la probabilité est plus de $1/4$ que le nombre de queues qui se présentent lorsqu'un juste pièce est lancée n fois s'écarte de la moyenne de plus de $\sqrt{n}$. ▲

L'inégalité de Tchebychev, bien qu'applicable à toute variable aléatoire, ne parvient souvent pas à fournir une estimation pratique de la probabilité que la valeur d'une variable aléatoire dépasse sa moyenne de une grande quantité. Ceci est illustré par l'exemple 20.

EXEMPLE 20 Soit X la variable aléatoire dont la valeur est le nombre apparaissant quand un dé équitable est lancé. Nous avons $E(X) = 7/2$ (voir exemple 1) et $V(X) = 35/12$ (voir exemple 15). Parce que le seules les valeurs possibles de X sont 1, 2, 3, 4, 5 et 6, X ne peut pas prendre une valeur supérieure à $5/2$ à partir de son dire, $E(X) = 7/2$. Par conséquent, $p(|X - 7/2| \geq r) = 0$ si $r > 5/2$. Par l' inégalité de nous de Tchebychev savoir que $p(|X - 7/2| \geq r) \leq (35/\text{douze})/r^2$.

Par exemple, lorsque $r = 3$, l'inégalité de Chebyshev nous dit que $p(|X - 7/2| \geq 3) \leq (35/12)/9 = 35/108 \approx 0.324$, qui est une mauvaise estimation, parce que $p(|X - 7/\text{deux}| \geq 3) = 0$. ▲

Des exercices

1. Quel est le nombre attendu de têtes qui surgissent lorsque une pièce de monnaie équitable est-elle retournée cinq fois?

2. Quel est le nombre attendu de têtes qui surgissent lorsque une pièce de monnaie équitable est-elle retournée 10 fois?

3. Quel est le nombre attendu de fois qu'un 6 apparaît lorsque un dé équitable est lancé 10 fois?

4. Une pièce est biaisée de sorte que la probabilité qu'une tête se lève quand il est retourné est de 0,6. Quel est le nombre attendu de têtes qui apparaissent quand il est retourné 10 fois?

5. Quelle est la somme attendue des nombres qui apparaissent sur deux dés, chacun biaisé de sorte qu'un 3 revient deux fois plus souvent comme chaque autre numéro?

6. Quelle est la valeur attendue quand un billet de loterie de 1 $ est acheté dans lequel l'acheteur gagne exactement 10 millions de dollars si le billet contient les six numéros gagnants choisis parmi l'ensemble $\{1, 2, 3, ..., 50\}$ et l'acheteur ne gagne rien autrement?

7. L'examen final d'un cours de mathématiques discret con- se compose de 50 vraies / fausses questions, chacune valant deux points, et 25 questions à choix multiples, chacune valant quatre points. La probabilité que Linda réponde à une question vraie / fausse correctement 0,9, et la probabilité qu'elle réponde à un la question à choix multiples est correctement 0,8. Quelle est son ex- score attendu en finale?

8. Quelle est la somme attendue des nombres qui apparaissent lorsque trois dés équitables sont lancés?

9. Supposons que la probabilité que x soit dans une liste de n distincts des nombres entiers est de $2/3$ et qu'il est également probable que x égaux n'importe quel élément de la liste. Trouvez le nombre moyen de parisons utilisés par l'algorithme de recherche linéaire pour trouver x ou pour déterminer qu'il ne figure pas dans la liste.

10. Supposons que nous lançons une bonne pièce jusqu'à ce qu'elle soit levée queues deux fois ou nous l'avons retourné six fois. Quel est le nombre prévu de fois que nous retournons la pièce?

11. Supposons que nous jetons un dé juste jusqu'à ce qu'un 6 arrive ou que nous

17. Estimez le nombre attendu d'entiers avec 1000 chiffres ce qui doit être sélectionné au hasard pour trouver un nombre premier, si la probabilité qu'un nombre de 1000 chiffres soit premier est environ $1/2302$.

18. Supposons que X et Y sont des variables aléatoires et que X et Y sont non négatifs pour tous les points d'un échantillon espace S. Soit Z la variable aléatoire définie par $Z(s) = \max(X(s), Y(s))$ pour tous les éléments *de* $\in S$. Spectacle que $E(Z) \leq E(X) + E(Y)$.

19. Soit X le nombre apparaissant sur le premier dé lorsque deux des dés équitables sont lancés et que Y soit la somme des nombres poire sur les deux dés. Montrez que $E(X)\,E(Y) = E(XY)$.

∗ **20.** Montrer que si $X_1, X_2, ..., X_n$ sont mutuellement indépendants variables aléatoires, puis $E(\prod_{i=1}^{n} X_i) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$.

L' **espérance conditionnelle** de la variable aléatoire X étant donné l'événement A de l'espace échantillon S est $E(X|A) = \sum_{r \in X(S)} r \cdot P(X = r|A)$.

21. Quelle est la valeur attendue de la somme des nombres poire sur deux dés équitables lorsqu'ils sont lancés étant donné que la somme de ces nombres est d'au moins neuf. Autrement dit, ce est $E(X|A)$ où X est la somme des nombres apparaissant sur les deux dés et A est l'événement que $X \geq 9$?

La **loi de l'espérance totale** stipule que si l'échantillon l'espace S est l'union disjointe des événements $S_1, S_2, ..., S_n$ et X est un hasard variable, puis $E(X) = \sum_{j=1}^{n} E(X|S_j)\,P(S_j)$.

22. Prouvez la loi des attentes totales.

23. Utilisez la loi de l'espérance totale pour trouver le poids moyen d'un éléphant de mer reproducteur, étant donné que 12% des éléphants de mer sont des mâles et les autres sont des femelles, et le poids attendu d'un éléphant de mer reproducteur est de 4 200 livres pour un homme et 1 100 livres pour une femme.

24. Soit A un événement. Alors I_A, l' **indicateur aléatoire variable** de A, vaut 1 si A se produit et vaut 0 autre dans le sens contraire. Montrer que l'attente de l'indicateur l'ont roulé 10 fois. Quel est le nombre attendu de fois que nous jetons le dé?

12. Supposons que nous lançons un dé juste jusqu'à ce qu'un 6 apparaisse.

a) Quelle est la probabilité que nous lancions le dé *n* fois?
b) Quel est le nombre de fois que nous lançons le dé?

13. Supposons que nous lançons une paire de dés équitables jusqu'à ce que la somme de le nombre sur les dés est sept. Quelle est l'attente nombre de fois où nous lançons les dés?

14. Montrer que la somme des probabilités d'une variance aléatoire capable avec une distribution géométrique avec le paramètre p, où $0 < p \leq 1$, est égal à 1.

15. Montrer que si la variable aléatoire X a la géométrie distribution avec le paramètre p, et j est un entier positif, alors $p(X \geq j) = (1 - p)^{j-1}$.

16. Soit X et Y les variables aléatoires qui comptent le nombre nombre de têtes et le nombre de queues qui se deux pièces justes sont retournées. Montrez que X et Y ne sont pas indépendant.

La variable dom de A est égale à la probabilité de A, c'est-à-dire $E(I_A) = p(A)$.

25. Une **course** est une séquence maximale de succès dans un suite des procès de Bernoulli. Par exemple, dans la séquence $S, S, S, F, S, S, F, F, S$, où S représente le succès et F représente un échec, il y a trois cycles comprenant trois succès, deux succès et un succès, respectivement activement. Soit R la variable aléatoire sur l'ensemble des séquences de n essais Bernoulli indépendants qui comptent les nombre d'exécutions dans cette séquence. Trouvez $E(R)$. [*Astuce:* Afficher que $R = \sum_{j=1} I_j$, où $I_j = 1$ si une course commence au j ème Essai de Bernoulli et $I_j = 0$ sinon. Trouvez $E(I_1)$ puis trouver $E(I_j)$, où $1 < j \leq n$.]

26. Soit $X(s)$ une variable aléatoire, où $X(s)$ est un non entier atif pour tout $s \in S$, et soit A_k l'événement qui $X(s) \geq k$. Montrer que $E(X) = \sum_{k=1} p(A_k)$.

27. Quelle est la variance du nombre de têtes qui se présentent quand une pièce équitable est retournée 10 fois?

28. Quelle est la variance du nombre de fois qu'un 6 apparaît quand un dé équitable est lancé 10 fois?

29. Soit X_n la variable aléatoire qui est égale au nombre de queues moins le nombre de têtes lorsque n pièces justes sont renversé.

a) Quelle est la valeur attendue de X_n ?
b) Quelle est la variance de X_n ?

30. Montrer que si X et Y sont aléatoires indépendants variables, alors $V(XY) = E(X)^2 V(Y) + E(Y)^2 V(X) + V(X) V(Y)$

31. Soit $A(X) = E(|X - E(X)|)$, la valeur attendue de la valeur absolue de l'écart de X, où X est un Variable aléatoire. Prouver ou infirmer que $A(X + Y) = A(X) + A(Y)$ pour toutes les variables aléatoires X et Y.

32. Donnez un exemple qui montre que la variance de la la somme de deux variables aléatoires n'est pas nécessairement égale à la somme de leurs variances lorsque les variables aléatoires sont pas indépendant.

33. Supposons que X_1 et X_2 sont des Bernoulli indépendants chacun des essais avec la probabilité $1/2$, et à faire $X_3 = (X_1 + X_2)$ **mod** 2.

a) Montrer que X_1, X_2 et X_3 sont indépendants par paire, mais X_3 et $X_1 + X_2$ ne sont pas indépendants.
b) Montrer que $V(X_1 + X_2 + X_3) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3)$.

c) Expliquer pourquoi une preuve par induction mathématique de Le théorème 7 ne fonctionne pas en considérant le hasard variables X_1, X_2 et X_3.

∗ **34.** Prouvez le cas général du théorème 7. Autrement dit, montrez que

si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des raies indépendantes par paire variables dom sur un espace échantillon S, où n est

39. Supposons que le nombre de boîtes de conserve recyclées en une journée à un centre de recyclage est une variable aléatoire avec un valeur de 50 000 et un écart de 10 000.

a) Utilisez l'inégalité de Markov (exercice 37) pour trouver une par borne sur la probabilité que le centre recycle récolter plus de 55 000 canettes un jour donné.

b) Utiliser l'inégalité de Chebyshev pour fournir une borne inférieure sur la probabilité que le centre recycle 40 000 à 60 000 canettes un certain jour.

∗ **40.** Supposons la probabilité que x soit le i ème élément d'une liste

de n entiers distincts est $i / [n(n+1)]$. Trouver la moyenne nombre de comparaisons utilisées par l'algorithme de recherche rithm pour trouver x ou pour déterminer qu'il ne figure pas dans la liste.

∗ **41.** Dans cet exercice, nous dérivons une estimation du cas moyen

complexité de la variante de l'algorithme de tri à bulles qui se termine une fois le passage effectué sans interférence changements. Soit X la variable aléatoire sur l'ensemble des permutations d'un ensemble de n entiers distincts $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ avec $un_1 < a_2 < \cdots < a_n$ tel que $X(P)$ est égal au nombre nombre de comparaisons utilisées par le type de bulle pour mettre ces entiers en ordre croissant.

a) Montrer que, dans l'hypothèse où l'entrée est tout aussi susceptible d'être l'un des n ! permutations de ces entiers, le nombre moyen de comparaisons utilisées par le tri à bulles est égal à $E(X)$.

b) Utilisez l'exemple 5 de la section 3.3 pour montrer que $E(X) \leq n(n-1)/2$.

c) Montrer que le tri fait au moins une comparaison pour chaque inversion de deux entiers dans l'entrée.

un entier positif, alors $V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)$. [*Astuce:* généraliser le preuve donnée dans le théorème 7 pour deux variables aléatoires. Remarque qu'une preuve utilisant l'induction mathématique ne fonctionne pas; voir l'exercice 33.]

35. Utilisez l'inégalité de Chebyshev pour trouver une borne supérieure sur la probabilité que le nombre de queues qui se présentent lorsqu'un juste pièce est lancée n fois s'écarte de la moyenne par plus plus de $5\sqrt{n}$.

36. Utilisez l'inégalité de Chebyshev pour trouver une borne supérieure sur la probabilité que le nombre de queues qui se présentent lorsqu'un une pièce biaisée avec une probabilité de têtes égale à 0,6 est lancée n fois s'écarte de la moyenne de plus de $\sqrt{n}$.

37. Soit X une variable aléatoire sur un espace échantillon S de telle sorte que $X(s) \geq 0$ pour tout $s \in S$. Montre CA $p(X(s) \geq a) \leq E(X) / a$ pour chaque nombre réel positif ber a. Cette inégalité s'appelle **l'inégalité de Markov**.

38. Supposons que le nombre de canettes de soda pop rempli par jour dans une usine d'embouteillage est une variable aléatoire avec un 10 000 et une variance de 1 000.

a) Utilisez l'inégalité de Markov (exercice 37) pour obtenir un limite supérieure de la probabilité que la plante se remplisse plus de 11 000 canettes un jour donné.

b) Utiliser l'inégalité de Chebyshev pour obtenir une borne inférieure sur la probabilité que l'usine remplisse entre 9000 et 11 000 canettes un jour particulier.

d) Soit $I(P)$ la variable aléatoire qui est égale au nombre ber des inversions dans la permutation P. Montre CA $E(X) \geq E(I)$.

e) Soit $I_{j,k}$ la variable aléatoire avec $I_{j,k}(P) = 1$ si a_k précède a_j dans P et $I_{j,k} = 0$ sinon. Montre CA $I(P) = \sum_k \sum_{j<k} I_{j,k}(P)$.

f) Montrer que $E(I) = \sum_k \sum_{j<k} E(I_{j,k})$.

g) Montrer que $E(I_{j,k}) = 1/2$. [*Indice:* Montrer que $E(I_{j,k}) =$ probabilité que *un* $_k$ précède *un* $_j$ dans une permutation P. Ensuite , montrer qu'il est tout aussi probable pour *un* $_k$ précéder *un* $_j$ comme c'est à *un* $_j$ de précéder *un* $_k$ dans une permutation.]

h) Utilisez les parties (f) et (g) pour montrer que $E(I) = n(n-1)/4$.

i) conclure des parties (b), (d) et (h) que la moyenne le nombre d'âge de comparaisons utilisées pour trier n entiers est $\Theta(n^2)$.

∗ **42.** Dans cet exercice, nous trouvons la complexité moyenne des l'algorithme de tri rapide, décrit dans le préambule de exercice 50 dans la section 5.4, en supposant une distribution uniforme sur l'ensemble des permutations.

a) Soit X le nombre de comparaisons utilisées par le algorithme de tri pour trier une liste de n entiers distincts. Spectacle que le nombre moyen de comparaisons utilisées par le l'algorithme de tri rapide est $E(X)$ (où l'espace d'échantillon est l'ensemble de tous les n ! permutations de n entiers).

b) Soit $I_{j,k}$ la variable aléatoire égale à 1 si le j ème plus petit élément et le k ème plus petit élément de la liste initiale sont jamais comparés comme le tri rapide l'algorithme trie la liste et vaut 0 sinon. Spectacle que $X = \sum_{k=2}^{n} \sum_{j=1}^{k-1} I_{j,k}$.

c) Montrer que $E(X) = \sum_{k=2}^{n} \sum_{j=1}^{k-1} p$ (le j ème le plus petit et le k ème plus petit élément sont comparés).

d) Montrer que p (le j ème plus petit élément et le k ème le plus petit élément est comparé), où $k > j$, est égal à $2/(k-j+1)$.

e) Utilisez les parties (c) et (d) pour montrer que $E(X) = 2(n+1)(\sum_{i=2}^{n} 1/i) - 2(n-1)$.

f) conclure de la partie e) et du fait que $\sum_{j=1}^{n} 1/j \approx$ En $n + \gamma$, où $\gamma = 0.57721\ldots$ est la constante d'Euler, que le nombre moyen de comparaisons utilisées par le l'algorithme de tri rapide est $\Theta(n \log n)$.

∗ **43.** Quelle est la variance du nombre d' **éléments fixes** , c'est-à-dire des éléments laissés dans la même position, d'un permutation sélectionnée de n éléments? [*Indice:* que X désigne le nombre de points fixes d'une permutation aléatoire. Écrire $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, où $X_i = 1$ si la permu- fixe le i ème élément et $X_i = 0$ sinon.]

La **covariance** de deux variables aléatoires X et Y sur un échantillon l'espace S, désigné par Cov (X, Y), est défini comme étant le valeur de la variable aléatoire $(X - E(X))(Y - E(Y))$. Cette est, Cov $(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$.

44. Montrez que Cov $(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$, et utilisez ce résultat pour conclure que Cov $(X, Y) = 0$ si X et Y sont variables aléatoires indépendantes.

45. Montrez que $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2$ Cov (X, Y).

46. Trouvez Cov (X, Y) si X et Y sont les variables aléatoires avec $X((i, j)) = 2i$ et $Y((i, j)) = i + j$, où i et j sont les chiffres qui apparaissent sur le premier et le deuxième des deux dés lorsqu'ils sont lancés.

47. Lorsque m balles sont réparties uniformément dans n poubelles aléatoire, quelle est la probabilité que le premier bac reste vide?

48. Quel est le nombre attendu de balles qui tombent dans la première bac lorsque m balles sont réparties dans n bacs uniformément à Aléatoire?

49. Quel est le nombre prévu de bacs qui restent vides lorsque m boules sont réparties uniformément dans n poubelles dom?

Termes et résultats clés

TERMES

espace échantillon: l'ensemble des résultats possibles d'une expérience

événement: un sous-ensemble de l'espace échantillon d'une expérience

probabilité d'un événement (définition de Laplace): le nombre des résultats positifs de cet événement divisé par le nombre des résultats possibles

distribution de probabilité: une fonction p de l'ensemble de toutes les provient d'un espace échantillon S pour lequel $0 \leq p(x_i) \leq 1$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$ et $\sum_{i=1} p(x_i) = 1$, où $x_1, \ldots, x_n$ sont les résultats possibles

probabilité d'un événement E : la somme des probabilités de la résultats en E

$p(E \mid F)$ (probabilité conditionnelle de E étant donné F): le rapport $p(E \cap F) / p(F)$

événements indépendants: événements E et F tels que $p(E \cap F) = p(E)\, p(F)$

événements indépendants par paire: événements $E_1, E_2, \ldots, E_n$ tels que $p(E_i \cap E_j) = p(E_i)\, p(E_j)$ pour toutes les paires d'entiers i et j avec $1 \leq j < k \leq n$

événements mutuellement indépendants: événements $E_1, E_2, \ldots, E_n$ tels que $p(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \cdots \cap E_{i_m}) = p(E_{i_1})\, p(E_{i_2}) \cdots p(E_{i_m})$ chaque fois que i_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, sont des entiers avec $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq n$ et $m \geq 2$

variable aléatoire: une fonction qui attribue un nombre réel à chacun résultat possible d'une expérience

distribution d'une variable aléatoire X : l'ensemble des paires $(r, p(X = r))$ pour $r \in X(S)$

distribution uniforme: l'attribution de probabilités égales aux éléments d'un ensemble fini

valeur attendue d'une variable aléatoire: la moyenne pondérée moyenne d'une variable aléatoire, avec des valeurs de la variable aléatoire variable pondérée par la probabilité des résultats, c'est-à-dire $E(X) = \sum_{s \in S} p(s)\, X(s)$

distribution géométrique: la distribution d'une variable aléatoire X tel que $p(X = k) = (1 - p)^{k-1} p$ pour $k = 1, 2, \ldots$ pour un certain nombre réel p avec $0 \leq p \leq 1$.

variables aléatoires indépendantes: variables aléatoires X et Y tel que $p(X = r_1 \text{ et } Y = r_2) = p(X = r_1)\, p(Y = r_2)$ pour tous les nombres réels r_1 et r_2

variance d'une variable aléatoire X : la moyenne pondérée de la carré de la différence entre la valeur de X et son ex- valeur attendue $E(X)$, avec des poids donnés par la probabilité des résultats, c'est-à-dire $V(X) = \sum_{s \in S} (X(s) - E(X))^2 p(s)$

écart-type d'une variable aléatoire X : la racine carrée de la variance de X, c'est-à-dire $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Essai de Bernoulli: une expérience avec deux résultats possibles

algorithme probabiliste (ou Monte Carlo): un algorithme quels choix aléatoires sont effectués en une ou plusieurs étapes

méthode probabiliste: une technique pour prouver l'existence d'objets dans un ensemble avec certaines propriétés qui procède par attribuer des probabilités aux objets et montrer que les probabilités la capacité qu'un objet possède ces propriétés est positive

RÉSULTATS

La probabilité d'exactement k succès lorsque n indépendants les essais de Bernoulli sont effectués est égal à $C(n, k)\, p^k q^{n-k}$, où p est la probabilité de succès et $q = 1 - p$ est le probabilité d'échec.

Théorème de Bayes: si E et F sont des événements d'un espace échantillon S tel que $p(E) = 0$ et $p(F) = 0$, alors

$$p(F \mid E) = \frac{p(E \mid F)\, p(F)}{p(E \mid F)\, p(F) + p(E \mid F)\, p(F)}.$$

$$E(X) = \sum_{r \in X(S)} p(X = r)\, r.$$

linéarité des attentes: $E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$ si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variations aléatoires aptes

Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes, alors $E(XY) = E(X)\, E(Y)$.

Formule de Bienaymé: Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des raies indépendantes variables dom, puis $V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)$.

Inégalité de Tchebychev: $p(\mid X(s) - E(X) \mid \geq r) \leq V(X) / r^2$, où X est une variable aléatoire avec une fonction de probabilité p et r est un nombre réel positif.

Questions de révision

1. a) Définir la probabilité d'un événement lorsque tous les résultats sont tout aussi probables.

b) Quelle est la probabilité que vous sélectionniez les six gagnants dans une loterie si les six numéros gagnants différents bers sont choisis parmi les 50 premiers entiers positifs?

2. a) Quelles conditions doivent être remplies par les probabilités assigné aux résultats d'un espace échantillon fini?

b) Quelles probabilités attribuer au résultat des têtes et le résultat des queues si les têtes se lèvent trois fois plus souvent que la queue?

3. a) Définir la probabilité conditionnelle d'un événement E donné un événement F .

b) Supposons que E est l'événement où lorsqu'un dé est lancé, il arrive un nombre pair, et F est l'événement qui quand un dé est lancé, il arrive 1, 2 ou 3. Quel est le probabilité de F étant donné E ?

4. a) Quand deux événements E et F *sont-ils* indépendants?

b) Supposons que E soit l'événement où un nombre pair apparaît quand un dé juste est lancé, et F est le cas où un 5 ou 6 apparaît. Sont E et F indépendant?

5. a) Qu'est-ce qu'une variable aléatoire?

b) Quelles sont les valeurs possibles attribuées par l'aléatoire variable X qui attribue à un lancer de deux dés le plus grand numéro qui apparaît sur les deux dés?

6. a) Définir la valeur attendue d'une variable aléatoire X .

b) Quelle est la valeur attendue de la variable aléatoire X qui attribue à un lancer de deux dés le plus grand nombre qui apparaît sur les deux dés?

7. a) Expliquez comment le calcul de cas moyen plexité d'un algorithme, avec un nombre fini de possibilités peuvent être interprétées comme une valeur attendue.

b) Quelle est la complexité de calcul du cas moyen de l'algorithme de recherche linéaire, si la probabilité que l'élément pour lequel nous cherchons est dans la liste est de $1 / 3$, et il est également probable que cet élément les n éléments de la liste?

8. a) Qu'entend-on par procès Bernoulli?

b) Quelle est la probabilité de k succès dans n indépendants Essais de Bernoulli?

c) Quelle est la valeur attendue du nombre de succès dans n procès Bernoulli indépendants?

9. a) Quelle est la linéarité des attentes de variabilité aléatoire moyens signifie?

b) Comment la linéarité des attentes peut-elle nous aider à trouver nombre attendu de personnes qui reçoivent le bon chapeau quand une personne de contrôle retourne des chapeaux au hasard?

10. a) Comment la probabilité peut-elle être utilisée pour résoudre un problème de décision? lem, si une faible probabilité d'erreur est acceptable?

b) Comment pouvons-nous déterminer rapidement si un teger est primordial, si nous voulons accepter un petit capacité de faire une erreur?

11. Énoncez le théorème de Bayes et utilisez-le pour trouver $p(F \mid E)$ si $p(E \mid F) = 1/3$, $P(E \mid \bar{F}) = 1/4$, et $p(F) = 2/3$, où E et F sont des événements à partir d' un espace échantillon S .

12. a) Que signifie dire qu'une variable aléatoire a un distribution géométrique avec paramètre p ?

b) Quelle est la moyenne d'une distribution géométrique avec rameter p ?

13. a) Quelle est la variance d'une variable aléatoire?

b) Quelle est la variance d'un essai de Bernoulli avec probabilité p de réussite?

14. a) Quelle est la variance de la somme de n aléatoires indépendants variables dom?

b) Quelle est la variance du nombre de succès lorsque n essais de Bernoulli indépendants, chacun avec une probabilité p de réussite, sont réalisées?

15. Que nous apprend l'inégalité de Chebyshev sur le problème capacité qu'une variable aléatoire s'écarte de sa moyenne par plus qu'un montant spécifié?

Exercices supplémentaires

1. Quelle est la probabilité que six entiers consécutifs être choisis comme numéros gagnants dans une loterie où chacun le nombre choisi est un entier compris entre 1 et 40 (inclus)?

2. Un joueur de la loterie Mega Millions choisit cinq différents entiers compris entre 1 et 56, inclus, et un sixième entier entre 1 et 46, ce qui peut reproduire l'un des précédents

c) des paires de chacun des trois types différents et une seule carte d'un quatrième type?

d) des paires de deux types différents et trois cartes de un troisième, quatrième et cinquième type?

e) des cartes de sept types différents?

f) une couleur à sept cartes?

cinq entiers. Le joueur remporte le jackpot si les cinq premiers
les numéros choisis correspondent aux cinq premiers numéros tirés et
le sixième numéro correspond au sixième numéro tiré.

a) Quelle est la probabilité qu'un joueur remporte le jackpot?

b) Quelle est la probabilité qu'un joueur gagne 250 000 $, qui est le prix pour avoir fait correspondre les cinq premiers chiffres, mais pas le sixième numéro, tiré?

c) Quelle est la probabilité qu'un joueur gagne 150 $ par correspondant exactement à trois des cinq premiers nombres et le sixième nombre ou en faisant correspondre quatre des cinq premiers chiffres mais pas le sixième numéro?

d) Quelle est la probabilité qu'un joueur remporte un prix, si un le prix est remis lorsque le joueur correspond à au moins trois des cinq premiers chiffres ou du dernier numéro.

3. Un joueur de la loterie Powerball choisit cinq joueurs différents tégère entre 1 et 59, inclus, et un sixième entier entre 1 et 39, ce qui peut reproduire l'un des précédents cinq entiers. Le joueur remporte le jackpot si les cinq premiers les numéros choisis correspondent aux cinq premiers numéros tirés et le sixième numéro correspond au sixième numéro tiré.

a) Quelle est la probabilité qu'un joueur remporte le jackpot?

b) Quelle est la probabilité qu'un joueur gagne 200 000 $, qui est le prix pour avoir fait correspondre les cinq premiers chiffres, mais pas le sixième numéro, tiré?

c) Quelle est la probabilité qu'un joueur gagne 100 $ par correspondant exactement à trois des cinq premiers et le sixième chiffres ou quatre des cinq premiers chiffres, mais pas le sixième numéro?

d) Quelle est la probabilité qu'un joueur remporte un prix, si un le prix est remis lorsque le joueur correspond à au moins trois des cinq premiers chiffres ou du dernier numéro.

4. Quelle est la probabilité qu'une main de 13 cartes contienne pas de paires?

5. Quelle est la probabilité qu'une main de bridge de 13 cartes contienne

a) les 13 cœurs?

b) 13 cartes de la même couleur?

c) sept piques et six clubs?

d) sept cartes d'une couleur et six cartes d'une seconde couleur?

e) quatre diamants, six cœurs, deux piques et un club?

f) quatre cartes d'une couleur, six cartes d'une deuxième couleur, deux cartes d'une troisième couleur et une carte de la quatrième couleur?

6. Quelle est la probabilité qu'une main de poker à sept cartes tains

a) quatre cartes d'un type et trois cartes d'une seconde gentil?

b) trois cartes d'un type et des paires de chacune des deux différents types?

g) une suite de sept cartes?

h) une quinte flush à sept cartes?

Un **dé octaédrique** a huit faces numérotées 1 à 8.

7. a) Quelle est la valeur attendue du nombre qui vient quand un dé octaédrique juste est lancé?

b) Quelle est la variance du nombre qui apparaît lorsque un dé juste octaédrique est-il lancé?

Un **dé dodécaédrique** a 12 faces numérotées 1 à 12.

8. a) Quelle est la valeur attendue du nombre qui vient quand un dé juste dodécaédrique est lancé?

b) Quelle est la variance du nombre qui apparaît lorsque un dé juste dodécaédrique est-il lancé?

9. Supposons qu'une paire de dés octaédriques équitables soit lancée.

a) Quelle est la valeur attendue de la somme des nombres qui vient?

b) Quelle est la variance de la somme des nombres qui montez?

10. Supposons qu'une paire de dés dodécaédriques équitables soit lancée.

a) Quelle est la valeur attendue de la somme des nombres qui vient?

b) Quelle est la variance de la somme des nombres qui montez?

11. Supposons qu'un étalon (cubique) équitable meure et un octahe- Les dés de dral sont roulés ensemble.

a) Quelle est la valeur attendue de la somme des nombres qui vient?

b) Quelle est la variance de la somme des nombres qui montez?

12. Supposons qu'un juste octaédrique meurt et un juste dodécaédrique mourir sont roulés ensemble.

a) Quelle est la valeur attendue de la somme des nombres qui vient?

b) Quelle est la variance de la somme des nombres qui montez?

13. Supposons que n personnes, $n \geq 3$, jouent «personne étrange» pour cide qui achètera la prochaine série de rafraîchissements. Le n chacun lance une pièce juste simultanément. Si toutes les pièces mais on revient la même, la personne dont la pièce vient jusqu'à différents achète les rafraîchissements. Sinon, les gens retournez les pièces et continuez jusqu'à ce qu'une seule pièce arrive différent de tous les autres.

a) Quelle est la probabilité que l'étranger soit dé- cided en un seul lancer de pièce?

b) Quelle est la probabilité que l'étranger soit dé-

b) Quel est le nombre attendu de balles qui atterrissent dans un cidé avec le k ème flip?

c) Quel est le nombre attendu de flips nécessaires pour décider personne étrange avec n personnes?

14. Supposons que p et q soient premiers et $n = pq$. Quel est le probabilité qu'un entier positif choisi au hasard moins que n n'est pas divisible par p ou q ?

∗ 15. Supposons que m et n sont des entiers positifs. Quel est le probabilité qu'un entier positif choisi au hasard moins que mn n'est pas divisible par m ou n ?

16. Supposons que $E_1, E_2, ..., E_n$ sont n événements avec $p(E_i) > 0$ pour $i = 1, 2, ..., n$. Montre CA

$$p(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n)$$
$$= p(E_1)\, p(E_2 \mid E_1)\, p(E_3 \mid E_1 \cap E_2)$$
$$\cdots p(E_n \mid E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_{n-1}).$$

17. Il y a trois cartes dans une boîte. Les deux faces d'une carte sont noir, les deux côtés d'une carte sont rouges et la troisième carte a un côté noir et un côté rouge. Nous choisissons une carte à aléatoire et observez seulement un côté.

a) Si le côté est noir, quelle est la probabilité que le l'autre côté est également noir?

b) Quelle est la probabilité que le côté opposé soit le même couleur que celle que nous avons observée?

18. Quelle est la probabilité que lorsqu'une pièce équitable est retournée n fois un nombre égal de têtes et de queues apparaissent?

19. Quelle est la probabilité qu'une chaîne de bits sélectionnée au hasard de longueur 10 est un palindrome?

20. Quelle est la probabilité qu'une chaîne de bits sélectionnée au hasard de longueur 11 est un palindrome?

21. Considérez le jeu suivant. Une personne lance une pièce jusqu'à ce qu'une tête se lève. Cette personne reçoit un paiement de 2^n dollars si la première tête arrive au n e flip.

a) Soit X une variable aléatoire égale à la quantité de l'argent que la personne gagne. Montrer que la valeur attendue de X n'existe pas (c'est-à-dire qu'il est infini). Montre CA un joueur rationnel, c'est-à-dire quelqu'un prêt à payer pour jouer le jeu tant que le prix à jouer n'est pas plus que le gain attendu, devrait être prêt à parier n'importe quelle somme d'argent pour jouer à ce jeu. (Ceci est connu comme le **paradoxe de Saint-Pétersbourg** . Pourquoi pensez-vous cela s'appelle un paradoxe?)

b) Supposons que la personne reçoive 2^n dollars si le première tête arrive sur le n ème flip où $n < 8$ et $2^8 = 256$ dollars si la première tête arrive ou après ter le huitième flip. Quelle est la valeur attendue du montant d'argent que la personne gagne? Combien d'argent une personne devrait-elle être prête à payer pour jouer à ce jeu?

22. Supposons que n billes sont jetés dans b bacs de telle sorte que chaque la balle est également susceptible de tomber dans l'un des bacs et que les lancers sont indépendants.

a) Trouvez la probabilité qu'une balle particulière atterrit dans un bac spécifié.

bac particulier?

c) Quel est le nombre attendu de balles lancées jusqu'à ce bac particulier contient une balle?

∗ d) Quel est le nombre attendu de balles lancées jusqu'à ce que les poubelles contiennent une balle? [*Astuce:* Soit X_i le nombre des lancers nécessaires pour qu'une balle atterrisse dans un i ème bac une fois que i - 1 bacs contiennent une balle. Trouvez $E(X_i)$ et utilisez le linéarité des attentes.]

23. Supposons que A et B sont des événements avec probabilités $p(A) = 3/4$ et $p(B) = 1/3$.

a) Quel est le plus grand $p(A \cap B)$ peut être? Quel est le le plus petit possible? Donnez des exemples pour montrer que les deux des extrêmes pour $p(A \cap B)$ sont possibles.

b) Quel est le plus grand $p(A \cup B)$ peut être? Quel est le le plus petit possible? Donnez des exemples pour montrer que les deux des extrêmes pour $p(A \cup B)$ sont possibles.

24. Supposons que A et B sont des événements avec probabilités $p(A) = 2/3$ et $P(B) = 1$ / deux.

a) Quel est le plus grand $p(A \cap B)$ peut être? Quel est le le plus petit possible? Donnez des exemples pour montrer que les deux des extrêmes pour $p(A \cap B)$ sont possibles.

b) Quel est le plus grand $p(A \cup B)$ peut être? Quel est le le plus petit possible? Donnez des exemples pour montrer que les deux des extrêmes pour $p(A \cup B)$ sont possibles.

25. Rappelons de la définition 5 de la section 7.2 que le les événements $E_1, E_2, ..., E_n$ sont **mutuellement indépendants** si $p(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \cdots \cap E_{i_m}) = p(E_{i_1})\, p(E_{i_2}) \cdots p(E_{i_m})$ chaque fois que $i_j, j = 1, 2, ..., m$, sont des entiers avec $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq n$ et $m \geq 2$.

a) Écrivez les conditions requises pour trois événements E_1, E_2, et E_3 sont mutuellement indépendants.

b) Soit E_1 , E_2 et E_3 les événements que le premier flip monte la tête, que le deuxième flip monte la queue, et que le troisième flip arrive respectivement, quand une bonne pièce est lancée trois fois. Sont E_1 , E_2 , et E_3 mutuellement indépendants?

c) Soit E_1 , E_2 et E_3 les événements que le premier flip monte des têtes, que le troisième flip monte des têtes, et qu'un nombre pair de têtes se présentent, respectivement, lorsqu'une pièce de monnaie équitable est retournée trois fois. Sont E_1 , E_2 et E_3 indépendants par paire? Sont-ils mutuellement indépendant?

d) Soit E_1 , E_2 et E_3 les événements que le premier flip monte des têtes, que le troisième flip monte des têtes, et que exactement l'un des premier et troisième flip flip viennent les têtes, respectivement, quand une pièce de monnaie équitable est retournée trois fois. Sont E_1 , E_2 et E_3 indépendant par paires? Sont ils sont mutuellement indépendants?

e) Combien de conditions doivent être vérifiées pour montrer que n les événements sont-ils mutuellement indépendants?

26. Supposons que A et B sont des événements d'un échantillon espace S tel que $p(A) = 0$ et $p(B) = 0$. Montrer que si $p(B \mid A) < p(B)$, puis $p(A \mid B) < p(A)$.

Dans l'exercice 27, nous considérons le **problème** des **deux enfants** , reproduit en 1959 par Martin Garnder est ses jeux mathématiques colonne dans *Scientific American* . Une version du puzzle demande: «Nous rencontrons M. Smith alors qu'il marche dans la rue avec un jeune enfant qu'il présente comme son fils. Il nous raconte aussi qu'il a deux enfants. Quelle est la probabilité que son autre enfant est un fils? "Nous allons montrer que ce puzzle est ambigu, conduisant à un paradoxe, en montrant qu'il existe deux réponses à ce problème et nous décrirons comment faire le puzzle sans ambiguïté.

∗ **27. a)** Résolvez ce puzzle de deux manières différentes. Réponds d'abord résoudre le problème en considérant la probabilité de der du deuxième enfant. Ensuite, déterminez la probabilité différemment, en considérant les quatre possibilités différentes pour une famille de deux enfants.

b) Montrez que la réponse au puzzle devient sans biguous si nous savons aussi que M. Smith a choisi son compagnon de marche au hasard de ses deux enfants.

c) Une autre variante de ce puzzle demande «Quand nous nous rencontrons M. Smith, il nous dit qu'il a deux enfants et l'un au moins est un fils. Quelle est la probabilité que son l'autre enfant est un fils? "Résolvez cette variation du puzzle, expliquant pourquoi il est sans ambiguïté.

28. En 2010, le concepteur de puzzles Gary Foshee a posé ce problème lem: «M. Smith a deux enfants, dont un fils né un mardi. Quelle est la probabilité que M. Smith a deux fils? »Montrez qu'il y a deux réponses différentes à ce casse-tête, selon que M. Smith a précisé ou non a mentionné officiellement son fils parce qu'il est né un jour ou s'il a choisi un enfant au hasard et a signalé son sexe et jour de naissance de la semaine. [*Astuce:* pour la première possibilité, énumérer toutes les possibilités également probables pour le sexe et le jour de naissance de la semaine de l'autre enfant. Pour ce faire, considérons d'abord les cas où l'enfant plus âgé est un garçon né un mardi, puis le cas où le l'enfant plus âgé n'est pas un garçon né un mardi.]

29. Soit X une variable aléatoire sur un espace échantillon S . Spectacle que $V(aX+b) = a^2 V(X)$ chaque fois *que* a et b sont réels Nombres.

30. Utilisez l'inégalité de Chebyshev pour montrer que la probabilité que plus de 10 personnes obtiennent le bon chapeau quand une personne à hayon renvoie des chapeaux au hasard n'ex- Ceed $1/100$, peu importe combien de personnes vérifier leurs chapeaux. [*Astuce:* utilisez l'exemple 6 et l'exercice 43 de la section 7.4.]

31. Supposons qu'au moins un des événements E_j , $j = 1, 2, \ldots, m$, est garanti de se produire et pas plus de deux peut se produire. Montrer que si $p(E_j) = q$ pour $j = 1, 2, \ldots, m$ et $p(E_j \cap E_k) = r$ pour $1 \le j < k \le m$, puis $q \ge 1/m$ et $r \le 2/m$.

32. Montrer que si m est un entier positif, alors la probabilité que le m ème succès se produit sur le $(m+n)$ ème essai lorsque essais de Bernoulli indépendants, chacun avec une probabilité p de succès, sont exécutés, est $\binom{n+m-1}{n} q^n p^m$.

33. Il existe n différents types de cartes à collectionner que vous pouvez obtenez comme prix lorsque vous achetez un produit particulier. Supposer que chaque fois que vous achetez ce produit, il est tout aussi probable que vous obtenez tout type de ces cartes. Soit X le hasard variable égale au nombre de produits qui doivent être acheté pour obtenir au moins une carte de chaque type et soit X_j la variable aléatoire égale au nombre d'ad- produits supplémentaires qui doivent être achetés après j différents les cartes ont été collectées jusqu'à l'obtention d'une nouvelle carte pour $j = 0, 1, \ldots, n-1$.

a) Montrez que $X = \sum_{j=0}^{n-1} X_j$.

b) Montrer qu'après avoir obtenu j types de cartes distincts conservée, la carte obtenue lors du prochain achat sera être une carte d'un nouveau type avec probabilité $(n-j)/n$.

c) Montrer que X_j a une distribution géométrique avec paramètre $(n-j)/n$.

d) Utilisez les parties (a) et (c) pour montrer que $E(X) = n \sum_{j=1}^{n} 1/j$.

e) Utilisez l'approximation $\sum_{j=1}^{n} 1/j \approx \ln n + \gamma$, où $\gamma = 0.57721 \ldots$ est la constante d'Euler, pour trouver l'ex- nombre prévu de produits que vous devez acheter pour obtenir une carte de chaque type s'il y a 50 types différents de cartes.

34. Le **problème de satisfiabilité maximale requiert** une signature des valeurs de vérité aux variables d'un composé proposition sous forme normale conjonctive (qui exprime une proposition composée comme conjonction de clauses où chaque clause est la disjonction de deux ou plusieurs ou leurs négations) qui en fait autant autant que possible les clauses. Par exemple, trois mais pas quatre des clauses du

$$(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg r)$$

peut être rendu vrai par une affectation de valeurs de vérité à p , q , et r . Nous montrerons que les méthodes probabilistes peuvent vide une limite inférieure pour le nombre de clauses qui peuvent être rendu vrai par une affectation de valeurs de vérité aux aptes.

a) Supposons qu'il y ait n variables dans un composé proposition sous forme normale conjonctive. Si nous choisissons une valeur de vérité pour chaque variable au hasard en retournant une pièce et en affectant vrai à la variable si la pièce monte des têtes et faux si ça monte des queues, quoi est la probabilité de chaque affectation possible de la vérité valeurs aux n variables?

b) En supposant que chaque clause est la disjonction d'ex- en fait deux variables distinctes ou leurs négations, ce qui est la probabilité qu'une clause donnée soit vraie, compte tenu de la attribution aléatoire des valeurs de vérité de la partie (a)?

c) Supposons qu'il existe des clauses D dans le composé proposition. Quel est le nombre attendu de ces clauses qui sont vraies, étant donné l'attribution aléatoire de valeurs de vérité des variables?

d) Utiliser la partie (c) pour montrer que pour chaque proposition tion sous forme normale conjonctive il y a une cession des valeurs de vérité aux variables qui font au moins 3/4 des clauses vrai.

35. Quelle est la probabilité que chaque joueur ait une main conserver un as lorsque les 52 cartes d'un deck standard sont distribué à quatre joueurs?

∗ **36.** La méthode suivante peut être utilisée pour générer un permutation dom d'une suite de n termes. Premier arrivé-changer le n ème terme et le $r(n)$ ème terme où $r(n)$ est un entier choisi au hasard avec $1 \leq r(n) \leq n$. Ensuite, échangez le $(n - 1)$ premier terme du résultat-séquence ing avec son $r(n - 1)$ st terme où $r(n - 1)$ est un entier choisi au hasard avec $1 \leq r(n - 1) \leq n - 1$. Continuez ce processus jusqu'à $j = n$, où à la j ème étape vous échangez le $(n - j + 1)$ st terme de la séquence résultante avec son $r(n - j + 1)$ st terme, où $r(n - j + 1)$ est un entier sélectionné au hasard avec $1 \leq r(n - j + 1) \leq n - j + 1$. Montrez que lorsque cela est suivie, chacun des n ! différentes permutations des termes de la séquence est également susceptible d'être érigé. [*Astuce:* utilisez l'induction mathématique, en supposant que la probabilité que chacune des permutations de $n - 1$ termes produits par cette procédure pour une séquence de $n - 1$ termes est $1 / (n - 1)!$.]

Projets informatiques

Écrivez des programmes avec ces entrées et sorties.

1. Étant donné un nombre réel p avec $0 \leq p \leq 1$, générer un tirés d'une distribution de Bernoulli avec probabilités bilité p.

2. Étant donné un entier positif n, générer une permutation aléatoire tion de l'ensemble $\{1, 2, 3, ..., n\}$. (Voir l'exercice 36 dans le Exercices supplémentaires.)

3. Étant donné les entiers positifs m et n, générez m nombres aléatoires mutations des n premiers entiers positifs. Trouvez le numéro des inversions dans chaque permutation et déterminer la moyenne nombre moyen de ces inversions.

4. Étant donné un entier positif n, simulez n flips répétés de une pièce biaisée avec probabilité p de têtes et déterminer le nombre de têtes qui montent. Afficher le cumul résultats.

5. entiers positifs Étant donné n et m, génèrent m per- aléatoire mutations des n premiers entiers positifs. Triez chaque mutation en utilisant le tri par insertion, en comptant le nombre des comparaisons utilisées. Déterminez le nombre moyen de comparaisons utilisées sur toutes les m permutations.

6. entiers positifs Étant donné n et m, génèrent m per- aléatoire mutations des n premiers entiers positifs. Trier chaque permu- en utilisant la version du tri à bulles qui se termine lorsqu'une passe a été effectuée sans échange, en comptant le nombre de comparaisons utilisées. Déterminer la moyenne nombre de comparaisons utilisées sur toutes les m permutations.

7. Étant donné un entier positif m, simulez la collection de cartes qui accompagnent l'achat de produits pour trouver le numéro nombre de produits qui doivent être achetés pour obtenir un ensemble de m différentes cartes de collection. (Voir supplémentaire Exercice 33.)

8. Étant donné les entiers positifs m et n, simulez le placement de n clés, où un enregistrement avec la clé k est placé à l'emplacement $h(k) = k$ **mod** m et déterminer s'il y a au moins une collision.

9. Étant donné un entier positif n, trouvez la probabilité de les six entiers de l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$ qui étaient sélectionné mécaniquement dans une loterie.

10. Simuler des essais répétés du Monty Hall trois portes problème (exemple 10 dans la section 7.1) pour calculer le capacité de gagner avec chaque stratégie.

11. Compte tenu d'une liste de mots et des probabilités empiriques se produisent dans les e-mails de spam et dans les e-mails qui ne sont pas du spam, déterminer la probabilité qu'un nouveau message électronique soit Spam.

Calculs et explorations

Utilisez un ou plusieurs programmes informatiques que vous avez écrits pour effectuer ces exercices.

1. Trouvez les probabilités de chaque type de main sur cinq cartes poker et classer les types de mains par leur probabilité.

2. Trouvez des conditions telles que la valeur attendue de l'achat un billet de loterie de 1 $ à la loterie Pick-6 du New Jersey a une valeur attendue de plus de 1 $. Pour gagner, vous devez sélectionner lisez les six nombres tirés, là où l'ordre n'a pas d'importance, des entiers positifs 1 à 49 inclus. Les gains sont répartis également entre les détenteurs de billets gagnants. Etre sur de considérer la taille totale du pot entrant dans le dessin et le nombre de personnes qui achètent des billets.

3. Estimer la probabilité que deux entiers sélectionnés au hasard dom sont relativement premiers en testant un grand nombre de paires entières sélectionnées au hasard. Recherchez le théorème qui donne cette probabilité et comparer vos résultats avec la bonne probabilité.

4. Déterminez le nombre de personnes nécessaires pour vous assurer que probabilité au moins deux d'entre eux ont le même jour de la année car leur anniversaire est d'au moins 70%, au moins 80%, au moins 90%, au moins 95%, au moins 98% et au moins 99%.

5. Générez une liste de 100 permutations de l'ensemble des 100 premiers entiers positifs. (Voir exercice 36 dans les exercices supplémentaires.)

6. Étant donné une collection de messages électroniques, chacun déterminé à être du spam ou ne pas être du spam, développer un filtre bayésien basé sur sur l'apparition de mots particuliers dans ces messages.

7. Simulez la procédure de sortie de personne impaire (décrite dans ercise 13 des exercices supplémentaires) pour n per- avec $3 \leq n \leq 10$. Exécutez un grand nombre d'essais pour chaque valeur de n et utiliser les résultats pour estimer nombre attendu de flips nécessaires pour retrouver la personne étrange. Votre résultat est-il conforme à celui de l'exercice 29 dans Section 7.2? Variez le problème en supposant que exactement une personne a une pièce biaisée avec une probabilité de têtes $p = 0 . 5$.

8. Étant donné un nombre entier positif n , simulez une personne redonner des chapeaux aux gens. Déterminer le nombre des personnes qui obtiennent le bon chapeau.

Projets d'écriture

Répondez à ces questions par des essais en utilisant des sources extérieures.

1. Décrire les origines de la théorie des probabilités et les premières utilisations de cette théorie, y compris celles de Cardano, Pascal et Laplace.

2. Décrivez les différents paris que vous pouvez faire lorsque vous jouer à la roulette. Trouvez la probabilité de chacun de ces paris dans la version américaine où la roue contient le numéros 0 et 00. Quel est le meilleur pari et quel est le le pire pour toi?

3. Discutez de la probabilité de gagner lorsque vous jouez au jeu du blackjack contre un casino. Existe-t-il une stratégie gagnante pour la personne qui joue contre la maison?

4. Enquêter sur le jeu de craps et discuter de la probabilité que le tireur gagne et combien il est proche d'un jeu équitable.

5. Discutez des problèmes impliqués dans le développement de et la situation actuelle de la guerre entre les spammeurs et les gens qui essaient de filtrer le spam.

6. Discutez de l'histoire et de la solution de ce que l'on appelle le problème de Newton – Pepys, qui demande lequel est le plus probable: lancer au moins un six lorsque six dés sont lancés, lancer au moins deux six lorsque 12 dés sont lancés, ou lancer au moins trois six lorsque 18 dés sont lancés.

7. Expliquez comment Erd˝os et Rényi ont utilisé pour la première fois le technique et décrire quelques autres applications de cette méthode.

8. Discutez des différents types d'algorithmes probabilistes et décrire quelques exemples de chaque type.

CHAPITRE

Techniques de comptage avancées

8.1 Applications de Récurrence Rapports

8.2 Résolution linéaire Récurrence Rapports

8.3 Diviser et Conquérir Algorithmes et Récurrence Rapports

8.4 Génération Les fonctions

8.5 Inclusion–Exclusion

8.6 Applications de Inclusion-Exclusion

De nombreux problèmes de comptage ne peuvent pas être résolus facilement à l'aide des méthodes décrites au chapitre 6. Un de ces problèmes est: combien de chaînes de bits de longueur n ne contiennent pas deux consécutives des zéros? Pour résoudre ce problème, soit a_n le nombre de telles chaînes de longueur n. Un argument peut être donnée qui montre que la séquence $\{a_n\}$ satisfait la relation de récurrence $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ et les conditions initiales $a_1 = 2$ et $a_2 = 3$. Cette relation de récurrence et les conditions initiales déterminer la séquence $\{a_n\}$. De plus, une formule explicite peut être trouvée pour un_n à partir de l'équation reliant les termes de la séquence. Comme nous le verrons, une technique similaire peut être utilisée pour résoudre de nombreux différents types de problèmes de comptage.

Nous allons discuter de deux façons dont les relations de récurrence jouent un rôle important dans l'étude de algorithmes. Tout d'abord, nous présenterons un important paradigme algorithmique appelé dynamique programmation. Les algorithmes qui suivent ce paradigme décomposent un problème en chevauchement sous-problèmes. La solution au problème est alors trouvée à partir des solutions aux sous-problèmes par l'utilisation d'une relation de récurrence. Deuxièmement, nous étudierons un autre algorithme important paradigme, diviser pour mieux régner. Les algorithmes qui suivent ce paradigme peuvent être utilisés pour résoudre un problème en le récurant récursivement en un nombre fixe de sous-problèmes qui ne se chevauchent ces problèmes peuvent être résolus directement. La complexité de ces algorithmes peut être analysée en utilisant un type spécial de relation de récurrence. Dans ce chapitre, nous aborderons une variété de conquérir des algorithmes et analyser leur complexité à l'aide de relations de récurrence.

Nous verrons également que de nombreux problèmes de comptage peuvent être résolus en utilisant des séries de puissance formelles, appelées fonctions génératrices, où les coefficients de puissance de x représentent les termes de la séquence nous sommes intéressés. Outre la résolution de problèmes de comptage, nous pourrons également utiliser fonctions pour résoudre les relations de récurrence et pour prouver les identités combinatoires.

De nombreux autres types de problèmes de comptage ne peuvent pas être résolus en utilisant les techniques Chapitre 6, par exemple: Combien de façons existe-t-il d'affecter sept emplois à trois employés afin que chaque employé se voit attribuer au moins un emploi? Combien de nombres premiers y a-t-il moins de 1000? Tous les deux de ces problèmes peuvent être résolus en comptant le nombre d'éléments dans l'union des ensembles. nous développera une technique, appelée principe d'inclusion-exclusion, qui compte le nombre de éléments dans une union d'ensembles, et nous montrerons comment ce principe peut être utilisé pour résoudre le comptage problèmes.

Les techniques étudiées dans ce chapitre, ainsi que les techniques de base du chapitre 6, peuvent être utilisé pour résoudre de nombreux problèmes de comptage.

Applications des relations de récurrence

introduction

Rappelons du chapitre 2 qu'une définition récursive d'une séquence spécifie un ou plusieurs termes initiaux et une règle pour déterminer les termes ultérieurs à partir de ceux qui les précèdent. Rappelons également qu'un la règle de ce dernier type (qu'elle fasse ou non partie d'une définition récursive) est appelée **récurrence relation** et qu'une séquence est appelée une *solution* d'une relation de récurrence si ses termes satisfont la Relation réccurente.

Dans cette section, nous montrerons que ces relations peuvent être utilisées pour étudier et résoudre le comptage problèmes. Par exemple, supposons que le nombre de bactéries dans une colonie double toutes les heures Si une colonie commence avec cinq bactéries, combien seront présentes en n heures? Pour résoudre ce problème, soit a_n le nombre de bactéries au bout de n heures. Parce que le nombre de bactéries double toutes les heures, la relation $a_n = 2a_{n-1}$ tient chaque fois que n est un entier positif. Cette récurrence relation, avec la condition initiale $a_0 = 5$, détermine uniquement un_n pour tout non négatif entiers n . Nous pouvons trouver une formule pour un_n en utilisant l'approche itérative suivie au chapitre 2, à savoir que $a_n = 5 \cdot 2^n$ pour tous les entiers non négatifs n .

Certains des problèmes de comptage qui ne peuvent pas être résolus en utilisant les techniques décrites dans Le chapitre 6 peut être résolu en trouvant des relations de récurrence impliquant les termes d'une séquence, comme a été fait dans le problème impliquant des bactéries. Dans cette section, nous étudierons une variété de comptages problèmes pouvant être modélisés à l'aide de relations de récurrence. Au chapitre 2, nous avons développé des méthodes pour résoudre certaines relations de récurrence. Dans la section 8.2, nous étudierons les méthodes de recherche explicite formules pour les termes de séquences qui satisfont certains types de relations de récurrence.

Nous concluons cette section en introduisant le paradigme algorithmique de la programmation dynamique. Après avoir expliqué comment ce paradigme fonctionne, nous illustrerons son utilisation avec un exemple.

Modélisation avec des relations de récurrence

Nous pouvons utiliser des relations de récurrence pour modéliser une grande variété de problèmes, tels que la recherche de composé (voir l'exemple 11 à la section 2.4), compter les lapins sur une île, déterminer le nombre des mouvements dans le puzzle de la Tour de Hanoi, et en comptant les chaînes de bits avec certaines propriétés.

L'exemple 1 montre comment la population de lapins sur une île peut être modélisée à l'aide d'un Relation réccurente.

EXEMPLE 1 **Lapins et nombres de Fibonacci** Considérez ce problème, qui était à l'origine posé par Leonardo Pisano, également connu sous le nom de Fibonacci, au XIIIe siècle dans son livre *Liber abaci* . UNE une jeune paire de lapins (un de chaque sexe) est placée sur une île. Une paire de lapins ne se reproduit pas jusqu'à ce qu'ils aient 2 mois. Après 2 mois, chaque paire de lapins en produit un autre paire chaque mois, comme le montre la figure 1. Trouvez une relation de récurrence pour le nombre de paires de lapins sur l'île après n mois, en supposant qu'aucun lapin ne meure jamais.

Reproduction de paires (au moins deux mois) | Jeunes couples (moins de deux mois)

Mois	Reproduire paires	Jeune paires	Total paires
1	0	1	1
2	0	1	1
3	1	1	2
4	1	2	3
5	2	3	5
6	3	5	8

FIGURE 1 **Lapins sur une île.**

Solution: Notons f_n le nombre de paires de lapins après n mois. Nous montrerons que f_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, sont les termes de la séquence de Fibonacci.

La population de lapins peut être modélisée en utilisant une relation de récurrence. A la fin du premier mois, le nombre de paires de lapins sur l'île est $f_1 = 1$. Parce que cette paire ne se reproduisent au cours du deuxième mois, $f_2 = 1$ également. Pour trouver le nombre de paires après n mois, ajoutez le nombre sur l'île le mois précédent, f_{n-1}, et le nombre de couples nouveau-nés, qui est égal à f_{n-2}, car chaque paire de nouveau-nés provient d'une paire âgée d'au moins 2 mois.

Les chiffres de Fibonacci apparaître dans de nombreux autres endroits dans la nature, y compris le nombre de pétales sur fleurs et le nombre de spirales sur têtes de semences.

Par conséquent, la séquence $\{f_n\}$ satisfait la relation de récurrence

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

pour $n \geq 3$ avec les conditions initiales $f_1 = 1$ et $f_2 = 1$. Parce que cette relation de récurrence et les conditions initiales déterminent uniquement cette séquence, le nombre de paires de lapins sur l'île après n mois est donnée par le n ème numéro de Fibonacci. ▲

L'exemple 2 implique un puzzle célèbre.

EXEMPLE 2 **La tour de Hanoi** Un puzzle populaire de la fin du XIXe siècle inventé par les Français le mathématicien Édouard Lucas, appelé la Tour de Hanoi, se compose de trois chevilles montées sur une planche avec des disques de différentes tailles. Initialement, ces disques sont placés sur la première cheville par ordre de taille, avec le plus grand sur le fond (comme le montre la figure 2). Les règles du puzzle permettre aux disques d'être déplacés un par un d'une cheville à l'autre tant qu'un disque n'est jamais placé sur un disque plus petit. Le but du puzzle est d'avoir tous les disques sur la deuxième cheville ordre de taille, avec le plus grand sur le fond.

Soit H_n le nombre de mouvements nécessaires pour résoudre le problème de la Tour de Hanoi avec n disques. Établissez une relation de récurrence pour la séquence $\{H_n\}$.

Solution: commencez par n disques sur la cheville 1. Nous pouvons transférer les $n - 1$ premiers disques, en suivant les règles du puzzle, à cheviller 3 en utilisant H_{n-1} mouvements (voir la figure 3 pour une illustration des chevilles et des disques À ce point). Nous gardons le plus grand disque fixe pendant ces déplacements. Ensuite, nous utilisons un mouvement pour transférez le plus grand disque sur le deuxième pion. Nous pouvons transférer les $n - 1$ disques de la cheville 3 à la cheville 2 en utilisant H_{n-1} mouvements supplémentaires, en les plaçant sur le plus grand disque, qui reste toujours fixe sur le bas de la cheville 2. De plus, il est facile de voir que le puzzle ne peut pas être résolu en utilisant moins pas. Cela montre que

Schémas pour efficacement sauvegarde de fichiers informatiques sur plusieurs bandes ou autres les médias sont basés sur la mouvements utilisés pour résoudre le Puzzle Tour de Hanoi.

$$H_n = 2H_{n-1} + 1.$$

La condition initiale est $H_1 = 1$, car un disque peut être transféré de la cheville 1 à la cheville 2, selon les règles du puzzle, en un seul geste.

Peg 1 Peg 2 Peg 3

FIGURE 2 **La position initiale dans la tour de Hanoi.**

Peg 1 Peg 2 Peg 3

FIGURE 3 Une position intermédiaire dans la tour de Hanoi.

Nous pouvons utiliser une approche itérative pour résoudre cette relation de récurrence. Notez que

$$\begin{aligned}
H_n &= 2H_{n-1} + 1 \\
&= 2(2H_{n-2} + 1) + 1 = 2^2 H_{n-2} + 2 + 1 \\
&= 2^2(2H_{n-3} + 1) + 2 + 1 = 2^3 H_{n-3} + 2^2 + 2 + 1 \\
&\cdots \\
&= 2^{n-1} H_1 + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \cdots + 2 + 1 \\
&= 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 1 \\
&= 2^n - 1.
\end{aligned}$$

Nous avons utilisé la relation de récurrence à plusieurs reprises pour exprimer H_n en termes de termes précédents de la séquence. Dans l'avant-dernière égalité, la condition initiale $H_1 = 1$ a été utilisée. Le dernier l'égalité est basée sur la formule de la somme des termes d'une série géométrique, qui peut être trouvé dans le théorème 1 à la section 2.4.

L'approche itérative a produit la solution de la relation de récurrence $H_n = 2H_{n-1} + 1$ avec la condition initiale $H_1 = 1$. Cette formule peut être prouvée par induction mathématique. Ceci est laissé au lecteur comme exercice 1.

Un mythe créé pour accompagner le puzzle raconte une tour à Hanoi où les moines sont transferrer 64 disques d'or d'une cheville à l'autre, selon les règles du puzzle.Le mythe dit que le monde se terminera quand ils auront terminé le puzzle.Combien de temps après le début des moines la fin du monde si les moines prennent une seconde pour déplacer un disque?

De la formule explicite, les moines ont besoin

$$2^{64} - 1 = 18,446,744,073,709,551,615$$

se déplace pour transférer les disques. En faisant un mouvement par seconde, il leur faudra plus de 500 milliards ans pour terminer le transfert, de sorte que le monde devrait survivre un peu plus longtemps qu'il ne l'a déjà fait.▲

Remarque: Beaucoup de gens ont étudié les variations du puzzle original de la Tour de Hanoi discuté dans l'exemple 2. Certaines variantes utilisent plus de piquets, certaines permettent aux disques d'être de la même taille et d'autres restreindre les types de déplacements de disque autorisés.L'une des variations les plus anciennes et les plus intéressantes est la

Puzzle de Reve , * proposé en 1907 par Henry Dudeney dans son livre *The Canterbury Puzzles* . le
Le puzzle de Reve implique des pèlerins mis au défi par le Reve de déplacer une pile de fromages de différentes tailles du premier des quatre tabourets à un autre tabouret sans jamais placer un fromage sur l'un des plus petits diamètre. Le puzzle du Reve, exprimé en termes de chevilles et de disques, suit les mêmes règles que le

* *Reve* , plus communément orthographié *Reeve* , est un mot archaïque pour *gouverneur* .

Puzzle Tour de Hanoi, sauf que quatre chevilles sont utilisées. Vous pourriez trouver surprenant que personne n'ait pu établir le nombre minimum de mouvements requis pour résoudre ce casse-tête pour n disques. Cependant, il existe une conjecture, vieille de plus de 50 ans, selon laquelle le nombre minimum de mouvements requis est égal au nombre de mouvements utilisés par un algorithme inventé par Frame et Stewart en 1939. (Voir les Exercices 38–45 et [St94] pour plus d'informations.)

L'exemple 3 illustre comment les relations de récurrence peuvent être utilisées pour compter les chaînes de bits d'une spécification longueur qui ont une certaine propriété.

EXEMPLE 3 Trouver une relation de récurrence et donner des conditions initiales pour le nombre de chaînes de bits de longueur n qui n'ont pas deux 0 consécutifs. Combien y a-t-il de telles chaînes de bits de longueur cinq?

Solution: Soit a_n le nombre de chaînes de bits de longueur n qui n'ont pas deux 0 consécutifs. Pour obtenir une relation de récurrence pour $\{a_n\}$, notez que selon la règle de somme, le nombre de chaînes de bits de la longueur n qui n'a pas deux 0 consécutifs est égale au nombre de telles chaînes de bits se terminant par a 0 plus le nombre de ces chaînes de bits se terminant par un 1. Nous supposerons que $n \geq 3$, de sorte que le chaîne de bits a au moins trois bits.

Les chaînes de bits de longueur n *se* terminant par 1 qui n'ont pas deux 0 consécutifs sont précisément les chaînes de bits de longueur n - 1 sans deux 0 consécutifs avec un 1 ajouté à la fin. Par conséquent, il y a_{n-1} de telles chaînes de bits.

Les chaînes de bits de longueur n *se* terminant par un 0 qui n'ont pas deux 0 consécutifs doivent avoir 1 comme $(n - 1)$ premier bit; sinon, ils se termineraient par une paire de 0. Il s'ensuit que les chaînes de bits de longueur n *se* terminant par un 0 qui n'a pas deux 0 consécutifs sont précisément les chaînes de bits de longueur n - 2 sans deux 0 consécutifs avec 10 ajoutés à la fin. Par conséquent, il existe *un* $_{n-2}$ ces chaînes de bits.

Nous concluons, comme l'illustre la figure 4, que

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

pour $n \geq 3$.

Les conditions initiales sont *un* $_1 = 2$, parce que les deux chaînes de bits de longueur, 0 et 1 ne sont pas et 0 consécutifs $a_2 = 3$, parce que les chaînes de bits valides de deux longueurs sont 01, 10 et 11. Pour obtenir *un* $_5$, nous utilisons la relation de récurrence trois fois pour trouver que

$$a_3 = a_2 + a_1 = 3 + 2 = 5,$$
$$a_4 = a_3 + a_2 = 5 + 3 = 8,$$
$$a_5 = a_4 + a_3 = 8 + 5 = 13.$$

▲

Nombre de chaînes de bits
de longueur n sans
deux 0 consécutifs:

Terminez par un 1: Toute chaîne de bits de longueur n - 1 avec pas deux 0 consécutifs 1 a_{n-1}

Terminez par un 0: Toute chaîne de bits de longueur n - 2 avec pas deux 0 consécutifs 01 a_{n-2}

Total: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

FIGURE 4 Comptage de chaînes de bits de longueur *n* avec pas de deux 0 consécutifs.

Remarque: Notez que $\{a_n\}$ satisfait la même relation de récurrence que la séquence de Fibonacci.Car $a_1 = f_3$ et $a_2 = f_4$ il s'ensuit que $a_n = f_{n+2}$.

L'exemple 4 montre comment une relation de récurrence peut être utilisée pour modéliser le nombre de mots de code qui sont autorisés en utilisant certains contrôles de validité.

EXEMPLE 4 Énumération des mots de code Un système informatique considère qu'une chaîne de chiffres décimaux est valide mot de code s'il contient un nombre pair de 0 chiffres. Par exemple, 1230407869 est valide, tandis que 120987045608 n'est pas valide. Soit a_n le nombre de mots de code à n chiffres valides . Trouver une relation de récurrence pour un_n .

Solution: Notez que $un_1 = 9$ car il y a 10 chaînes à un chiffre, et une seule, à savoir les la chaîne 0 n'est pas valide. Une relation de récurrence peut être dérivée pour cette séquence en considérant comment valide n chaîne peut être obtenue à chiffres à partir de chaînes de n - 1 chiffres. Il existe deux façons de former une chaîne valide avec n chiffres d'une chaîne avec un chiffre de moins.

Tout d'abord, une chaîne valide de n chiffres peut être obtenue en ajoutant une chaîne valide de n - 1 chiffres avec un chiffre différent de 0. Cet ajout peut être effectué de neuf manières. Par conséquent, une chaîne valide avec n chiffres peut être formé de cette manière de $9à_{n-1}$ façons.

Deuxièmement, une chaîne valide de n chiffres peut être obtenue en ajoutant un 0 à une chaîne de longueur n - 1 non valide. (Cela produit une chaîne avec un nombre pair de 0 chiffres car le une chaîne non valide de longueur n - 1 a un nombre impair de 0 chiffres.) Le nombre de façons dont cela peut être fait est égal au nombre de chaînes de chiffres invalides $(n - 1)$. Parce qu'il y a 10^{n-1} chaînes de longueur n - 1, et un_{n-1} sont valides, il y a $10^{n-1} - un_{n-1}$ valide n chaînes obtenues par à chiffres en ajoutant une chaîne non valide de longueur n - 1 avec un 0.

Étant donné que toutes les chaînes valides de longueur n sont produites de l'une de ces deux manières, il s'ensuit que il y a

$$\begin{aligned} a_n &= 9a_{n-1} + (10^{n-1} - a_{n-1}) \\ &= 8a_{n-1} + 10^{n-1} \end{aligned}$$

chaînes valides de longueur n . ▲

L'exemple 5 établit une relation de récurrence qui apparaît dans de nombreux contextes différents.

EXEMPLE 5 Trouver une relation de récurrence pour C_n, le nombre de façons de mettre entre parenthèses le produit de $n + 1$ numbers, $x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n$, pour spécifier l'ordre de multiplication. Par exemple, $C_3 = 5$ car il existe cinq façons de mettre entre parenthèses $x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ pour déterminer l'ordre de multiplication:

$$((x_0 \cdot x_1) \cdot x_2) \cdot x_3 \qquad (x_0 \cdot (x_1 \cdot x_2)) \cdot x_3 \qquad (x_0 \cdot x_1) \cdot (x_2 \cdot x_3)$$
$$x_0 \cdot ((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3) \qquad x_0 \cdot (x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3)).$$

Solution: Pour développer une relation de récurrence pour C_n, nous notons cependant que nous insérons des parenthèses dans le produit $x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n$, un opérateur "·" reste en dehors de toutes les parenthèses, à savoir, l'opérateur pour la multiplication finale à effectuer. [Par exemple, dans $(x_0 \cdot (x_1 \cdot x_2)) \cdot x_3$, c'est le "·" final, tandis qu'en $(x_0 \cdot x_1) \cdot (x_2 \cdot x_3)$ c'est le deuxième "·".] Cet opérateur final apparaît entre deux des $n + 1$ nombres, disons, x_k et x_{k+1}. Il existe $C_k C_{n-k-1}$ façons d'insérer parenthèses pour déterminer l'ordre des $n + 1$ nombres à multiplier lors de l'opération finale. L'éditeur apparaît entre x_k et x_{k+1}, car il y a C_k façons d'insérer des parenthèses dans le produit $x_0 \cdot x_1 \cdot \cdots \cdot x_k$ pour déterminer l'ordre dans lequel ces $k + 1$ nombres doivent être multiplied et C_{n-k-1} façons d'insérer des parenthèses dans le produit $x_{k+1} \cdot x_{k+2} \cdot \cdots \cdot x_n$ pour déterminer

l'ordre dans lequel ces $n - k$ nombres doivent être multipliés. Parce que cet opérateur final peut apparaissent entre deux nombres $n + 1$, il s'ensuit que

$$C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \cdots + C_{n-2} C_1 + C_{n-1} C_0$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}.$$

Notez que les conditions initiales sont $C_0 = 1$ et $C_1 = 1$. ▲

La relation de récurrence dans l'exemple 5 peut être résolue en utilisant la méthode de génération de qui seront examinées à la section 8.4. On peut montrer que $C_n = C(2n, n)/(n + 1)$ (voir Exercice 41 à la section 8.4) et que $C_n \sim \frac{4^n}{n^{\text{trois / deux}}\sqrt{\pi}}$ (voir [GrKnPa94]). La séquence $\{C_n\}$ est la séquence de **nombres catalans**, du nom d'Eugène Charles Catalan. Cette séquence apparaît comme la solution de nombreux problèmes de comptage différents de celui considéré ici (voir le chapitre sur les nombres catalans dans [MiRo91] ou [Ro84a] pour plus de détails).

Algorithmes et relations de récurrence

Les relations de récurrence jouent un rôle important dans de nombreux aspects de l'étude des algorithmes et de leur complexité. Dans la section 8.3, nous montrerons comment les relations de récurrence peuvent être utilisées pour analyser complexité des algorithmes de division et de conquête, tels que l'algorithme de tri par fusion introduit dans Section 5.4. Comme nous le verrons à la section 8.3, les algorithmes de division et de conquête divisent récursivement un problème en un nombre fixe de sous-problèmes qui ne se chevauchent pas jusqu'à ce qu'ils deviennent assez simples à résoudre directement. Nous concluons cette section en introduisant un autre paradigme algorithmique connu comme **programmation dynamique** , qui peut être utilisée pour résoudre efficacement de nombreux problèmes d'optimisation.

Un algorithme suit le paradigme de programmation dynamique lorsqu'il tombe en panne récursivement un problème en sous-problèmes plus simples qui se chevauchent et calcule la solution à l'aide des solutions des sous-problèmes. Généralement, les relations de récurrence sont utilisées pour trouver la solution globale à partir de les solutions des sous-problèmes. La programmation dynamique a été utilisée pour résoudre d'importants problèmes dans des domaines aussi divers que l'économie, la vision par ordinateur, la reconnaissance vocale, intelligence, infographie et bioinformatique. Dans cette section, nous illustrerons l'utilisation de programmation dynamique en construisant un algorithme pour résoudre un problème d'ordonnancement. Avant ce faisant, nous raconterons l'origine amusante du nom de *programmation dynamique* , qui était

EUGÈNE CHARLES CATALAN (1814–1894) Eugène Catalan est né à Bruges, alors partie de la France. Son père est devenu un architecte à succès à Paris alors qu'Eugène était un garçon. Le catalan a fréquenté une école parisienne pour le design dans l'espoir de suivre les traces de son père. À 15 ans, il remporte le poste d'enseignant la géométrie à sa conception camarades de classe. Après avoir obtenu son diplôme, le catalan a fréquenté une école des beaux-arts, mais en raison de ses mathématiques aptitude ses instructeurs lui recommandent d'entrer à l'École Polytechnique. Il est devenu étudiant là-bas, mais après sa première année, il a été expulsé en raison de sa politique. Cependant, il a été réadmis, et en 1835, il est diplômé et a obtenu un poste au Collège de Châlons sur Marne.

En 1838, le catalan retourne à Paris où il fonde une école préparatoire avec deux autres cians, Sturm et Liouville. Après y avoir enseigné pendant une courte période, il a été nommé à un poste à l'École Polytechnique. Il obtient son doctorat de l'École Polytechnique en 1841, mais son activité politique en faveur des Français Republic a nui à ses perspectives de carrière. En 1846, le catalan occupe un poste au Collège de Charlemagne; il a été nommé au lycée Saint Louis en 1849. Cependant, lorsque le catalan ne prêterait pas serment d'allégeance au nouvel empereur Louis-Napoléon Bonaparte, il a perdu son emploi. Pendant 13 ans, il n'a occupé aucun poste permanent. Enfin, en 1865, il a été nommé à une chaire de mathématiques à l'Université de Liège, Belgique, un poste qu'il a occupé jusqu'à sa retraite en 1884.

Le catalan a apporté de nombreuses contributions à la théorie des nombres et au sujet connexe des fractions continues. Il a défini ce qui est maintenant connu sous le nom de nombres catalans quand il a résolu le problème de disséquer un polygone en triangles en utilisant des diagonales sans intersection. Le catalan est également bien connu pour formuler ce qui était connu comme la *conjecture catalane* . Cela a affirmé que 8 et 9 sont les seuls puissances consécutives d'entiers, une conjecture qui n'a pas été résolue avant 2003. Le catalan a écrit de nombreux manuels, dont plusieurs qui sont devenus très populaire et est apparu dans pas moins de 12 éditions. Peut-être que ce manuel aura un jour sa 12e édition!

introduit par le mathématicien Richard Bellman dans les années 1950. Bellman travaillait au RAND Corporation sur des projets pour l'armée américaine, et à l'époque, le secrétaire américain à la La défense était hostile à la recherche mathématique. Bellman a décidé que pour assurer le financement, il avait besoin d'un nom ne contenant pas le mot mathématiques pour sa méthode de résolution de l'ordonnancement et problèmes de planification. Il a décidé d'utiliser la *dynamique des* adjectifs parce que, comme il l'a dit, «c'est impossible utiliser le mot dynamique dans un sens péjoratif »et il pense que la programmation dynamique est "Quelque chose auquel même un membre du Congrès ne pourrait pas s'opposer."

UN EXEMPLE DE PROGRAMMATION DYNAMIQUE Le problème que nous utilisons pour illustrer la dynamique la programmation est liée au problème étudié dans l'exemple 7 de la section 3.1. Dans ce problème notre objectif était de programmer autant de conférences que possible dans une seule salle de conférence. Ces discussions ont heures de début et de fin prédéfinies; une fois qu'un discours commence, il continue jusqu'à sa fin; pas deux pourparlers peuvent se poursuivre à la fois; et une conversation peut commencer en même temps qu'une autre se termine. Nous avons développé un algorithme gourmand qui produit toujours un calendrier optimal, comme nous l'avons prouvé dans l'exemple 12 dans Section 5.1. Supposons maintenant que notre objectif n'est pas de planifier le plus de discussions possible, mais avoir la plus grande participation combinée possible aux pourparlers prévus.

Nous formalisons ce problème en supposant que nous avons n discussions, où la conversation j commence à temps t_j , se termine au temps e_j , et seront suivis par w_j étudiants. Nous voulons un calendrier qui maximise le nombre total d'étudiants participants. Autrement dit, nous souhaitons planifier un sous-ensemble de pourparlers pour maximiser la somme de w_j sur tous les entretiens programmés. (Notez que lorsqu'un étudiant assiste à plus d'une conférence, cette l'élève est compté en fonction du nombre de conférences suivies.) On note $T(j)$ le maximum nombre total de participants pour un horaire optimal dès les premiers j entretiens, donc $T(n)$ est le maximum nombre total de participants pour un horaire optimal pour toutes les n conférences.

Nous trions d'abord les pourparlers par ordre croissant d'heure de fin. Après cela, nous renumérotons le parle de sorte que $e_1 \leq e_2 \leq \cdots \leq e_n$. Nous disons que deux pourparlers sont **compatibles** s'ils peuvent faire partie du même horaire, c'est-à-dire si les heures auxquelles ils sont programmés ne se chevauchent l'un se termine et l'autre commence en même temps). Nous définissons $p(j)$ comme étant le plus grand entier i, $i < j$, pour laquelle $e_i \leq s_j$, si un tel entier existe, et $p(j) = 0$ sinon. Autrement dit, parler $p(j)$ est le fin de la conversation parmi les conversations compatibles avec la conversation j qui se terminent avant la fin de la conversation j, si une telle conférence existe, et $p(j) = 0$ s'il n'y a pas de telles discussions.

RICHARD BELLMAN (1920-1984) Richard Bellman, né à Brooklyn, où son père était épicier, a passé de nombreuses heures dans les musées et les bibliothèques de New York étant enfant. Après avoir obtenu son diplôme d'études secondaires, il a étudié les mathématiques au Brooklyn College et a obtenu son diplôme en 1941. Il a commencé des études supérieures à Johns Hopkins Université, mais à cause de la guerre, a quitté pour enseigner l'électronique à l'Université du Wisconsin. Il a pu continuer ses études de mathématiques au Wisconsin, et en 1943, il y a obtenu sa maîtrise. Plus tard, Bellman est entré Université de Princeton, enseignant dans un programme spécial de l'armée américaine. Fin 1944, il est enrôlé dans l'armée. Il a été affecté au Manhattan Project à Los Alamos où il a travaillé en physique théorique. Après la guerre, il retourné à Princeton et obtenu son doctorat. en 1946.

Après avoir brièvement enseigné à Princeton, il a déménagé à l'Université de Stanford, où il a atteint la permanence. À Stanford, il a poursuivi sa fascination pour la théorie des nombres. Cependant, Bellman a décidé de se concentrer sur les questions mathématiques problèmes du monde réel. En 1952, il rejoint la RAND Corporation, travaillant sur les processus de décision en plusieurs étapes, la recherche opérationnelle problèmes et applications aux sciences sociales et à la médecine. Il a travaillé sur de nombreux projets militaires alors qu'il était au RAND. En 1965, il a quitté RAND pour devenir professeur de mathématiques, de génie électrique et biomédical et de médecine à l'Université de Southern Californie.

Dans les années 1950, Bellman a été le premier à utiliser la programmation dynamique, une technique inventée plus tôt, dans un large éventail de paramètres. Il est également connu pour ses travaux sur les processus de contrôle stochastique, dans lesquels il a introduit ce qui est maintenant appelé l'équation de Bellman. Il a inventé le terme *malédiction de dimensionnalité* pour décrire les problèmes causés par l'augmentation exponentielle du volume associée à l'ajout dimensions supplémentaires à un espace. Il a écrit un nombre incroyable de livres et de documents de recherche avec de nombreux co-auteurs, dont beaucoup sur production industrielle et systèmes économiques. Son travail a mené à l'application de techniques informatiques dans une grande variété de domaines allant de la conception de systèmes de guidage pour véhicules spatiaux à l'optimisation des réseaux et même à la lutte antiparasitaire.

Malheureusement, Bellman a été diagnostiqué en 1973 d'une tumeur au cerveau. Bien qu'il ait été retiré avec succès, des complications l'ont laissé sévèrement handicapé. Heureusement, il a réussi à poursuivre ses recherches et à écrire au cours des dix dernières années de sa vie. Bellman a reçu de nombreux prix et récompenses, dont le premier prix Norbert Wiener en mathématiques appliquées et la médaille d'or IEEE de Honneur. Il a été élu à l'Académie nationale des sciences. Il était tenu en haute estime pour ses réalisations, son courage et son admirable qualités. Bellman était père de deux enfants.

Talk 7 $p(7) = 4$

Parler 6 $p(6) = 2$

Talk 5 $p(5) = 0$

Talk 4 $p(4) = 0$

Parler 3 $p(3) = 1$

Talk 2 $p(2) = 0$

Parler 1 $p(1) = 0$

8 h 9 h 10 h 11 h 12 h 13 h 14 h 15 h

FIGURE 5 **Un calendrier des conférences avec les valeurs de** ***p (n)*** **montrées.**

EXEMPLE 6 Considérons sept entretiens avec ces heures de début et de fin, comme illustré dans la figure 5.

Parler 1: commencer à 8 h, terminer à 10 h
Talk 2: commencez à 9 h, fin à 11 h
Conférence 3: début 10 h 30, fin 12 h
Talk 4: début 9h30, fin 13h
Conférence 5: début 8h30, fin 14h
Talk 6: début 11h, fin 14h
Discussion 7: début 13 h, fin 14 h

Trouvez $p(j)$ pour $j = 1, 2, ..., 7$.

Solution: Nous avons $p(1) = 0$ et $p(2) = 0$, car aucune conversation ne se termine avant les deux premiers les pourparlers commencent. On a $p(3) = 1$ car talk 3 et talk 1 sont compatibles, mais talk 3 et talk 2 ne sont pas compatibles; $p(4) = 0$ car la conversation 4 n'est compatible avec aucune des conversations 1, 2 et 3; $p(5) = 0$ car la conversation 5 n'est compatible avec aucune des conversations 1, 2, 3 et 4; et $p(6) = 2$ car talk 6 et talk 2 sont compatibles, mais talk 6 n'est compatible avec aucune des conversations 3, 4 et 5. Enfin, $p(7) = 4$, car talk 7 et talk 4 sont compatibles, mais talk 7 n'est compatible avec aucun des parle 5 ou 6. ▲

Pour développer un algorithme de programmation dynamique pour ce problème, nous développons d'abord une clé Relation réccurente. Pour ce faire, notons d'abord que si $j \leq n$, il existe deux possibilités pour un calendrier des premiers j entretiens (rappelons que nous supposons que les n entretiens sont ordonnés en augmentant heure de fin): *(i) la* conversation j appartient à l'horaire optimal ou *(ii)* elle ne l'est pas.

Cas (i): Nous savons que les pourparlers $p(j) + 1, ..., j - 1$ n'appartiennent pas à cet horaire, pour aucun des ces autres conférences sont compatibles avec la conférence j. En outre, les autres pourparlers dans ce calendrier optimal doit comprendre un calendrier optimal pour les entretiens $1, 2, . . . , p(j)$. Car s'il y avait un meilleur horaire pour les entretiens $1, 2, . . . , p(j)$, en ajoutant talk j, nous aurons un calendrier meilleur que l'optimum global programme. Par conséquent, dans le cas *(i)*, nous avons $T(j) = w_j + T(p(j))$.

Cas (ii): Lorsque la conversation j n'appartient pas à un horaire optimal, il s'ensuit qu'un le programme des discussions $1, 2, ..., j$ est le même qu'un programme optimal des discussions $1, 2, ..., j - 1$. Par conséquent, dans le cas *(ii)*, nous avons $T(j) = T(j - 1)$. La combinaison des cas *(i)* et *(ii)* nous amène à la relation de récurrence

$$T(j) = \max(w_j + T(p(j)), T(j - 1)).$$

Maintenant que nous avons développé cette relation de récurrence, nous pouvons construire un algorithme efficace, Algorithme 1, pour calculer le nombre total maximum de participants. Nous nous assurons que l'algorithme est efficace en stockant la valeur de chaque $T(j)$ après l'avoir calculée. Cela nous permet de calculer $T(j)$

juste une fois. Si nous ne le faisions pas, l'algorithme aurait une complexité exponentielle dans le pire des cas. Le processus de stockage des valeurs à mesure que chacune est calculée est appelé **mémorisation** et est un technique importante pour rendre les algorithmes récursifs efficaces.

ALGORITHME 1 Algorithme de programmation dynamique pour la planification des entretiens.

procédure *Nombre maximum de participants* ($s_1, s_2, ..., s_n$: heures de début des discussions;
$e_1, e_2, ..., e_n$: fin des pourparlers; $w_1, w_2, ..., w_n$: nombre de participants aux conférences)
trier les conversations par heure de fin et réétiqueter de sorte que $e_1 \leq e_2 \leq \cdots \leq e_n$
pour j : = 1 **à** n
si aucun travail i avec $i < j$ n'est compatible avec le travail j
$p(j) = 0$
sinon $p(j)$: = max { $i \mid i < j$ et le travail i est compatible avec le travail j }
$T(0)$: = 0
pour j : = 1 **à** n
$T(j)$: = max $(w_j + T(p(j)), T(j - 1))$
return $T(n)$ { $T(n)$ est le nombre maximum de participants}

Dans l'algorithme 1, nous déterminons le nombre maximum de participants pouvant être atteint par un calendrier de pourparlers, mais nous ne trouvons pas un calendrier qui atteint ce maximum.Trouver nous devons planifier, nous utilisons le fait que talk$j$ appartient à une solution optimale pour la le premier j parle si et seulement si $w_j + T(p(j)) \geq T(j - 1)$. Nous laissons comme exercice 53 pour construire un algorithme basé sur cette observation qui détermine quels pourparlers devraient être programmés pour atteindre le nombre total maximum de participants.

L'algorithme 1 est un bon exemple de programmation dynamique car l'attention totale maximale la danse est trouvée en utilisant les solutions optimales des sous-problèmes qui se chevauchent, chacun fixe la fréquentation totale maximale des premiers j entretiens pour certains j avec $1 \leq j \leq n - 1$. Voir les exercices 56 et 57 et les exercices supplémentaires 14 et 17 pour d'autres exemples de programmation dynamique.

Des exercices

1. Utilisez l'induction mathématique pour vérifier la formule dérivée dans l'exemple 2 pour le nombre de coups nécessaires pour compléter le puzzle de la tour de Hanoi.

2. a) Trouvez une relation de récurrence pour le nombre de permu- d'un ensemble de n éléments.

b) Utilisez cette relation de récurrence pour trouver le nombre de mutations d'un ensemble avec n éléments en utilisant l'itération.

3. Un distributeur automatique de livres de timbres accepte seulement des pièces d'un dollar, des billets de 1 $ et des billets de 5 $.

a) Trouver une relation de récurrence pour le nombre de façons déposer n dollars dans le distributeur automatique, où l'ordre dans lequel les pièces et les billets sont déposés importe.

b) Quelles sont les conditions initiales?

c) Combien y a-t-il de façons de déposer 10 $ pour un livre de timbres?

4. Un pays utilise comme monnaie des pièces de monnaie d'une valeur de 1 peso, 2 pesos, 5 pesos et 10 pesos et factures avec des valeurs de 5 pesos, 10 pesos, 20 pesos, 50 pesos et 100 pesos. Trouver une relation de récurrence pour le nombre de façons de payer une facture de n pesos si l'ordre dans lequel les pièces et les billets sont questions payées.

5. Combien y a-t-il de façons de payer une facture de 17 pesos en utilisant la devise décrite dans l'exercice 4, où l'ordre en Quelles pièces et billets sont payés?

∗ **6. a)** Trouvez une relation de récurrence pour le nombre de augmentation des séquences d'entiers positifs qui ont 1 comme premier terme et n comme dernier terme, où n est un entier positif. Autrement dit, les séquences $a_1, a_2, ..., a_k$, où $a_1 = 1$, $a_k = n$ et $a_j < a_{j+1}$ pour $j = 1, 2, ..., k - 1$.

b) Quelles sont les conditions initiales?

c) Combien de séquences du type décrit en (a) sont là quand n est un entier avec $n \geq 2$?

7. a) Trouver une relation de récurrence pour le nombre de chaînes de bits de longueur n qui contiennent une paire de 0 consécutifs.

b) Quelles sont les conditions initiales?
c) Combien de chaînes de bits de longueur sept contiennent deux 0 consécutifs?

8. a) Trouver une relation de récurrence pour le nombre de chaînes de bits de longueur n contenant trois 0 consécutifs.
b) Quelles sont les conditions initiales?
c) Combien de chaînes de bits de longueur sept contiennent trois 0 consécutifs?

9. a) Trouver une relation de récurrence pour le nombre de chaînes de bits de longueur n qui ne contiennent pas trois 0 consécutifs.
b) Quelles sont les conditions initiales?
c) Combien de chaînes de bits de longueur sept ne contiennent pas trois 0 consécutifs?

∗ **10. a)** Trouver une relation de récurrence pour le nombre de chaînes de bits de longueur n contenant la chaîne 01.
b) Quelles sont les conditions initiales?
c) Combien de chaînes de bits de longueur sept contiennent le chaîne 01?

11. a) Trouvez une relation de récurrence pour le nombre de façons monter n escaliers si la personne monter les escaliers peut prendre un escalier ou deux escaliers à la fois.
b) Quelles sont les conditions initiales?
c) De combien de façons cette personne peut-elle gravir un huit marches?

12. a) Trouvez une relation de récurrence pour le nombre de façons monter n escaliers si la personne monter les escaliers peut prendre un, deux ou trois escaliers à la fois.
b) Quelles sont les conditions initiales?
c) À bien des égards, cette personne peut monter un vol de huit escaliers?

Une chaîne qui ne contient que 0, 1 et 2 s'appelle un **ternaire chaîne** .

13. a) Trouver une relation de récurrence pour le nombre de ternaires chaînes de longueur n qui ne contiennent pas deux consécutives 0s.
b) Quelles sont les conditions initiales?
c) Combien de cordes ternaires de longueur six ne contiennent pas deux 0 consécutifs?

14. a) Trouvez une relation de récurrence pour le nombre de chaînes ternaires de longueur n contenant deux 0 consécutifs.
b) Quelles sont les conditions initiales?
c) Combien de cordes ternaires de longueur six contiennent deux 0 consécutifs?

∗ **15. a)** Trouver une relation de récurrence pour le nombre de ternaires chaînes de longueur n qui ne contiennent pas deux consécutives 0 ou deux 1 consécutifs.
b) Quelles sont les conditions initiales?
c) Combien de cordes ternaires de longueur six ne contiennent pas deux 0 consécutifs ou deux 1 consécutifs?

∗ **16. a)** Trouver une relation de récurrence pour le nombre de ternaires chaînes de longueur n qui contiennent soit deux consécutives 0 ou deux 1 consécutifs.
b) Quelles sont les conditions initiales?
c) Combien de cordes ternaires de longueur six contiennent deux 0 consécutifs ou deux 1 consécutifs?

∗ **17. a)** Trouver une relation de récurrence pour le nombre de ternaires chaînes de longueur n qui ne contiennent pas consécutives symboles identiques.
b) Quelles sont les conditions initiales?
c) Combien de cordes ternaires de longueur six ne contiennent pas symboles consécutifs qui sont les mêmes?

∗∗ **18. a)** Trouver une relation de récurrence pour le nombre de ternaires des chaînes de longueur n qui contiennent deux symbols qui sont les mêmes.
b) Quelles sont les conditions initiales?
c) Combien de cordes ternaires de longueur six contiennent des symboles sécutifs qui sont les mêmes?

19. Les messages sont transmis sur un canal de communication en utilisant deux signaux. La transmission d'un signal nécessite 1 microseconde, et la transmission de l'autre signal est nécessite 2 microsecondes.
a) Trouvez une relation de récurrence pour le nombre de diffé- messages constitués de séquences de ces deux signaux, où chaque signal du message est immédiatement suivi du signal suivant, qui peut être envoyé en n microsecondes.
b) Quelles sont les conditions initiales?
c) Combien de messages différents peuvent être envoyés en 10 millions crosecondes en utilisant ces deux signaux?

20. Un chauffeur de bus paie tous les péages, en utilisant uniquement des nickels et des dimes, en jetant une pièce à la fois dans le péage mécanique collectionneur.
a) Trouver une relation de récurrence pour le nombre de différents façons dont le chauffeur de bus peut payer un péage de n cents (où l'ordre dans lequel les pièces sont utilisées est important).
b) De combien de manières différentes le conducteur peut-il payer un péage de 45 cents?

21. a) Trouver la relation de récurrence satisfaite par R_n , où R_n est le nombre de régions dans lesquelles un avion est divisé en par n lignes, si deux des lignes ne sont pas parallèles et aucune trois des lignes passent par le même point.
b) Trouvez R_n en utilisant l'itération.

∗ **22. a)** Trouver la relation de récurrence satisfaite par R_n , où R_n est le nombre de régions dans lesquelles la surface d'un sphère est divisée par n grands cercles (qui sont les coupes de la sphère et des plans passant par le centre de la sphère), si aucun des trois grands cercles passer par le même point.
b) Trouvez R_n en utilisant l'itération.

∗ **23. a)** Trouver la relation de récurrence satisfaite par S_n , où S_n est le nombre de régions dans lesquelles en trois dimensions l'espace est divisé par n plans si tous les trois des plans se rencontrent en un point, mais aucun des quatre avions ne passe par le même point.
b) Trouvez S_n en utilisant l'itération.

24. Trouver une relation de récurrence pour le nombre de séquences de bits de longueur n avec un nombre pair de 0.

25. Combien de séquences de bits de longueur sept contiennent un pair nombre de 0?

26. a) Trouvez une relation de récurrence pour le nombre de façons couvrir complètement un damier $2 \times n$ avec 1×2 dominos. [*Astuce:* Considérez séparément les revêtements où la position dans le coin supérieur droit de la damier est recouvert par un domino positionné izontalement et où il est couvert par une position domino verticalement.]

b) Quelles sont les conditions initiales de la récurrence dans la partie a)?

c) De combien de façons existe-t-il pour couvrir Damier 2×17 avec dominos 1×2?

27. a) Trouvez une relation de récurrence pour le nombre de façons aménager une passerelle avec des tuiles d'ardoise si les tuiles sont rouges, vert ou gris, de sorte qu'il n'y ait pas deux tuiles rouges adjacentes et les carreaux de la même couleur sont considérés comme capable.

b) Quelles sont les conditions initiales de la récurrence dans la partie a)?

c) Combien y a-t-il de façons de tracer un chemin de sept tuiles comme décrit dans la partie (a)?

28. Montrer que les nombres de Fibonacci satisfont la récurrence relation $f_n = 5 f_{n-4} + 3 f_{n-5}$ pour $n = 5, 6, 7, \ldots$, to- ensemble avec les conditions initiales $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_3 = 2$ et $f_4 = 3$. Utilisez cette relation de récurrence pour montrer que f_{5n} est divisible par 5, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$.

∗ **29.** Soit $S(m, n)$ le nombre de fonctions sur de un ensemble avec m éléments à un ensemble avec n éléments. Spectacle que $S(m, n)$ satisfait la relation de récurrence

$$S(m, n) = n^m - \sum_{k=1}^{n-1} C(n, k)\, S(m, k)$$

chaque fois que $m \geq n$ et $n > 1$, avec la condition initiale $S(m, 1) = 1$.

30. a) Écris toutes les façons dont le produit $x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$ peut être mis entre parenthèses pour déterminer l'ordre des plication.

b) Utiliser la relation de récurrence développée dans l'exemple 5 pour calculer C_4, le nombre de façons de mettre entre parenthèses le produit de cinq nombres afin de déterminer l'or- der de la multiplication. Vérifiez que vous avez répertorié le bon nombre de voies dans la partie (a).

c) Vérifiez votre résultat dans la partie (b) en trouvant C_4, en utilisant le formule fermée pour C_n mentionnée dans la solution de Exemple 5.

31. a) Utilisez la relation de récurrence développée dans l'exemple 5 pour déterminer C_5, le nombre de façons de mettre entre parenthèses la produit de six numéros pour déterminer la commande de multiplication.

b) Vérifiez votre résultat avec la formule fermée pour C_5 men- dans la solution de l'exemple 5.

∗ **32.** Dans le casse-tête de la tour de Hanoi, supposons que notre objectif soit de fer tous les n disques de la cheville 1 à la cheville 3, mais nous ne pouvons pas déplacer un disque directement entre les chevilles 1 et 3. Chaque déplacement d'un disque doit être un mouvement impliquant la cheville 2. Comme d'habitude, nous ne pouvons pas placez un disque sur un disque plus petit.

a) Trouvez une relation de récurrence pour le nombre de mouvements requis pour résoudre le casse-tête pour n disques avec cela ajouté restriction.

b) Résolvez cette relation de récurrence pour trouver une formule pour le nombre de mouvements nécessaires pour résoudre le casse-tête pour n disques.

c) Combien y a-t-il d'arrangements différents parmi les n disques sur trois chevilles afin qu'aucun disque ne soit au-dessus d'un plus petit disque?

d) Montrer que chaque arrangement autorisé des n disques se produit dans la solution de cette variation du puzzle.

Les exercices 33 à 37 traitent d'une variation du **Josèphe problème** décrit par Graham, Knuth et Patashnik dans [GrKnPa94]. Ce problème est basé sur un compte rendu torian Flavius Josephus, qui faisait partie d'une bande de 41 juifs rebelles piégés dans une grotte par les Romains pendant la période juive- Guerre romaine du premier siècle. Les rebelles ont préféré le suicide capturer; ils ont décidé de former un cercle et à plusieurs reprises compter autour du cercle, tuant chaque troisième rebelle vivant. Cependant, Josephus et un autre rebelle ne voulaient pas être tués par ici; ils ont déterminé les positions où ils devraient sont les deux derniers rebelles encore en vie. La variation nous considérons commence par n personnes, numérotées de 1 à n, stand- autour d'un cercle. À chaque étape, une personne sur deux encore laissé en vie est éliminé jusqu'à ce qu'un seul survit. Nous désignons le numéro du survivant par $J(n)$.

33. Déterminer la valeur de $J(n)$ pour chaque entier n avec $1 \leq n \leq 16$.

34. Utilisez les valeurs que vous avez trouvées dans l'exercice 33 pour conjecturer formule pour $J(n)$. [*Indice:* Écrivez $n = 2^m + k$, où m est un entier non négatif et k est un entier non négatif moins plus de 2^m.]

35. Montrer que $J(n)$ satisfait la relation de récurrence $J(2n) = 2J(n) - 1$ et $J(2n + 1) = 2J(n) + 1$, pour $n \geq 1$, et $J(1) = 1$.

36. Utilisez l'induction mathématique pour prouver la formule conjecturé dans l'exercice 34, en utilisant la récidive relation de l'exercice 35.

37. Déterminer $J(100)$, $J(1000)$ et $J(10{,}000)$ à partir de votre formule pour $J(n)$.

Les exercices 38 à 45 impliquent le puzzle du Reve, la variation de le puzzle de la Tour de Hanoi avec quatre chevilles et n disques. Avant présentant ces exercices, nous décrivons le cadre-Stewart al- gorithme pour déplacer les disques de la cheville 1 à la cheville 4 afin qu'aucune le disque est toujours au-dessus d'un plus petit. Cet algorithme, étant donné le nombre de disques n en entrée, dépend du choix d'un entier k avec $1 \leq k \leq n$. Lorsqu'il n'y a qu'un seul disque, déplacez passer de la cheville 1 à la cheville 4 et arrêter. Pour $n > 1$, l'algorithme pro- récursivement, en utilisant ces trois étapes. Déplacer récursivement la pile des $n - k$ plus petits disques de la cheville 1 à la cheville 2, en utilisant les quatre chevilles. Déplacer ensuite la pile des k plus grands disques de la cheville 1 à la cheville 4, en utilisant l'algorithme à trois chevilles de le puzzle de la tour de Hanoi sans utiliser la cheville les k plus petits disques. Enfin, déplacez récursivement les $n - k$ disques les plus petits au piquet 4, en utilisant les quatre piquets. Cadre et Stewart a montré que pour produire le moins de mouvements en utilisant leur algorithme, k doit être choisi pour être le plus petit entier

telle que n ne dépasse pas $t_k = k(k+1)/2$, le k ème triangu-
nombre, c'est-à-dire $t_{k-1} < n \leq t_k$. La conjecture instable, connue sous le nom **de conjecture de Frame**, est que cet algorithme utilise le le moins de mouvements nécessaires pour résoudre le puzzle, pas de ter comment les disques sont déplacés.

38. Montrez que le puzzle du Reve avec trois disques peut être résolu en utilisant cinq mouvements, et pas moins.

39. Montrez que le puzzle du Reve avec quatre disques peut être résolu en utilisant neuf mouvements, et pas moins.

40. Décrivez les mesures prises par Frame-Stewart algorithme, avec k choisi de sorte que le moins de mouvements soient requis pour

a) 5 disques. **b)** 6 disques. **c)** 7 disques. **d)** 8 disques.

∗ **41.** Montrer que si $R(n)$ est le nombre de coups utilisé par l'algorithme Frame-Stewart pour résoudre le puzzle de Reve avec n disques, où k est choisi pour être le plus petit entier avec $n \leq k(k+1)/2$, alors $R(n)$ satisfait la récurrence relation $R(n) = 2R(n-k) + 2^k - 1$, avec $R(0) = 0$ et $R(1) = 1$.

∗ **42.** Montrez que si k est tel que choisi dans l'exercice 41, alors $R(n) - R(n-1) = 2^{k-1}$.

∗ **43.** Montrez que si k est tel que choisi dans l'exercice 41, alors $R(n) = \sum_{i=1}^{k} i 2^{i-1} - (t_k - n) 2^{k-1}$.

∗ **44.** Utilisez l'exercice 43 pour donner une limite supérieure au nombre nombre de mouvements nécessaires pour résoudre le casse-tête du Reve pour tous entiers n avec $1 \leq n \leq 25$.

∗ **45.** Montrer que $R(n)$ est $O(\sqrt{n} 2^{\sqrt{2n}})$.

Soit $\{a_n\}$ une suite de nombres réels. La **différence en arrière les références** de cette séquence sont définies de manière récursive comme indiqué suivant. La **première différence** ∇a_n est

$$\nabla a_n = a_n - a_{n-1}.$$

La ***(k + 1)* st différence** $\nabla^{k+1} a_n$ est obtenue à partir de $\nabla^k a_n$ par

$$\nabla^{k+1} a_n = \nabla^k a_n - \nabla^k a_{n-1}.$$

46. Trouvez ∇a_n pour la séquence $\{a_n\}$, où

a) $a_n = 4$. **b)** $a_n = 2n$.

c) $a_n = n^2$. **d)** $a_n = 2^n$.

47. Trouvez $\nabla^2 a_n$ pour les séquences de l'exercice 46.

48. Montrer que $a_{n-1} = a_n - \nabla a_n$.

49. Montrer que $a_{n-2} = a_n - 2\nabla a_n + \nabla^2 a_n$.

∗ **50.** Prouver que d' un_{n-k} peut être exprimé en termes d' un_n, ∇un_n, $\nabla^2 a_n, \ldots, \nabla^k a_n$.

51. Exprimer la relation de récurrence $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ in termes de a_n, ∇a_n et $\nabla^2 a_n$.

52. Montrer que toute relation de récurrence pour la séquence $\{a_n\}$ peut être écrit en termes d' un_n, ∇un_n, $\nabla^2 a_n$, ... Le result- équation impliquant les séquences et ses différences est appelé une **équation de différence** .

∗ **53.** Construisez l'algorithme décrit dans le texte après rithme 1 pour déterminer les pourparlers à programmer pour maximiser le nombre total de participants et pas seulement le nombre total maximum de participants déterminé par Algorithme 1.

54. Utilisez l'algorithme 1 pour déterminer le nombre maximum de nombre total de participants aux discussions de l'exemple 6 si w_i, le nombre des participants de talk i, $i = 1, 2, \ldots, 7$, is

a) 20, 10, 50, 30, 15, 25, 40.

b) 100, 5, 10, 20, 25, 40, 30.

c) 2, 3, 8, 5, 4, 7, 10.

d) 10, 8, 7, 25, 20, 30, 5.

55. Pour chaque partie de l'exercice 54, utilisez votre algorithme Exercice 53 pour trouver le calendrier optimal pour les discussions afin que le nombre total de participants est maximisé.

56. Dans cet exercice, nous développerons un programme dynamique algorithme de calcul pour trouver la somme maximale des termes sécutifs d'une séquence de nombres réels. Cette est, étant donné une séquence de nombres réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$, l'algorithme calcule la somme maximale $\sum_{i=j}^{k} a_i$ où $1 \leq j \leq k \leq n$.

a) Montrer que si tous les termes de la séquence sont non négatifs, ce problème est résolu en prenant la somme de tous les termes. Ensuite, donnez un exemple où la somme maximale de les termes consécutifs ne sont pas la somme de tous les termes.

b) Soit $M(k)$ le maximum des sommes consécutives termes de la séquence se terminant par un_k. Autrement dit, $M(k) = \max_{1 \leq j \leq k} \sum_{i=j}^{k} a_i$. Expliquez pourquoi la récurrence tion $M(k) = \max(M(k-1) + a_k, a_k)$ est valable pour $k = 2, \ldots, n$.

c) Utiliser la partie (b) pour développer une algo- rithme pour résoudre ce problème.

d) Montrez chaque étape que votre algorithme de la partie (c) utilise pour trouver la somme maximale des termes consécutifs de la séquence $2, -3, 4, 1, -2, 3$.

e) Montrer que la complexité la plus défavorable en termes de nombre d'additions et de comparaisons de votre le rithme de la partie (c) est linéaire.

∗ **57.** La programmation dynamique peut être utilisée pour développer un algorithme pour résoudre le multi-chaîne matricielle problème de plication introduit dans la section 3.3. Cette est le problème de déterminer comment le produit $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{A}_n$ peut être calculé en utilisant le moins multiplications entières, où $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ sont $m_1 \times m_2, m_2 \times m_3, \ldots, m_n \times m_{n+1}$ matrices, respec- et chaque matrice a des entrées entières. Rappeler que par le droit associatif, le produit ne dépend pas de l'ordre dans lequel les matrices sont multipliées.

a) Montrer que la méthode de la force brute pour déterminer la nombre minimum de multiplications entières nécessaires pour résoudre un problème de multiplication matrice-chaîne a complexité minimale du pire des cas. [*Indice:* faites-le d'abord montrant que l'ordre de multiplication des matrices est spécifié en mettant le produit entre parenthèses. Ensuite, utilisez Exemple 5 et le résultat de la partie (c) de l'exercice 41 dans Section 8.4.]

b) Notons $\mathbf{A}_{ij}$ le produit $\mathbf{A}_i \mathbf{A}_{i+1} \ldots, \mathbf{A}_j$, et $M(i, j)$ le nombre minimum de multiples entiers tiplications nécessaires pour trouver $\mathbf{A}_{ij}$. Montrez que si le moins de multiplications entières sont utilisées pour calculer $\mathbf{A}_{ij}$, où $i < j$, en divisant le produit dans le produit de $\mathbf{A}_i$ à $\mathbf{A}_k$ et le produit de $\mathbf{A}_{k+1}$ à $\mathbf{A}_j$, alors les k premiers termes doivent être entre parenthèses de sorte que $\mathbf{A}_{ik}$ est calculé dans le manière optimale en utilisant $M(i, k)$ multiplications entières et $\mathbf{A}_{k+1, j}$ doivent être entre parenthèses pour que $\mathbf{A}_{k+1, j}$ est calculé de manière optimale en utilisant $M(k+1, j)$ multiplications entières.

c) Expliquer pourquoi la partie (b) conduit à la relation de récurrence tion $M(i, j) = \min_{i \leq k < j} (M(i, k) + M(k+1, j) + m_i m_{k+1} m_{j+1})$ si $1 \leq i \leq j < j \leq n$.

d) Utiliser la relation de récurrence de la partie (c) pour construire un algorithme efficace pour déterminer l'ordre les n matrices doivent être multipliées pour utiliser le nombre imum de multiplications entières. Conserver le résultats partiels $M(i, j)$ tels que vous les trouvez afin que votre l'algorithme n'aura pas de complexité exponentielle.

e) Montrez que votre algorithme de la partie (d) a $O(n^3)$ pire complexité en termes de multiplications de entiers.

Résolution des relations de récurrence linéaire

introduction

Une grande variété de relations de récurrence se produisent dans les modèles.Certaines de ces relations de récurrence peuvent être résolu en utilisant l'itération ou une autre technique ad hoc.Cependant, une classe importante de les relations de récurrence peuvent être résolues explicitement de manière systématique.Ce sont des relations de récurrence qui expriment les termes d'une séquence sous forme de combinaisons linéaires de termes précédents.

DÉFINITION 1 Une *relation de récurrence linéaire homogène de degré k à coefficients constants*est une récurrence relation de référence de la forme

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k},$$

où $c_1, c_2, \ldots, c_k$ sont des nombres réels et $c_k = 0$.

La relation de récurrence dans la définition est **linéaire** car le côté droit est une somme de termes précédents de la séquence multipliés chacun par une fonction de n. La relation de récurrence est **homogène** car il n'existe pas de termes qui ne soient pas des multiples de a_j s. Les coefficients du les termes de la séquence sont tous des **constantes** , plutôt que des fonctions qui dépendent de n. Le **diplôme** est k car a_n est exprimé en termes des k termes précédents de la séquence.

Une conséquence du deuxième principe de l'induction mathématique est qu'une séquence satisfaisant déterminer la relation de récurrence dans la définition est uniquement déterminé par cette relation de récurrence et les k conditions initiales

$$a_0 = C_0, a_1 = C_1, \ldots, a_{k-1} = C_{k-1}.$$

EXEMPLE 1 La relation de récurrence $P_n = (1.11) P_{n-1}$ est une relation de récurrence linéaire homogène de degré un. La relation de récurrence $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ est une relation de récurrence linéaire homogène de degré deux. La relation de récurrence $a_n = a_{n-5}$ est une relation de récurrence linéaire homogène de degré cinq. ▲

L'exemple 2 présente quelques exemples de relations de récurrence qui ne sont pas linéaires homogènes relations de récurrence à coefficients constants.

EXEMPLE 2 La relation de récurrence $a_n = a_{n-1} + a^2_{n-2}$ n'est pas linéaire. La relation de récurrence $H_n = 2H_{n-1} + 1$ n'est pas homogène. La relation de récurrence $B_n = nB_{n-1}$ n'a pas de constante coefficients. ▲

Les relations de récurrence homogènes linéaires sont étudiées pour deux raisons. Tout d'abord, ils se produisent souvent dans la modélisation des problèmes. Deuxièmement, ils peuvent être systématiquement résolus.

Résolution de relations de récurrence homogènes linéaires à coefficients constants

L'approche de base pour résoudre les relations de récurrence homogènes linéaires est de rechercher des solutions de la forme $a_n = r^n$, où r est une constante. Notez que $a_n = r^n$ est une solution de la récurrence relation $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$ si et seulement si

$$r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \cdots + c_k r^{n-k}.$$

Lorsque les deux côtés de cette équation sont divisés par r^{n-k} et le côté droit est soustrait de à gauche, on obtient l'équation

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \cdots - c_{k-1} r - c_k = 0.$$

Par conséquent, la séquence $\{a_n\}$ avec $a_n = r^n$ est une solution si et seulement si r est une solution de cette dernière équation. Nous appelons cela l'**équation caractéristique** de la relation de récurrence. Les solutions de cette équation sont appelées les **racines caractéristiques** de la relation de récurrence. Comme nous le verrons, ces racines caractéristiques peuvent être utilisées pour donner une formule explicite pour toutes les solutions du Relation réccurente.

Nous allons d'abord développer des résultats qui traitent des relations de récurrence homogènes linéaires avec coefficients constants de degré deux. Ensuite, résultats généraux correspondants lorsque le diplôme peut être supérieur à deux sera indiqué. Parce que les preuves nécessaires pour établir les résultats dans l'ensemble cas sont plus compliqués, ils ne seront pas donnés ici.

Nous tournons maintenant notre attention vers les relations de récurrence homogènes linéaires de degré deux. Premier, considérons le cas lorsqu'il y a deux racines caractéristiques distinctes.

THÉORÈME 1 Soit c_1 et c_2 des nombres réels. Supposons que $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ a deux racines distinctes r_1 et r_2. Alors la séquence $\{a_n\}$ est une solution de la relation de récurrence $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ si et seulement si $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$, où α_1 et α_2 sont des constantes.

Preuve: Nous devons faire deux choses pour prouver le théorème. Tout d'abord, il faut montrer que si r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique, et α_1 et α_2 sont des constantes, alors la séquence $\{a_n\}$ avec $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ est une solution de la relation de récurrence. Deuxièmement, il doit être démontré que si la séquence $\{a_n\}$ est une solution, alors $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ pour certaines constantes α_1 et α_2.

Nous allons maintenant montrer que si $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$, alors la séquence $\{a_n\}$ est une solution de la relation de récurrence. Parce que r_1 et r_2 sont des racines de $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$, il s'ensuit que $r_1^2 = c_1 r_1 + c_2$, $r_2^2 = c_1 r_2 + c_2$.

De ces équations, nous voyons que

$$\begin{aligned} c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} &= c_1(\alpha_1 r_1^{n-1} + \alpha_2 r_2^{n-1}) + c_2(\alpha_1 r_1^{n-2} + \alpha_2 r_2^{n-2}) \\ &= \alpha_1 r_1^{n-2}(c_1 r_1 + c_2) + \alpha_2 r_2^{n-2}(c_1 r_2 + c_2) \\ &= \alpha_1 r_1^{n-2} r_1^2 + \alpha_2 r_2^{n-2} r_2^2 \\ &= \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n \\ &= a_n. \end{aligned}$$

Cela montre que la séquence $\{a_n\}$ avec $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ est une solution de la relation de récurrence.

Montrer que chaque solution $\{a_n\}$ de la relation de récurrence $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ a $un_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$, pour certaines constantes α_1 et α_2, supposons que $\{a_n\}$ est a solution de la relation de récurrence, et les conditions initiales $a_0 = C_0$ et $a_1 = C_1$ maintiennent. Ce sera montrer qu'il existe des constantes α_1 et α_2 telles que la séquence $\{a_n\}$ avec $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ remplit ces mêmes conditions initiales. Cela nécessite que

$$a_0 = C_0 = \alpha_1 + \alpha_2,$$

$$a_1 = C_1 = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2.$$

Nous pouvons résoudre ces deux équations pour α_1 et α_2. De la première équation, il résulte que $\alpha_2 = C_0 - \alpha_1$. L'insertion de cette expression dans la deuxième équation donne

$$C_1 = \alpha_1 r_1 + (C_0 - \alpha_1) r_2.$$

Par conséquent,

$$C_1 = \alpha_1 (r_1 - r_2) + C_0 r_2.$$

Cela montre que

$$\alpha_1 = \frac{C_1 - C_0 r_2}{r_1 - r_2}$$

et

$$\alpha_2 = C_0 - \alpha_1 = C_0 - \frac{C_1 - C_0 r_2}{r_1 - r_2} = \frac{C_0 r_1 - C_1}{r_1 - r_2},$$

où ces expressions pour α_1 et α_2 dépendent du fait que $r_1 = r_2$. (Lorsque $r_1 = r_2$, cela théorème n'est pas vrai.) Par conséquent, avec ces valeurs pour α_1 et α_2, la séquence $\{a_n\}$ avec $\alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ satisfait aux deux conditions initiales.

Nous savons que $\{a_n\}$ et $\{\alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n\}$ sont les deux solutions de la relation de récurrence $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ et satisfont tous deux aux conditions initiales lorsque $n = 0$ et $n = 1$. Parce que il existe une solution unique d'une relation de récurrence linéaire homogène de degré deux avec deux conditions initiales, il s'ensuit que les deux solutions sont les mêmes, c'est-à-dire $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ pour tous les entiers non négatifs n. Nous avons complété la preuve en montrant qu'une solution du lin- la relation de récurrence homogène de l'oreille avec des coefficients constants de degré deux doit former $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$, où α_1 et α_2 sont des constantes.

Les racines caractéristiques d'une relation de récurrence linéaire homogène à coefficients constants Les clients peuvent être des nombres complexes. Le théorème 1 (et aussi les théorèmes suivants dans cette section) s'applique dans ce cas. Les relations de récurrence avec des racines caractéristiques complexes ne seront pas discutées dans le texte. Les lecteurs familiers avec les nombres complexes peuvent souhaiter résoudre les exercices 38 et 39.

Les exemples 3 et 4 montrent comment utiliser le théorème 1 pour résoudre les relations de récurrence.

EXEMPLE 3 Quelle est la solution de la relation de récurrence

$$a_n = a_{n-1} + 2 a_{n-2}$$

avec $un_0 = 2$ et $un_1 = 7$?

Solution: le théorème 1 peut être utilisé pour résoudre ce problème. L'équation caractéristique du la relation de récurrence est $r^2 - r - 2 = 0$. Ses racines sont $r = 2$ et $r = -1$. Par conséquent, la séquence $\{a_n\}$ est une solution à la relation de récurrence si et seulement si

$$a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2 (-1)^n,$$

pour certaines constantes α_1 et α_2 . Il ressort des conditions initiales que

$$a_0 = 2 = \alpha_1 + \alpha_2,$$
$$a_1 = 7 = \alpha_1 \cdot 2 + \alpha_2 \cdot (-1).$$

La résolution de ces deux équations montre que $\alpha_1 = 3$ et $\alpha_2 = -1$. Par conséquent, la solution à la récurrence
La relation de référence et les conditions initiales sont la séquence $\{a_n\}$ avec

$$a_n = 3 \cdot 2^n - (-1)^n.$$

▲

EXEMPLE 4 Trouvez une formule explicite pour les nombres de Fibonacci.

Solution: Rappelons que la séquence des nombres de Fibonacci satisfait la relation de récurrence $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ et satisfait également aux conditions initiales $f_0 = 0$ et $f_1 = 1$. Les racines de la l'équation caractéristique $r^2 - r - 1 = 0$ sont $r_1 = (1 + \sqrt{5})/2$ et $r_2 = (1 - \sqrt{5})/2$. Par conséquent, du Théorème 1, il s'ensuit que les nombres de Fibonacci sont donnés par

$$f_n = \alpha_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \alpha_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

pour certaines constantes α_1 et α_2 . Les conditions initiales $f_0 = 0$ et $f_1 = 1$ peuvent être utilisées pour les trouver constantes. Nous avons

$$f_0 = \alpha_1 + \alpha_2 = 0,$$
$$f_1 = \alpha_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \alpha_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1.$$

La solution à ces équations simultanées pour α_1 et α_2 est

$$\alpha_1 = 1/\sqrt{5}, \qquad \alpha_2 = -1/\sqrt{5}.$$

Par conséquent, les nombres de Fibonacci sont donnés par

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

▲

Le théorème 1 ne s'applique pas lorsqu'il existe une racine caractéristique de la multiplicité deux.Si cela se produit, alors $a_n = nr_0^n$ est une autre solution de la relation de récurrence lorsque r_0 est une racine de multiplicité deux de l'équation caractéristique. Le théorème 2 montre comment gérer ce cas.

THÉORÈME 2 Soit c_1 et c_2 des nombres réels avec $c_2 = 0$. Supposons que $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ n'en ait qu'un racine r_0 . Une séquence $\{a_n\}$ est une solution de la relation de récurrence $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ si et seulement si $a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n$, pour $n = 0, 1, 2, \ldots$, où α_1 et α_2 sont des constantes.

La preuve du théorème 2 est laissée comme exercice 10. L'exemple 5 illustre l'utilisation de ce théorème.

EXEMPLE 5 Quelle est la solution de la relation de récurrence

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$$

avec les conditions initiales $a_0 = 1$ et $a_1 = 6$?

Solution: La seule racine de $r^2 - 6r + 9 = 0$ est $r = 3$. Par conséquent, la solution à cette récurrence la relation est

$$a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 n 3^n$$

pour certaines constantes α_1 et α_2. En utilisant les conditions initiales, il s'ensuit que

$$a_0 = 1 = \alpha_1,$$
$$a_1 = 6 = \alpha_1 \cdot 3 + \alpha_2 \cdot 3.$$

La résolution de ces deux équations montre que $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 = 1$. Par conséquent, la solution à cette relation de récurrence et les conditions initiales est

$$a_n = 3^n + n3^n.$$

▲

Nous allons maintenant énoncer le résultat général de la solution de récurrence homogène linéaire relations à coefficients constants, où le degré peut être supérieur à deux, dans le cadre de la la supposition que l'équation caractéristique a des racines distinctes. La preuve de ce résultat sera laissée comme exercice 16.

THÉORÈME 3 Soit $c_1, c_2, \ldots, c_k$ des nombres réels. Supposons que l'équation caractéristique

$$r^k - c_1 r^{k-1} - \cdots - c_k = 0$$

a k racines distinctes $r_1, r_2, \ldots, r_k$. Alors une séquence $\{a_n\}$ est une solution de la relation de récurrence

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

si et seulement si

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \cdots + \alpha_k r_k^n$$

pour $n = 0, 1, 2, \ldots$, où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sont des constantes.

Nous illustrons l'utilisation du théorème avec l'exemple 6.

EXEMPLE 6 Trouver la solution de la relation de récurrence

$$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$$

avec les conditions initiales $a_0 = 2$, $a_1 = 5$ et $a_2 = 15$.

Solution: Le polynôme caractéristique de cette relation de récurrence est

$$r^3 - 6r^2 + 11r - 6.$$

Les racines caractéristiques sont $r = 1$, $r = 2$ et $r = 3$, car $r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = (r-1)(r-2)(r-3)$. Par conséquent, les solutions à cette relation de récurrence sont de la forme

$$a_n = \alpha_1 \cdot 1^n + \alpha_2 \cdot 2^n + \alpha_3 \cdot 3^n.$$

Pour trouver les constantes α_1, α_2 et α_3, utilisez les conditions initiales. Cela donne

$$a_0 = 2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3,$$
$$a_1 = 5 = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 2 + \alpha_3 \cdot 3,$$
$$a_2 = 15 = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 4 + \alpha_3 \cdot 9.$$

Lorsque ces trois équations simultanées sont résolues pour α_1, α_2 et α_3, nous constatons que $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$ et $\alpha_3 = 2$. Par conséquent, la solution unique à cette relation de récurrence et l'initiale donnée conditions est la séquence $\{a_n\}$ avec

$$a_n = 1 - 2^n + 2 \cdot 3^n.$$

▲

Nous donnons maintenant le résultat le plus général sur les relations de récurrence homogènes linéaires avec coefficients constants, permettant à l'équation caractéristique d'avoir plusieurs racines. Le point clé est que pour chaque racine r de l'équation caractéristique, la solution générale a un sommateur de la forme $P(n)r^n$, où $P(n)$ est un polynôme de degré $m - 1$, avec m la multiplicité de cette racine. Nous laissons la preuve de ce résultat à l'exercice 51.

THÉORÈME 4 Soit $c_1, c_2, \ldots, c_k$ des nombres réels. Supposons que l'équation caractéristique

$$r^k - c_1 r^{k-1} - \cdots - c_k = 0$$

a t racines distinctes $r_1, r_2, \ldots, r_t$ avec des multiplicités $m_1, m_2, \ldots, m_t$, respectivement, donc que $m_i \geq 1$ pour $i = 1, 2, \ldots, t$ et $m_1 + m_2 + \cdots + m_t = k$. Alors une séquence $\{a_n\}$ est un solution de la relation de récurrence

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

si et seulement si

$$\begin{aligned} a_n = {} & (\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1} n + \cdots + \alpha_{1,m_1-1} n^{m_1-1}) r_1^n \\ & + (\alpha_{2,0} + \alpha_{2,1} n + \cdots + \alpha_{2,m_2-1} n^{m_2-1}) r_2^n \\ & + \cdots + (\alpha_{t,0} + \alpha_{t,1} n + \cdots + \alpha_{t,m_t-1} n^{m_t-1}) r_t^n \end{aligned}$$

pour $n = 0, 1, 2, \ldots$, où $\alpha_{i,j}$ sont des constantes pour $1 \leq i \leq t$ et $0 \leq j \leq m_i - 1$.

L'exemple 7 illustre comment le théorème 4 est utilisé pour trouver la forme générale d'une solution relation de récurrence homogène linéaire lorsque l'équation caractéristique a plusieurs répétitions les racines.

EXEMPLE 7 Supposons que les racines de l'équation caractéristique d'une relation de récurrence linéaire homogène sont 2, 2, 2, 5, 5 et 9 (c'est-à-dire qu'il y a trois racines, la racine 2 avec la multiplicité trois, la racine 5 avec la multiplicité deux, et la racine 9 avec la multiplicité un). Quelle est la forme du général Solution?

Solution: selon le théorème 4, la forme générale de la solution est

$$(\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1} n + \alpha_{1,2} n^2) 2^n + (\alpha_{2,0} + \alpha_{2,1} n) 5^n + \alpha_{3,0} 9^n.$$

▲

Nous illustrons maintenant l'utilisation du Théorème 4 pour résoudre une relation de récurrence homogène linéaire avec des coefficients constants lorsque l'équation caractéristique a une racine de multiplicité trois.

EXEMPLE 8 Trouver la solution de la relation de récurrence

$$a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}$$

avec les conditions initiales $a_0 = 1$, $a_1 = -2$ et $a_2 = -1$.

Solution: l' équation caractéristique de cette relation de récurrence est

$$r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = 0.$$

Parce que $r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = (r + 1)^3$, il y a une seule racine $r = -1$ de multiplicité trois de l'équation caractéristique. Selon le théorème 4, les solutions de cette relation de récurrence sont du forme

$$a_n = \alpha_{1,0}(-1)^n + \alpha_{1,1} n (-1)^n + \alpha_{1,2} n^2 (-1)^n.$$

Pour trouver les constantes $\alpha_{1,0}$, $\alpha_{1,1}$ et $\alpha_{1,2}$, utilisez les conditions initiales. Cela donne

$$a_0 = 1 = \alpha_{1,0},$$

$$a_1 = -2 = -\alpha_{1,0} - \alpha_{1,1} - \alpha_{1,2},$$

$$a_2 = -1 = \alpha_{1,0} + 2\alpha_{1,1} + 4\alpha_{1,2}.$$

La solution simultanée de ces trois équations est $\alpha_{1,0} = 1$, $\alpha_{1,1} = 3$ et $\alpha_{1,2} = -2$.
Par conséquent, la solution unique à cette relation de récurrence et aux conditions initiales données est la séquence $\{a_n\}$ avec

$$a_n = (1 + 3n - 2n^2)(-1)^n.$$

▲

Relations de récurrence linéaire non homogène à coefficients constants

Nous avons vu comment résoudre des relations de récurrence homogènes linéaires avec des coefficients constants. Existe-t-il une technique relativement simple pour résoudre une récurrence linéaire, mais pas homogène relation avec des coefficients constants, tels que $a_n = 3a_{n-1} + 2n$? Nous verrons que la réponse est oui pour certaines familles de telles relations de récurrence.

La relation de récurrence $a_n = 3a_{n-1} + 2n$ est un exemple de **linéaire non homogène relation de récurrence à coefficients constants**, c'est-à-dire une relation de récurrence de la forme

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n),$$

où $c_1, c_2, \ldots, c_k$ sont des nombres réels et $F(n)$ est une fonction non identique à zéro selon uniquement sur n. La relation de récurrence

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

est appelée la **relation de récurrence homogène associée**. Il joue un rôle important dans solution de la relation de récurrence non homogène.

EXEMPLE 9 Chacune des relations de récurrence $a_n = a_{n-1} + 2^n$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + n^2 + n + 1$, $a_n = 3a_{n-1} + n3^n$, et $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + n!$ est une récurrence linéaire non homogène avec des coefficients constants. Les relations de récurrence homogènes linéaires associées sont $a_n = a_{n-1}$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $a_n = 3a_{n-1}$, et $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$, respectivement. ▲

Le fait clé des relations de récurrence non homogènes linéaires à coefficients constants est que chaque solution est la somme d'une solution particulière et d'une solution du linéaire associé relation de récurrence homogène, comme le montre le théorème 5.

THÉORÈME 5 Si $\{a_n^{(p)}\}$ est une solution particulière de la relation de récurrence linéaire non homogène avec coefficients constants

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n),$$

alors chaque solution est de la forme $\{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$, où $\{a_n^{(h)}\}$ est une solution des associés relation de récurrence homogène

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}.$$

Preuve: parce que $\{a_n^{(p)}\}$ est une solution particulière de la relation de récurrence non homogène, nous sache que

$$a_n^{(p)} = c_1 a_{n-1}^{(p)} + c_2 a_{n-2}^{(p)} + \cdots + c_k a_{n-k}^{(p)} + F(n).$$

Supposons maintenant que $\{b_n\}$ est une deuxième solution de la relation de récurrence non homogène, de sorte que

$$b_n = c_1 b_{n-1} + c_2 b_{n-2} + \cdots + c_k b_{n-k} + F(n).$$

La soustraction de la première de ces deux équations à la seconde montre que

$$b_n - a_n^{(p)} = c_1 (b_{n-1} - a_{n-1}^{(p)}) + c_2 (b_{n-2} - a_{n-2}^{(p)}) + \cdots + c_k (b_{n-k} - a_{n-k}^{(p)}).$$

Il s'ensuit que $\{b_n - a_n^p\}$ est une solution de la récurrence linéaire homogène associée, dis, $\{a_n^{(h)}\}$. Par conséquent, $b_n = a_n^{(p)} + a_n^{(h)}$ pour tous n.

Par le théorème 5, nous voyons que la clé pour résoudre les relations de récurrence non homogènes avec coefficients constants trouve une solution particulière. Ensuite, chaque solution est une somme de cette solution

et une solution de la relation de récurrence homogène associée. Bien qu'il n'y ait pas de méthode pour trouver une telle solution qui fonctionne pour chaque fonction $F(n)$, il existe des techniques qui fonctionnent pour certains types de fonctions $F(n)$, comme les polynômes et les puissances des constantes. C'est illustré dans les exemples 10 et 11.

EXEMPLE 10 Trouver toutes les solutions de la relation de récurrence $a_n = 3a_{n-1} + 2n$. Quelle est la solution avec $un_1 = 3$?

Solution: Pour résoudre cette relation de récurrence linéaire non homogène à coefficients constants, nous besoin de résoudre son équation homogène linéaire associée et de trouver une solution particulière pour le étant donné une équation non homogène. L'équation homogène linéaire associée est $a_n = 3a_{n-1}$. Ses solutions sont $un_n^{(h)} = \alpha 3^n$, où α est une constante.

Nous trouvons maintenant une solution particulière. Parce que $F(n) = 2n$ est un polynôme en n de degré un, une solution d'essai raisonnable est une fonction linéaire dans n, disons $p_n = cn + d$, où c et d sont constantes. Pour déterminer s'il existe des solutions de cette forme, supposons que $p_n = cn + d$ est une telle solution. Alors l'équation $a_n = 3a_{n-1} + 2n$ devient $cn + d = 3(c(n-1) + d) + 2n$.

Simplifier et combiner des termes similaires donne $(2 + 2c)n + (2d - 3c) = 0$. Il s'ensuit que $cn + d$ est une solution si et seulement si $2 + 2c = 0$ et $2d - 3c = 0$. Cela montre que $cn + d$ est une solution si et seulement si $c = -1$ et $d = -3/2$. Par conséquent, $un^{(p)}_n = -n - 3/2$ est une solution particulière.

Selon le théorème 5, toutes les solutions sont de la forme

$$a_n = a^{(p)}_n + a^{(h)}_n = -n - \frac{3}{2} + \alpha \cdot 3^n,$$

où α est une constante.

Pour trouver la solution avec $un_1 = 3$, let $n = 1$ dans la formule que nous avons obtenu pour le grand Solution. Nous constatons que $3 = -1$ à $3/2 + 3\alpha$, ce qui implique que $\alpha = 11/6$. La solution que nous recherchons est $un_n = -n - 3/2 + (\text{onze}/6)3^n$. ▲

EXEMPLE 11 Trouver toutes les solutions de la relation de récurrence

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 7^n.$$

Solution: Il s'agit d'une relation de récurrence linéaire non homogène. Les solutions de ses associés relation de récurrence homogène

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$$

sont $un^{(h)}_n = \alpha_1 \cdot 3^n + \alpha_2 \cdot 2^n$, où α_1 et α_2 sont des constantes. Parce que $F(n) = 7^n$, un motif-solution d'essai efficace est $un^{(p)}_n = C \cdot 7^n$, où C est une constante. En remplaçant les termes de cette la suite dans la relation de récurrence implique que $C \cdot 7^n = 5C \cdot 7^{n-1} - 6C \cdot 7^{n-2} + 7^n$. Affacturage sur 7^{n-2}, cette équation devient $49C = 35C - 6C + 49$, ce qui implique que $20C = 49$, ou que $C = 49/20$. Par conséquent, $un^{(p)}_n = (49/20)7^n$ est une solution particulière. Selon le théorème 5, toutes les solutions sont de la forme

$$un_n = \alpha_1 \cdot 3^n + \alpha_2 \cdot 2^n + (49/\text{vingt})7^n.$$ ▲

Dans les exemples 10 et 11, nous avons fait une supposition éclairée qu'il existe des solutions d'un forme. Dans les deux cas, nous avons pu trouver des solutions particulières. Ce n'était pas un accident. N'importe quand $F(n)$ est le produit d'un polynôme en n et la n ème puissance d'une constante, on sait exactement forme une solution particulière a, comme indiqué dans le théorème 6. Nous laissons la preuve du théorème 6 comme Exercice 52.

THÉORÈME 6 Supposons que $\{a_n\}$ satisfait la relation de récurrence linéaire non homogène

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n),$$

où $c_1, c_2, \ldots, c_k$ sont des nombres réels, et

$$F(n) = (b_t n^t + b_{t-1} n^{t-1} + \cdots + b_1 n + b_0) s^n,$$

où $b_0, b_1, \ldots, b_t$ et s sont des nombres réels. Lorsque s n'est pas une racine de l'équation caractéristique de la relation de récurrence homogène linéaire associée, il existe une solution particulière de la forme

$$(p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + \cdots + p_1 n + p_0) s^n.$$

Lorsque s est une racine de cette équation caractéristique et que sa multiplicité est m, il y a un solution du formulaire

$$n^m (p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + \cdots + p_1 n + p_0) s^n.$$

Notez que dans le cas où s est une racine de multiplicité m de l'équation caractéristique de la relation de récurrence homogène linéaire associée, le facteur n^m garantit que la proposition une solution particulière ne sera pas déjà une solution de la récurrence homogène linéaire associée relation. Nous fournissons ensuite l'exemple 12 pour illustrer la forme d'une solution particulière fournie par Théorème 6.

EXEMPLE 12 Quelle forme donne une solution particulière de la relation de récurrence linéaire non homogène $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + F(n)$ ont quand $F(n) = 3^n$, $F(n) = n3^n$, $F(n) = n^2 2^n$ et $F(n) = (n^2 + 1)3^n$?

Solution: La relation de récurrence homogène linéaire associée est $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$. Ses l'équation caractéristique, $r^2 - 6r + 9 = (r - 3)^2 = 0$, a une racine unique, 3, de multiplicité deux. Appliquer le théorème 6, avec $F(n)$ de la forme $P(n)s^n$, où $P(n)$ est un polynôme et s est un constante, nous devons nous demander si s est une racine de cette équation caractéristique.

Parce que $s = 3$ est une racine avec multiplicité $m = 2$ mais $s = 2$ n'est pas une racine, le théorème 6 nous dit que une solution particulière a la forme $p_0 n^2 3^n$ si $F(n) = 3^n$, la forme $n^2(p_1 n + p_0)3^n$ si $F(n) = n3^n$, la forme $(p_2 n^2 + p_1 n + p_0)2^n$ si $F(n) = n^2 2^n$, et la forme $n^2(p_2 n^2 + p_1 n + p_0)3^n$ si $F(n) = (n^2 + 1)3^n$. ▲

Il faut être prudent lorsque $s = 1$ lors de la résolution des relations de récurrence du type couvert par Théorème 6. En particulier, pour appliquer ce théorème avec $F(n) = b_t n^t + b_{t-1} n^{t-1} + \cdots + b_1 n + b_0$, le paramètre s prend la valeur $s = 1$ (même si le terme 1^n n'apparaît pas explicitement). Par le théorème, la forme de la solution dépend alors de savoir si 1 est une racine du caractère-équation iste de la relation de récurrence homogène linéaire associée. Ceci est illustré dans Exemple 13, qui montre comment le théorème 6 peut être utilisé pour trouver une formule pour la somme du premier n entiers positifs.

EXEMPLE 13 Soit a_n la somme des n premiers entiers positifs, de sorte que

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} k.$$

Notez que a_n satisfait la relation de récurrence linéaire non homogène

$$a_n = a_{n-1} + n.$$

(Pour obtenir un_n, la somme des premiers n des nombres entiers positifs, à partir d' un_{n-1}, la somme de la première n - 1 entiers positifs, nous ajoutons n.) Notez que la condition initiale est $un_1 = 1$.

La relation de récurrence homogène linéaire associée pour a_n est

$$a_n = a_{n-1}.$$

Les solutions de cette relation de récurrence homogène sont données par $un_n^{(h)} = c(1)^n = c$, où c est une constante. Pour trouver toutes les solutions d' $un_n = a_{n-1} + n$, nous avons besoin de trouver un seul notamular solution. Par le théorème 6, car $F(n) = n = n \cdot (1)^n$ et $s = 1$ est une racine de degré un de l'équation caractéristique de la relation de récurrence homogène linéaire associée, il existe un solution particulière de la forme $n(p_1 n + p_0) = p_1 n^2 + p_0 n$.

L'insertion de ceci dans la relation de récurrence donne $p_1 n^2 + p_0 n = p_1 (n-1)^2 + p_0 (n-1) + n$. En simplifiant, nous voyons que $n(2p_1 - 1) + (p_0 - p_1) = 0$, ce qui signifie que $2p_1 - 1 = 0$ et $p_0 - p_1 = 0$, donc $p_0 = p_1 = 1/2$. Par conséquent,

$$une_n^{(p)} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

est une solution particulière. Par conséquent, toutes les solutions de la relation de récurrence d'origine $a_n = a_{n-1} + n$ sont donné par $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = C + n(n+1)/2$. Comme $un_1 = 1$, on a $1 = a_1 = c + 1 \cdot 2/2 = c + 1$, donc $c = 0$. Il s'ensuit que $a_n = n(n+1)/2$. (Il s'agit de la même formule donnée dans le tableau 2 de Section 2.4 et dérivée précédemment.) ▲

Des exercices

1. Déterminer lesquels sont récurrents homogènes linéaires relations de référence à coefficients constants. Trouvez également le degré de ceux qui le sont.

a) $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} + 5a_{n-3}$
b) $a_n = 2na_{n-1} + a_{n-2}$
c) $a_n = a_{n-1} + a_{n-4}$
d) $a_n = a_{n-1} + 2$
e) $a_n = a^2_{n-1} + a_{n-2}$
f) $a_n = a_{n-2}$
g) $a_n = a_{n-1} + n$

2. Déterminer lesquels sont récurrents linéaires homogènes relations de référence à coefficients constants. Trouvez également le degré de ceux qui le sont.

a) $a_n = 3a_{n-2}$
b) $a_n = 3$
c) $a_n = a^2_{n-1}$
d) $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-3}$
e) $a_n = a_{n-1}/n$
f) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + n + 3$
g) $a_n = 4a_{n-2} + 5a_{n-4} + 9a_{n-7}$

3. Résolvez ces relations de récurrence avec le rapport initial conditions données.

a) $a_n = 2a_{n-1}$ pour $n \geq 1$, $a_0 = 3$
b) $a_n = a_{n-1}$ pour $n \geq 1$, $a_0 = 2$
c) $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ pour $n \geq 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$
d) $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ pour $n \geq 2$, $a_0 = 6$, $a_1 = 8$
e) $a_n = -4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ pour $n \geq 2$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$
f) $a_n = 4a_{n-2}$ pour $n \geq 2$, $a_0 = 0$, $a_1 = 4$
g) $a_n = a_{n-2}/4$ pour $n \geq 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$

4. Résolvez ces relations de récurrence avec le rapport initial conditions données.

a) $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$ pour $n \geq 2$, $a_0 = 3$, $a_1 = 6$
b) $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2}$ pour $n \geq 2$, $a_0 = 2$, $a_1 = 1$
c) $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2}$ pour $n \geq 2$, $a_0 = 4$, $a_1 = 10$
d) $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ pour $n \geq 2$, $a_0 = 4$, $a_1 = 1$
e) $a_n = a_{n-2}$ pour $n \geq 2$, $a_0 = 5$, $a_1 = -1$
f) $a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ pour $n \geq 2$, $a_0 = 3$, $a_1 = -3$
g) $a_{n+2} = -4a_{n+1} + 5a_n$ pour $n \geq 0$, $a_0 = 2$, $a_1 = 8$

5. Combien de différents messages peuvent être transmis en n microsecondes en utilisant les deux signaux décrits dans l'exercice 19 à la section 8.1?

6. Combien de messages différents peuvent être transmis en n microsecondes utilisant trois signaux différents si un signal nécessite 1 microseconde pour la transmission, les deux autres signaux nals nécessitent 2 microsecondes chacun pour la transmission, et un signal dans un message est immédiatement suivi par le suivant signal?

7. De combien de façons un damier rectangulaire $2 \times n$ être carrelé en utilisant 1×2 et 2×2 pièces?

8. Un modèle pour le nombre de homards capturés par an est basé sur l'hypothèse que le nombre de homards capturés en un an est la moyenne du nombre de captures les deux années précédentes.

a) Trouvez une relation de récurrence pour $\{L_n\}$, où L_n est le nombre de homards capturés au cours de l'année n, somme pour ce modèle.

b) Trouver L_n si 100 000 homards ont été capturés la première année et 300 000 ont été capturés au cours de l'année 2.

9. Un dépôt de 100 000 $ est versé à un fonds d'investissement à le début d'une année. Le dernier jour de chaque année deux des dividendes sont attribués. Le premier dividende représente 20% du montant dans le compte au cours de cette année. La deuxième division dend est de 45% du montant du compte dans le précédent année.

a) Trouvez une relation de récurrence pour $\{P_n\}$, où P_n est le montant dans le compte à la fin de n années s'il n'y a pas d'argent est jamais retiré.

b) Quel est le montant du compte après n années s'il n'y a pas d'argent a été retiré?

∗ **10.** Prouver le théorème 2.

11. Les **nombres de Lucas** satisfont la relation de récurrence

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2},$$

et les conditions initiales $L_0 = 2$ et $L_1 = 1$.

a) Montrer que $L_n = f_{n-1} + f_{n+1}$ pour $n = 2, 3, ...,$ où f_n est le n ème nombre de Fibonacci.

b) Trouvez une formule explicite pour les nombres de Lucas.

12. Trouver la solution à $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$ pour $n = 3, 4, 5, ...,$ avec $un_0 = 3$, $un_1 = 6$ et $un_2 = 0$.

13. Trouver la solution à $a_n = 7a_{n-2} + 6a_{n-3}$ avec $un_0 = 9$, $a_1 = 10$ et $a_2 = 32$.

14. Trouver la solution à $a_n = 5a_{n-2} - 4a_{n-4}$ avec $un_0 = 3$, $a_1 = 2$, $a_2 = 6$ et $a_3 = 8$.

15. Trouver la solution à $a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2} - 6a_{n-3}$ avec $a_0 = 7$, $a_1 = -4$ et $a_2 = 8$.

∗ **16.** Prouver le théorème 3.

17. Prouver cette identité en rapport avec les numéros de Fibonacci et les coefficients binomiaux:

$$f_{n+1} = C(n, 0) + C(n-1, 1) + \cdots + C(n-k, k),$$

où n est un entier positif et $k = \lfloor n/2 \rfloor$. [*Indice:* laissez $a_n = C(n, 0) + C(n-1, 1) + \cdots + C(n-k, k)$. Spectacle que la séquence $\{a_n\}$ satisfait la même récurrence et conditions initiales satisfaites par la séquence de Numéros de Fibonacci.]

18. Résoudre la relation de récurrence $a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3}$ avec $un_0 = -5$, $un_1 = 4$ et $un_2 = 88$.

19. Résoudre la relation de récurrence $a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - un_{n-3}$ avec $un_0 = 5$, $un_1 = -9$ et $un_2 = 15$.

20. Trouver la forme générale des solutions de la récurrence relation $a_n = 8a_{n-2} - 16a_{n-4}$.

21. Quelle est la forme générale des solutions d'un homo- relation de récidive génique si son équation caractéristique a les racines 1, 1, 1, 1, −2, −2, −2, 3, 3, −4?

22. Quelle est la forme générale des solutions d'un homo- relation de récidive génique si son équation caractéristique a les racines -1, -1, -1, 2, 2, 5, 5, 7?

23. Considérons la relation de récurrence linéaire non homogène $a_n = 3a_{n-1} + 2^n$.

a) Montrer que $a_n = -2^{n+1}$ est une solution à cette récurrence relation.

b) Utilisez le théorème 5 pour trouver toutes les solutions à cette récurrence relation.

c) Trouvez la solution avec $un_0 = 1$.

24. Considérons la relation de récurrence linéaire non homogène $a_n = 2a_{n-1} + 2^n$.

a) Montrer que $a_n = n2^n$ est une solution à cette récurrence relation.

b) Utilisez le théorème 5 pour trouver toutes les solutions à cette récurrence relation.

c) Trouvez la solution avec $un_0 = 2$.

25. a) Déterminer les valeurs des constantes A et B telles que $a_n = An + B$ est une solution de relation de récurrence $a_n = 2a_{n-1} + n + 5$.

b) Utilisez le théorème 5 pour trouver toutes les solutions à cette récurrence relation.

c) Trouver la solution de cette relation de récurrence avec $a_0 = 4$.

26. Quelle est la forme générale de la société particulière solution garantie par le théorème 6 de la relation de récurrence linéaire non homogène $a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3} + F(n)$ si

a) $F(n) = n^2$? **b)** $F(n) = 2^n$?
c) $F(n) = n2^n$? **d)** $F(n) = (-2)^n$?
e) $F(n) = n^22^n$? **f)** $F(n) = n^3(-2)^n$?
g) $F(n) = 3$?

27. Quelle est la forme générale de la solution particulière garantie teed d'exister par le théorème 6 de la nonhomogène linéaire relation de récurrence $a_n = 8a_{n-2} - 16a_{n-4} + F(n)$ si

a) $F(n) = n^3$? **b)** $F(n) = (-2)^n$?
c) $F(n) = n2^n$? **d)** $F(n) = n^24^n$?
e) $F(n) = (n^2 - 2)(-2)^n$? **f)** $F(n) = n^42^n$?
g) $F(n) = 2$?

28. a) Trouver toutes les solutions de la relation de récurrence $a_n = 2a_{n-1} + 2n^2$.

b) Trouver la solution de la relation de récurrence dans la partie (a) avec la condition initiale $a_1 = 4$.

29. a) Trouver toutes les solutions de la relation de récurrence $a_n = 2a_{n-1} + 3^n$.

b) Trouver la solution de la relation de récurrence dans la partie (a) avec la condition initiale $a_1 = 5$.

30. a) Trouver toutes les solutions de la relation de récurrence $a_n = -5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 42 \cdot 4^n$.

b) Trouver la solution de cette relation de récurrence avec $un_1 = 56$ et $a_2 = 278$.

31. Trouver toutes les solutions de la relation de récurrence $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 2^n + 3n$. [*Astuce:* recherchez un particulier solution de la forme $qn2^n + p_1n + p_2$, où q, p_1 et p_2 sont des constantes.]

32. Trouver la solution de la relation de récurrence $a_n = 2a_{n-1} + 3 \cdot 2^n$.

33. Trouver toutes les solutions de la relation de récurrence $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + (n+1)2^n$.

34. Trouver toutes les solutions de la relation de récurrence $a_n =$ $7a_{n-1} - 16a_{n-2} + 12a_{n-3} + n4^n$ avec $a_0 = -2$, $a_1 = 0$ et $a_2 = 5$.

35. Trouver la solution de la relation de récurrence $a_n =$ $4a_{n-1} - 3a_{n-2} + 2^n + n + 3$ avec $un_0 = 1$ et $un_1 = 4$.

36. Soit a_n la somme des n premiers carrés parfaits, qui est, $a_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$. Montrez que la séquence $\{a_n\}$ satisfie la relation de récurrence linéaire non homogène $a_n = a_{n-1} + n^2$ et la condition initiale $a_1 = 1$. Utilisez

Théorème 6 pour déterminer une formule pour un_n en résolvant ce Relation réccurente.

37. Soit a_n la somme des n premiers nombres triangulaires, c'est-à-dire $a_n = \sum_{k=1}^{n} t_k$, où $t_k = k(k+1)/2$. Montrer que $\{a_n\}$ satisfait la relation de récurrence linéaire non homogène $a_n = a_{n-1} + n(n+1)/2$ et la condition initiale $a_1 = 1$.

Utilisez le théorème 6 pour déterminer une formule pour un_n en résolvant cette relation de récurrence.

38. a) Trouver les racines caractéristiques de l'homo- relation de récidive génique $a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2}$. [*Remarque:* ce sont des nombres complexes.]

b) Trouver la solution de la relation de récurrence dans la partie (a) avec $un_0 = 1$ et $un_1 = 2$.

∗ **39. a)** Trouver les racines caractéristiques de l'homogé-

relation de récurrence veineuse $a_n = a_{n-4}$. [*Remarque:* ces inclure des nombres complexes.]

b) Trouver la solution de la relation de récurrence dans la partie (a) avec $un_0 = 1$, $un_1 = 0$, $un_2 = -1$ et $un_3 = 1$.

∗ **40.** Résoudre les relations de récurrence simultanées

$$a_n = 3a_{n-1} + 2b_{n-1}$$

$$b_n = a_{n-1} + 2b_{n-1}$$

avec $a_0 = 1$ et $b_0 = 2$.

∗ **41. a)** Utilisez la formule trouvée dans l'exemple 4 pour f_n, le n e

Nombre de Fibonacci, pour montrer que f_n est l'entier le plus proche de

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

b) Déterminer pour lequel nf_n est supérieur à

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

et pour lequel nf_n est inférieur à

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

42. Montrer que si $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $a_0 = s$ et $a_1 = t$, où s et t sont des constantes, alors $a_n = sf_{n-1} + tf_n$ pour tous les entiers positifs n.

43. Exprimer la solution du linéaire non homogène relation de récurrence $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 1$ pour $n \geq 2$ où $un_0 = 0$ et $un_1 = 1$ en termes de nombre de Fibonacci bers. [*Astuce:* Soit $b_n = a_n + 1$ et appliquez l'exercice 42 au séquence b_n.]

∗ **44.** (*Algèbre linéaire requise*) Soit $\mathbf{A}_n$ la matrice $n \times n$

avec 2 sur sa diagonale principale, 1 dans toutes les positions à côté d'un élément diagonal, et 0 partout ailleurs. Trouver un récidiviste relation de référence pour d_n, le déterminant de $\mathbf{A}_n$. Résolvez ceci relation de récurrence pour trouver une formule pour d_n.

45. Supposons que chaque paire d'une espèce génétiquement modifiée de lapins laissés sur une île produit deux nouvelles paires de lapins mors à l'âge de 1 mois et six nouvelles paires de lapins à l'âge de 2 mois et chaque mois par la suite. Aucun de les lapins meurent ou quittent l'île.

a) Trouvez une relation de récurrence pour le nombre de paires de lapins sur l'île n mois après une paire de nouveau-nés est laissé sur l'île.

b) En résolvant la relation de récurrence en (a), déterminez le nombre de paires de lapins sur l'île n mois après qu'une paire est restée sur l'île.

46. Supposons qu'il y ait initialement deux chèvres sur une île. Le nombre de chèvres sur l'île double chaque année de reproduction naturelle, et certaines chèvres sont ajoutées ou retiré chaque année.

a) Construire une relation de récurrence pour le nombre de chèvres sur l'île au début de la n ième année, en supposant que chaque année, 100 chèvres supplémentaires sont mettre sur l'île.

b) Résoudre la relation de récurrence de la partie (a) pour trouver le nombre de chèvres sur l'île au début du n ème année.

c) Construire une relation de récurrence pour le nombre de chèvres sur l'île au début de la n ième année, en supposant que n chèvres sont enlevées au cours de la n e année pour chaque $n \geq 3$.

d) Résoudre la relation de récurrence dans la partie (c) pour le nombre de chèvres sur l'île au début de la n ème année.

47. Un nouvel employé dans une nouvelle société de logiciels passionnante commence avec un salaire de 50 000 $ et est promis qu'au fin de chaque année, son salaire sera le double de son l'année précédente, avec une augmentation supplémentaire de 10 000 $ chaque année, elle fait partie de l'entreprise.

a) Construire une relation de récurrence pour son salaire pour elle n e année d'emploi.

b) Résoudre cette relation de récurrence pour trouver son salaire n e année d'emploi.

Certaines relations de récurrence linéaire qui n'ont pas de co- les efficients peuvent être systématiquement résolus. C'est le cas pour relations de récurrence de la forme $f(n)a_n = g(n)a_{n-1} + h(n)$. Les exercices 48 à 50 illustrent cela.

∗ **48. a)** Montrer que la relation de récurrence

$$f(n)a_n = g(n)a_{n-1} + h(n),$$

pour $n \geq 1$, et avec $un_0 = C$, peut être réduit à un relation d'occurrence de la forme

$$b_n = b_{n-1} + Q(n)h(n),$$

où $b_n = g(n+1)\,Q(n+1)\,a_n$, avec

$Q(n) = (f(1)\,f(2)\cdots f(n-1))\,/\,(g(1)\,g(2)\cdots g(n))$.

b) Utilisez la partie (a) pour résoudre la relation de récurrence d'origine obtenir

$$a_n = \frac{C + \sum_{i=1}^{n} Q(i)\,h(i)}{g(n+1)\,Q(n+1)}.$$

*** 49.** Utilisez l'exercice 48 pour résoudre la relation de récurrence $(n+1)\,a_n = (n+3)\,a_{n-1} + n$, pour $n \geq 1$, avec $un_0 = 1$.

50. On peut montrer que C_n, le nombre moyen de comparisons faits par l'algorithme de tri rapide (décrit dans préambule de l'exercice 50 de la section 5.4), lors du tri n éléments dans un ordre aléatoire, satisfait la relation de récurrence

$$C_n = n + 1 + \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} C_k$$

pour $n = 1, 2, \ldots$, avec condition initiale $C_0 = 0$.

a) Montrer que $\{C_n\}$ satisfait également la relation de récurrence $nC_n = (n+1)\,C_{n-1} + 2n$ pour $n = 1, 2, \ldots$.

b) Utilisez l'exercice 48 pour résoudre la relation de récurrence dans partie (a) pour trouver une formule explicite pour C_n.

**** 51.** Prouver le théorème 4.

**** 52.** Prouver le théorème 6.

53. Résoudre la relation de récurrence $T(n) = nT^2(n/2)$ avec l'ini- condition initiale $T(1) = 6$ lorsque $n = 2^k$ pour certains ger k. [*Indice:* Soit $n = 2^k$ puis faire la substitution $a_k = \log T(2^k)$ pour obtenir une réponse linéaire non homogène relation de survenue.]

Algorithmes de division et de conquête et relations de récurrence

introduction

De nombreux algorithmes récursifs prennent un problème avec une entrée donnée et le divisent en un ou plusieurs petits problèmes. Cette réduction est appliquée successivement jusqu'à ce que les solutions des plus petits les lems peuvent être trouvés rapidement. Par exemple, nous effectuons une recherche binaire en réduisant la recherche de un élément dans une liste à la recherche de cet élément dans une liste moitié moins longue. Nous postulons successivement cette réduction jusqu'à ce qu'il reste un élément. Lorsque nous trions une liste d'entiers à l'aide du tri par fusion, nous divisez la liste en deux moitiés de taille égale et triez chaque moitié séparément Nous fusionnons ensuite les deux moitiés triées. Un autre exemple de ce type d'algorithme récursif est une procédure de multiplication entiers qui réduit le problème de la multiplication de deux entiers à trois multiplications de paires d'entiers avec deux fois moins de bits. Cette réduction est appliquée successivement jusqu'à ce que des entiers avec un bit sont obtenus. Ces procédures suivent un paradigme algorithmique important connu comme **diviser** pour **mieux régner** , et sont appelés **algorithmes de diviser pour mieux conquérir** , car ils *divisent* un problème dans une ou plusieurs instances du même problème de plus petite taille et ils *conquièrent* le problème en utilisant les solutions des petits problèmes pour trouver une solution de l'original problème, peut-être avec un travail supplémentaire.

« Divide et impera» (traduction: *«Diviser et conquérir »* - Jules César

Dans cette section, nous montrerons comment les relations de récurrence peuvent être utilisées pour analyser complexité opérationnelle des algorithmes de division et de conquête. Nous utiliserons ces relations de récurrence d'estimer le nombre d'opérations utilisées par de nombreux algorithmes de division et de conquête différents, dont plusieurs que nous introduisons dans cette section.

Diviser et conquérir les relations de récurrence

Supposons qu'un algorithme récursif divise un problème de taille n en *un* sous - problème, où chacun le sous-problème est de taille n/b (pour simplifier, supposons que n est un multiple de b ; en réalité, le plus petit les problèmes sont souvent de taille égale aux entiers les plus proches, inférieurs ou égaux ou supérieurs supérieur ou égal à, n/b). Supposons également qu'un total de $g(n)$ opérations supplémentaires soient nécessaires étape de conquête de l'algorithme pour combiner les solutions des sous-problèmes en une solution de le problème d'origine. Alors, si $f(n)$ représente le nombre d'opérations nécessaires pour résoudre le problème de taille n , il s'ensuit que f satisfait la relation de récurrence

$$f(n) = af(n/b) + g(n).$$

C'est ce qu'on appelle une **relation de récurrence diviser pour mieux régner** .

Nous allons d'abord mettre en place les relations de récurrence diviser pour mieux régner qui peuvent être utilisées pour étudier la complexité de certains algorithmes importants. Ensuite, nous montrerons comment utiliser ces divisions et conquérir les relations de récurrence pour estimer la complexité de ces algorithmes.

EXEMPLE 1 **Recherche binaire** Nous avons introduit un algorithme de recherche binaire dans la section 3.1.Cette recherche binaire l'algorithme réduit la recherche d'un élément dans une séquence de recherche de taille n à la recherche binaire pour cet élément dans une séquence de recherche de taille $n / 2$, lorsque n est pair. (D'où le problème de la taille n a été réduit à *un* problème de taille $n / 2$.) Deux comparaisons sont nécessaires pour mettre en œuvre ce réduction (l'une pour déterminer la moitié de la liste à utiliser et l'autre pour déterminer si termes de la liste restent). Par conséquent, si $f(n)$ est le nombre de comparaisons nécessaires pour rechercher un élément dans une séquence de recherche de taille n , puis

$$f(n) = f(n/2) + 2$$

quand n est pair. ▲

EXEMPLE 2 **Recherche du maximum et du minimum d'une séquence** Considérez l'algorithme suivant pour localiser les éléments maximum et minimum d'une séquence $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Si $n = 1$, alors a_1 est le maximum et le minimum. Si $n > 1$, divisez la séquence en deux séquences, soit où les deux ont le même nombre d'éléments ou lorsqu'une des séquences a un élément de plus que l'autre. Le problème est réduit à trouver le maximum et le minimum de chacun des deux séquences plus petites. La solution au problème d'origine résulte de la comparaison des des maxima et des minima séparés des deux séquences plus petites pour obtenir le maximum global et le minimum.

Soit $f(n)$ le nombre total de comparaisons nécessaires pour trouver le maximum et le minimum éléments de la séquence avec n éléments. Nous avons montré qu'un problème de taille n peut être réduit en deux problèmes de taille $n / 2$, quand n est pair, en utilisant deux comparaisons, une pour comparer les maxima des deux séquences et l'autre pour comparer les minima des deux séquences. Cela donne la relation de récurrence

$$f(n) = 2f(n/2) + 2$$

quand n est pair. ▲

EXEMPLE 3 **Tri par** fusion L'algorithme de tri par fusion (présenté à la section 5.4) divise une liste à trier avec n éléments, où n est pair, en deux listes avec $n / 2$ éléments chacune, et utilise moins de n des comparaisons pour fusionner les deux listes triées de $n / 2$ éléments chacune en une seule liste triée. Par conséquent, le nombre de comparaisons utilisées par le tri par fusion pour trier une liste de n éléments est inférieur à $M(n)$, où la fonction $M(n)$ satisfait la relation de récurrence diviser pour mieux régner

$$M(n) = 2M(n/2) + n. \qquad ▲$$

EXEMPLE 4 **Multiplication rapide d'entiers** Étonnamment, il existe des algorithmes plus efficaces que le con- algorithme conventionnel (décrit dans la section 4.2) pour multiplier les entiers. L'un de ces algorithmes, qui utilise une technique de division et de conquête, sera décrite ici. Cette multiplication rapide gorithme procède en divisant chacun de deux entiers à $2n$ bits en deux blocs, chacun avec n bits. Ensuite, la multiplication d'origine est réduite de la multiplication de deux entiers à $2n$ à trois multiplications d' entiers à n bits, plus des décalages et des ajouts.

Supposons que a et b sont des entiers avec des extensions binaires de longueur $2n$ (ajoutez les bits initiaux de zéro dans ces extensions si nécessaire pour leur donner la même longueur). Laisser

$$a = (a_{2n-1} a_{2n-2} \cdots a_1 a_0)_2 \quad \text{et} \quad b = (b_{2n-1} b_{2n-2} \cdots b_1 b_0)_2 .$$

Laisser

$$a = 2^n A_1 + A_0,\ b = 2^n B_1 + B_0,$$

où

$$A_1 = (a_{2n-1} \cdots a_{n+1} a_n)_2, \qquad A_0 = (a_{n-1} \cdots a_1 a_0)_2,$$
$$B_1 = (b_{2n-1} \cdots b_{n+1} b_n)_2, \qquad B_0 = (b_{n-1} \cdots b_1 b_0)_2.$$

L'algorithme de multiplication rapide d'entiers est basé sur le fait que ab peut être réécrit comme

$$ab = (2^{2n} + 2^n) A_1 B_1 + 2^n (A_1 - A_0)(B_0 - B_1) + (2^n + 1) A_0 B_0.$$

Le fait important de cette identité est qu'elle montre que la multiplication de deux $2n$ bits les entiers peuvent être effectués en utilisant trois multiplications d'entiers à n bits, ainsi que des additions, soustractions et décalages. Cela montre que si $f(n)$ est le nombre total d'opérations binaires nécessaires pour multiplier deux entiers à n bits, puis

$$f(2n) = 3f(n) + Cn.$$

Le raisonnement derrière cette équation est le suivant. Les trois multiplications d' entiers à n bits sont effectuée en utilisant des opérations à $3f(n)$ bits. Chacun des ajouts, soustractions et décalages utilise un multiple constant d' opérations à n bits, et Cn représente le nombre total d'opérations binaires utilisées par ces opérations. ▲

EXEMPLE 5 Multiplication matricielle rapide Dans l'exemple 7 de la section 3.3, nous avons montré que la multiplication de deux $n \times n$ matrices utilisant la définition de la multiplication matricielle requise n^3 multiplications et $n^2(n - 1)$ ajouts. Par conséquent, calculer le produit de deux matrices $n \times n$ de cette manière nécessite des opérations $O(n^3)$ (multiplications et additions). Étonnamment, il y a plus efficace algorithmes de division et de conquête pour multiplier deux matrices $n \times n$. Un tel algorithme, inventé par Volker Strassen en 1969, réduit la multiplication de deux $n \times n$ matrices, lorsque n est pair, à sept multiplications de deux $(n/2) \times (n/2)$ matrices et 15 additions de $(n/2) \times (n/2)$ matrices. (Voir [CoLeRiSt09] pour les détails de cet algorithme.) Par conséquent, si $f(n)$ est le nombre d'opérations (multiplications et additions) utilisées, il s'ensuit que

$$f(n) = 7f(n/2) + 15n^2/\text{quatre}$$

quand n est pair. ▲

Comme le montrent les exemples 1 à 5, les relations de récurrence de la forme $f(n) = af(n/b) + g(n)$ apparaissent dans de nombreuses situations différentes. Il est possible de dériver des estimations de la taille des fonctions qui satisfont ces relations de récurrence. Supposons que f satisfait cette relation de récurrence chaque fois que n est divisible par b. Soit $n = b^k$, où k est un entier positif. alors

$$\begin{aligned} f(n) &= af(n/b) + g(n) \\ &= a^2 f(n/b^2) + ag(n/b) + g(n) \\ &= a^3 f(n/b^3) + a^2 g(n/b^2) + ag(n/b) + g(n) \\ &\cdots \\ &= a^k f(n/b^k) + \sum_{j=0}^{k-1} a^j g(n/b^j). \end{aligned}$$

Parce que $n / b^k = 1$, il s'ensuit que

$$f(n) = a^k f(1) + \sum_{j=0}^{k-1} a^j g(n / b^j).$$

Nous pouvons utiliser cette équation pour $f(n)$ pour estimer la taille des fonctions qui satisfont diviserpour mieux régner rapports.

THÉORÈME 1 Soit f une fonction croissante qui satisfait la relation de récurrence

$$f(n) = af(n/b) + c$$

chaque fois que n est divisible par b, où $a \geq 1$, b est un entier supérieur à 1 et c est un positif nombre réel. alors

$$f(n) \text{ est } \begin{cases} O(n^{\log_b a}) & \text{si } a > 1, \\ O(\log n) & \text{si } a = 1. \end{cases}$$

De plus, lorsque $n = b^k$ et $a = 1$, où k est un entier positif,

$$f(n) = C_1 n^{\log_b a} + C_2,$$

où $C_1 = f(1) + c/(a-1)$ et $C_2 = -c/(a-1)$.

Preuve: Soit d'abord $n = b^k$. D'après l'expression de $f(n)$ obtenue dans la discussion précédant la théorème, avec $g(n) = c$, on a

$$f(n) = a^k f(1) + \sum_{j=0}^{k-1} a^j c = a^k f(1) + c \sum_{j=0}^{k-1} a^j.$$

Quand $a = 1$ nous avons

$$f(n) = f(1) + ck.$$

Parce que $n = b^k$, nous avons $k = \log_b n$. Par conséquent,

$$f(n) = f(1) + c \log_b n.$$

Lorsque n n'est pas une puissance de b, nous avons $b^k < n < b^{k+1}$, pour un entier positif k. Parce que f est croissant, il s'ensuit que $f(n) \leq f(b^{k+1}) = f(1) + c(k+1) = (f(1) + c) + ck \leq (f(1) + c) + c \log_b n$. Par conséquent, dans les deux cas, $f(n)$ est $O(\log n)$ lorsque $a = 1$.

Supposons maintenant que $a > 1$. Supposons d'abord que $n = b^k$ où k est un entier positif. Du formule pour la somme des termes d'une progression géométrique (Théorème 1 dans la section 2.4), il suit cette

$$\begin{aligned} f(n) &= a^k f(1) + c(a^k - 1)/(a-1) \\ &= a^k [f(1) + c/(a-1)] - c/(a-1) \\ &= C_1 n^{\log_b a} + C_2, \end{aligned}$$

car $a^k = a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$ (voir exercice 4 à l'annexe 2), où $C_1 = f(1) + c/(a-1)$ et $C_2 = -c/(a-1)$.

Supposons maintenant que n n'est pas une puissance de b. Alors $b^k < n < b^{k+1}$, où k est un négatif entier. Parce que f augmente,

$$f(n) \leq f(b^{k+1}) = C_1 a^{k+1} + C_2$$

$$\leq (C_1 a)\, a^{\log_b n} + C_2$$

$$= (C_1 a)\, n^{\log_b a} + C_2,$$

car $k \leq \log_b n < k + 1$.

Par conséquent, nous avons $f(n)$ est $O(n^{\log_b a})$.

Les exemples 6 à 9 illustrent l'utilisation du théorème 1.

EXEMPLE 6 Soit $f(n) = 5f(n/2) + 3$ et $f(1) = 7$. Trouver $f(2^k)$, où k est un entier positif. Aussi, estimez $f(n)$ si f est une fonction croissante.

Solution: à partir de la preuve du théorème 1, avec $a = 5$, $b = 2$ et $c = 3$, nous voyons que si $n = 2^k$, ensuite

$$f(n) = a^k [f(1) + c/(a-1)] + [-c/(a-1)]$$

$$5 =^k [7 + (3/4)] - 3/4$$

$$5 =^k (31 / \text{quatre}) - 3 / \text{quatre}.$$

De plus, si $f(n)$ augmente, le théorème 1 montre que $f(n)$ est $O(n^{\log_b a}) = O(n^{\log 5})$. ▲

Nous pouvons utiliser le théorème 1 pour estimer la complexité de calcul de la recherche binaire algorithme et l'algorithme donné dans l'exemple 2 pour localiser le minimum et le maximum d'un séquence.

EXEMPLE 7 Donner une estimation big- O du nombre de comparaisons utilisées par une recherche binaire.

Solution: dans l'exemple 1, il a été montré que $f(n) = f(n/2) + 2$ lorsque n est pair, où f est le nombre de comparaisons nécessaires pour effectuer une recherche binaire sur une séquence de taille n. Par conséquent, d'après le théorème 1, il s'ensuit que $f(n)$ est $O(\log n)$. ▲

EXEMPLE 8 Donner une estimation de grand O pour le nombre de comparaisons utilisées pour localiser le maximum et le minimum éléments dans une séquence utilisant l'algorithme donné dans l'exemple 2.

Solution : dans l'exemple 2, nous avons montré que $f(n) = 2f(n/2) + 2$, lorsque n est pair, où f est le nombre de comparaisons nécessaires à cet algorithme. Par conséquent, d'après le théorème 1, il s'ensuit que $f(n)$ est $O(n^{\log 2}) = O(n)$. ▲

Nous énonçons maintenant un théorème plus général et plus compliqué, qui a le théorème 1 comme un cas particulier. Ce théorème (ou des versions plus puissantes, y compris des estimations à gros Thêta) est parfois connu sous le nom de théorème maître car il est utile pour analyser la complexité de de nombreux algorithmes de division et de conquête importants.

THÉORÈME 2 **MASTERTHEOREM** Soit f une fonction croissante qui satisfait la relation de récurrence

$$f(n) = af(n/b) + cn^d$$

chaque fois que $n = b^k$, où k est un entier positif, $a \geq 1$, b est un entier supérieur à 1, et c et d sont des nombres réels avec c positif et d non négatif. alors

$$f(n) \text{ est } \begin{cases} O(n^d) & \text{si } a < b^d, \\ O(n^d \log n) & \text{si } a = b^d, \\ O(n^{\log_b a}) & \text{si } a > b^d. \end{cases}$$

La preuve du théorème 2 est laissée au lecteur dans les exercices 29 à 33.

EXEMPLE 9 **Complexité du tri par fusion** Dans l'exemple 3, nous avons expliqué que le nombre de comparaisons utilisées par le tri par fusion pour trier une liste de n éléments est inférieur à $M(n)$, où $M(n) = 2M(n/2) + n$. Par le théorème maître (Théorème 2), nous trouvons que $M(n)$ est $O(n \log n)$, ce qui correspond à la estimation figurant à la section 5.4. ▲

EXEMPLE 10 Donner une estimation big- O du nombre d'opérations binaires nécessaires pour multiplier deux entiers à n bits en utilisant l'algorithme de multiplication rapide décrit dans l'exemple 4.

Solution: l' exemple 4 montre que $f(n) = 3f(n/2) + Cn$, lorsque n est pair, où $f(n)$ est le nombre d'opérations binaires nécessaires pour multiplier deux entiers à n bits à l'aide de la multiplication rapide algorithme. Par conséquent, du théorème maître (théorème 2), il s'ensuit que $f(n)$ est $O(n^{\log 3})$. Notez que $\log 3 \sim 1.6$. Parce que l'algorithme conventionnel de multiplication utilise le bit $O(n^2)$ opérations, l'algorithme de multiplication rapide est une amélioration substantielle par rapport à la conventionnelle algorithme en termes de complexité temporelle pour des entiers suffisamment grands, y compris de grands entiers qui se produisent dans des applications pratiques. ▲

EXEMPLE 11 Donner une estimation de grand O pour le nombre de multiplications et d'additions nécessaires pour multiplier deux $n \times n$ matrices utilisant l'algorithme de multiplication matricielle mentionné dans l'exemple 5.

Solution: Soit $f(n)$ le nombre d'additions et de multiplications utilisées par l'algorithme mentionné dans l'exemple 5 pour multiplier deux matrices $n \times n$. Nous avons $f(n) = 7f(n/2) + 15n^2/4$, quand n est pair. Par conséquent, à partir du théorème maître (théorème 2), il s'ensuit que $f(n)$ est $O(n^{\log 7})$.

Notez que le journal 7 ∼ 2 . 8. Parce que l'algorithme conventionnel pour multiplier deux matrices $n \times n$ utilise $O(n^3)$ additions et multiplications, il s'ensuit que pour des entiers suffisamment grands n , y compris
En utilisant ceux qui se produisent dans de nombreuses applications pratiques, cet algorithme est nettement plus efficace en complexité temporelle que l'algorithme conventionnel.
▲

LE PROBLÈME DE LA PAIRE LA PLUS PROCHE Nous concluons cette section en introduisant un conquérir l'algorithme de la géométrie informatique, la partie des mathématiques discrètes consacrée à algorithmes qui résolvent les problèmes géométriques.

EXEMPLE 12 **Le** problème de la paire la plus proche Considérons le problème de la détermination de la paire de points la plus proche dans un ensemble de n points $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ dans le plan, où la distance entre deux points (x_i, y_i) et (x_j, y_j) est la distance euclidienne habituelle $\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$. Ce problème se pose dans de nombreuses applications telles que la détermination de la paire d'avions la plus proche dans l'espace altitude particulière gérée par un contrôleur de la circulation aérienne.Comment cette paire de points la plus proche être trouvé de manière efficace?

d_L

d_R

le plus proche
paire

L

R

ré *ré*

Dans cette illustration, le problème de trouver le la paire la plus proche dans un ensemble de 16 points est réduite à deux problèmes pour trouver la paire la plus proche un ensemble de huit points *et* le problème de déterminer s'il y a des points plus proches que $d = \min(d_L, d_R)$ dans la bande de largeur 2 d centrée sur.

FIGURE 1 L'étape récursive de l'algorithme de résolution du problème de la paire la plus proche.

Il a fallu plus de chercheurs de 10 ans pour trouver un algorithme avec $O(n \log n)$ complexité qui localise la paire de points la plus proche parmi n points.

Solution: Pour résoudre ce problème, nous pouvons d'abord déterminer la distance entre chaque paire de points et ensuite trouver la plus petite de ces distances. Cependant, cette approche nécessite $O(n^2)$ calculs de distances et comparaisons car il y a $C(n, 2) = n(n-1)/2$ paires de points. Étonnamment, il existe un élégant algorithme de division et de conquête qui peut résoudre le problème le plus proche. problème de paire pour n points en utilisant $O(n \log n)$ calculs de distances et comparaisons. le l'algorithme que nous décrivons ici est dû à Michael Samos (voir [PrSa85]).

Pour simplifier, nous supposons que $n = 2^k$, où k est un entier positif. (Nous évitons certains considérations techniques nécessaires lorsque n n'est pas une puissance de 2.) Lorsque $n = 2$, nous n'avons que une paire de points; la distance entre ces deux points est la distance minimale. Au début de l'algorithme, nous utilisons le tri par fusion deux fois, une fois pour trier les points dans l'ordre croissant x coordonnées, et une fois pour trier les points par ordre croissant de coordonnées y . Chacun de ces types nécessite des opérations $O(n \log n)$. Nous utiliserons ces listes triées à chaque étape récursive.

La partie récursive de l'algorithme divise le problème en deux sous-problèmes, chacun impliquant moitié moins de points. En utilisant la liste triée des points par leurs coordonnées x , nous construisons un ligne verticale l divisant les n points en deux parties, une partie gauche et une partie droite de taille égale, chacune contenant $n / 2$ points, comme le montre la figure 1. (Si des points tombent sur la ligne de division l , nous divisons les entre les deux parties si nécessaire.) Aux étapes suivantes de la récursivité, nous n'avons pas besoin de trier sur les coordonnées x *à* nouveau, car nous pouvons sélectionner le sous-ensemble trié correspondant de tous les points. Cette sélection est une tâche qui peut être effectuée avec des comparaisons $O(n)$.

Il existe trois possibilités concernant la position des points les plus proches: (1) ils sont tous les deux dans la région gauche L , (2) ils sont tous les deux dans la région droite R , ou (3) un point est dans la région gauche et l'autre est dans la bonne région. Appliquer l'algorithme récursivement pour calculer d_L et d_R , où d_L est la distance minimale entre les points dans la région de gauche et d_R est le minimum distance entre les points dans la bonne région. Soit $d = \min(d_L , d_R)$. Pour réussir à diviser le problème de trouver les deux points les plus proches dans l'ensemble d'origine dans les deux problèmes de trouver le les distances les plus courtes entre les points dans les deux régions séparément, nous devons gérer la conquête partie de l'algorithme, ce qui nécessite que nous considérons le cas où les points les plus proches se trouvent dans différentes régions, qui est, d' un point est en L et l'autre R . Parce qu'il y a une paire de points à la distance d où les deux points se trouvent dans R ou les deux points se trouvent dans L , pour que les points les plus proches se trouvent dans différentes régions exigent qu'elles doivent être distantes de moins de d .

Pour qu'un point dans la région de gauche et un point dans la région de droite se trouvent à une distance inférieure à d écart, ces points doivent se situer dans la bande verticale de largeur $2d$ qui a la ligne l comme centre. (Autrement, la distance entre ces points est supérieure à la différence de leurs coordonnées x , qui dépasse d .) Pour examiner les points dans cette bande, nous trions les points afin qu'ils soient répertoriés dans ordre croissant des coordonnées y , en utilisant la liste triée des points par leurs coordonnées y . À

$d / 2$ $d / 2$ $d / 2$ $d / 2$

$d / 2$

Au plus huit points, dont p ,
peut se trouver dans ou sur le rectangle $2d\ d$
centré sur au plus un
point peut se trouver dans ou sur chacun des
huit ($d / 2$) ($d / 2$) carrés.

$d / 2$

$d / 2$

p

FIGURE 2 montrant qu'il y a au plus sept autres points à considérer pour chacun Pointez dans le Strip.

chaque étape récursive, nous formons un sous-ensemble des points dans la région triés par leurs coordonnées y à partir de l'ensemble déjà trié de tous les points triés par leurs coordonnées y , ce qui peut être fait avec des comparaisons $O(n)$.

En commençant par un point dans la bande avec la plus petite coordonnée y , nous examinons successivement chaque point de la bande, calcul de la distance entre ce point et tous les autres points de la bande qui ont des coordonnées y plus grandes qui pourraient se trouver à une distance inférieure à d de ce point. Notez que pour examiner un point p , il suffit de considérer les distances entre p et les points de l'ensemble qui se situent dans le rectangle de hauteur d et de largeur $2d$ avec p sur sa base et avec des côtés verticaux à distance d de l .

On peut montrer qu'il y a au plus huit points de l'ensemble, y compris p , dans ou sur ce $2d \times d$ rectangle. Pour voir cela, notez qu'il peut y avoir au plus un point dans chacun des huit $d/2 \times d/2$ carrés représentés sur la figure 2. Cela suit parce que les points les plus éloignés peuvent être sur ou à l'intérieur l'un de ces carrés est la longueur diagonale $d /$ 2 (qui peut être trouvé en utilisant le Pythagore théorème), qui est inférieur à d , et chacun de ces carrés $d/2 \times d/2$ se trouve entièrement dans la gauche région ou la bonne région. Cela signifie qu'à ce stade, il nous suffit de comparer au plus sept les distances, les distances entre p et les sept autres points ou moins dans ou sur le rectangle, avec d .

Parce que le nombre total de points dans la bande de largeur $2d$ ne dépasse pas n (le total nombre de points dans l'ensemble), il faut comparer au plus $7n$ distances avec d pour trouver le distance minimale entre les points. Autrement dit, il n'y a que $7n$ distances possibles qui pourraient être moins de d . Par conséquent, une fois que le tri par fusion a été utilisé pour trier les paires selon leur coordonnées x et en fonction de leurs coordonnées y , nous constatons que la fonction croissante $f(n)$ satisfaire la relation de récurrence

$$f(n) = 2f(n/2) + 7n,$$

où $f(2) = 1$, dépasse le nombre de comparaisons nécessaires pour résoudre le problème de la paire la plus proche pour n points. Par le théorème maître (Théorème 2), il s'ensuit que $f(n)$ est $O(n \log n)$. Les deux sortes des points par leurs coordonnées x et par leurs coordonnées y chacun peut être fait en utilisant $O(n \log n)$ comparaisons, en utilisant le tri par fusion, et les sous-ensembles triés de ces coordonnées à chacun des *Les* étapes $O(\log n)$ de l'algorithme peuvent être effectuées en utilisant chacune des comparaisons $O(n)$. Ainsi, nous constatons que le problème de la paire la plus proche peut être résolu en utilisant des comparaisons $O(n \log n)$.

Des exercices

1. Combien de comparaisons sont nécessaires pour une recherche binaire dans un ensemble de 64 éléments?

2. Combien de comparaisons sont nécessaires pour localiser éléments imum et minimum dans une séquence avec 128 éléments utilisant l'algorithme de l'exemple 2?

3. Multipliez $(1110)_2$ et $(1010)_2$ en utilisant la multiplication rapide algorithme de calcul.

4. Exprimez l'algorithme de multiplication rapide en pseudocode.

5. Déterminez une valeur pour la constante C dans l'exemple 4 et l'utiliser pour estimer le nombre d'opérations binaires nécessaires pour multiplier deux entiers 64 bits en utilisant la multiplication rapide algorithme.

6. Combien d'opérations sont nécessaires pour multiplier deux 32×32 matrices utilisant l'algorithme mentionné dans l'exemple 5?

que n est pair et divise la séquence de votes en deux séquences, chacune avec $n/2$ éléments. Notez qu'un le candidat n'aurait pas pu obtenir la majorité des voix sans recueillir la majorité des voix dans au moins un des deux moitiés.]

b) Utilisez le théorème maître pour donner une estimation du grand O pour le nombre de comparaisons nécessaires à l'algorithme vous avez conçu dans la partie (a).

18. Supposons que chaque personne d'un groupe de n personnes vote pour exactement deux personnes d'une liste de candidats pour remplir deux postes au sein d'un comité. Les deux meilleurs finisseurs gagnent tous les deux tant que chacun reçoit plus de $n/2$ voix.

a) Concevoir un algorithme de division et de conquête qui détermine mines si les deux candidats qui ont reçu le la plupart des votes ont chacun reçu au moins $n/2$ votes et, si oui, déterminer qui sont ces deux candidats.

7. Supposons que $f(n) = f(n/3) + 1$ lorsque n est positif entier divisible par 3 et $f(1) = 1$. Trouver

a) $f(3)$. **b)** $f(27)$. **c)** $f(729)$.

8. Supposons que $f(n) = 2f(n/2) + 3$ lorsque n est une posi- entier itif, et $f(1) = 5$. Trouver

a) $f(2)$. **b)** $f(8)$. **c)** $f(64)$. **d)** $f(1024)$.

9. Supposons que $f(n) = f(n/5) + 3n^2$ lorsque n est positif entier divisible par 5 et $f(1) = 4$. Trouver

a) $f(5)$. **b)** $f(125)$. **c)** $f(3125)$.

10. Trouver $f(n)$ lorsque $n = 2^k$, où f satisfait la récurrence relation $f(n) = f(n/2) + 1$ avec $f(1) = 1$.

11. Donnez une estimation de grand O pour la fonction f dans l'exercice 10 si f est une fonction croissante.

12. Trouvez $f(n)$ lorsque $n = 3^k$, où f satisfait la récurrence relation $f(n) = 2f(n/3) + 4$ avec $f(1) = 1$.

13. Donnez une estimation de grand O pour la fonction f dans l'exercice 12 si f est une fonction croissante.

14. Supposons qu'il y ait $n = 2^k$ équipes en élimination tournoi, où il y a $n/2$ matchs au premier tour, avec le $n/2 = 2^{k-1}$ gagnants jouant au deuxième tour, etc. Développer une relation de récurrence pour le nombre de tours dans le tournoi.

15. Combien de tours y a-t-il dans le tournoi décrit dans l'exercice 14 alors qu'il y a 32 équipes?

16. Résoudre la relation de récurrence pour le nombre de tours dans le tournoi décrit dans l'exercice 14.

17. Supposons que les votes de n personnes pour différents candidats dates (où il peut y avoir plus de deux candidats) pour un bureau particulier sont les éléments d'une séquence. Une per- fils remporte l'élection si cette personne reçoit la majorité des les votes.

a) Concevoir un algorithme de division et de conquête qui détermine recherche si un candidat a obtenu la majorité et, si oui, déterminez qui est ce candidat. [*Astuce:* Supposons

b) Utilisez le théorème maître pour donner une estimation du grand O pour le nombre de comparaisons nécessaires à l'algorithme vous avez conçu dans la partie (a).

19. a) Établir une relation de récurrence diviser pour mieux régner pour le nombre de multiplications nécessaires pour calculer x^n, où x est un nombre réel et n est un entier positif, en utilisant l'algorithme récursif de Exercice 26 dans la section 5.4.

b) Utilisez la relation de récurrence que vous avez trouvée dans la partie (a) pour construire une estimation de grand O pour le nombre de tiplications utilisées pour calculer x^n en utilisant le récursif algorithme.

20. a) Établir une relation de récurrence diviser pour mieux régner pour le nombre de multiplications modulaires nécessaires pour calculer un^n **mod** m, où a, m et n sont pos- entiers itifs, en utilisant les algorithmes récursifs de Exemple 4 dans la section 5.4.

b) Utilisez la relation de récurrence que vous avez trouvée dans la partie (a) pour construire une estimation big O du nombre de modules multiplications utilisées pour calculer un^n **mod** m *en* utilisant le algorithme récursif.

21. Supposons que la fonction f satisfasse la relation de récurrence tion $f(n) = 2f(\sqrt{n}) + 1$ chaque fois que n est un carré parfait supérieur à 1 et $f(2) = 1$.

a) Trouvez $f(16)$.

b) Donnez une estimation du grand O pour $f(n)$. [*Astuce:* faites le sous- stitution $m = \log n$.]

22. Supposons que la fonction f satisfasse la récurrence lation $f(n) = 2f(\sqrt{n}) + \log n$ chaque fois que n est parfait carré supérieur à 1 et $f(2) = 1$.

a) Trouvez $f(16)$.

b) Trouvez une estimation du grand O pour $f(n)$. [*Astuce:* faites le sous- stitution $m = \log n$.]

**** 23.** Cet exercice traite du problème de trouver le plus grand somme des termes consécutifs d'une séquence de n nombres réels. Lorsque tous les termes sont positifs, la somme de tous les termes fournit

la réponse, mais la situation est plus compliquée lorsque certains termes sont négatifs. Par exemple, la somme maximale de termes consécutifs de la séquence $-2, 3, -1, 6, -7, 4$ est $3 + (-1) + 6 = 8$. (Cet exercice est basé sur [Be86].) Rappelons que dans l'exercice 56 de la section 8.1, nous avons développé un algorithme de programmation dynamique pour résoudre ce lem. Ici, nous examinons d'abord l'algorithme de force brute pour résoudre ce problème; puis nous développons une division et conquérir l'algorithme pour le résoudre.

a) Utiliser un pseudocode pour décrire un algorithme qui résout ce problème en trouvant les sommes des termes consécutifs à partir du premier mandat, les sommes des

demander à la première personne si x est dans chaque ensemble. le première personne répond «oui» ou «non». Lorsque le premier personne répond à chaque requête de façon véridique, nous pouvons trouver x à l'aide de requêtes $\log n$ en fractionnant successivement les ensembles utilisé dans chaque requête de moitié. Le problème d'Ulam, proposé par Stanislaw Ulam en 1976, demande le nombre de requêtes nécessaire pour trouver x, en supposant que la première personne abaissé pour mentir exactement une fois.

a) Montrez qu'en posant chaque question deux fois, compte tenu d'un ber x et un ensemble de n éléments, et en demander un de plus question quand nous trouvons le mensonge, le problème d'Ulam peut être résolu en utilisant $2 \log n + 1$.

termes commençant par le deuxième terme, et ainsi de suite, traçant la somme maximale constatée dans la mesure l'algorithme continue.

b) Déterminer la complexité de calcul de l'al- gorithme en partie (a) en termes de nombre de sommes calculé et le nombre de comparaisons effectuées.

c) Concevoir un algorithme de division et de conquête pour résoudre ce problème problème. [*Astuce:* Supposons qu'il existe un nombre pair des termes dans la séquence et diviser la séquence en deux moitiés. Expliquez comment gérer le cas lorsque le la somme maximale des termes consécutifs comprend les termes les deux moitiés.]

d) Utilisez l'algorithme de la partie (c) pour trouver le maximum somme des termes consécutifs de chacune des séquences: $-2, 4, -1, 3, 5, -6, 1, 2; 4, 1, -3, 7, -1, -5, 3, -2;$ et $-1, 6, 3, -4, -5, 8, -1, 7$.

e) Trouver une relation de récurrence pour le nombre de sommes et les comparaisons utilisées par les gorithme de la partie (c).

f) Utiliser le théorème maître pour estimer le calcul complexité nationale de l'algorithme du diviser pour régner rithm. Comment se compare-t-il en termes de calcul complexité avec l'algorithme de la partie (a)?

24. Appliquez l'algorithme décrit dans l'exemple 12 pour trouver en utilisant la paire de points la plus proche, en utilisant la dis- entre les points, pour trouver la paire la plus proche du points $(1,3), (1,7), (2,4), (2,9), (3,1), (3,5), (4,3)$, et $(4,7)$.

25. Appliquer l'algorithme décrit dans l'exemple 12 pour trouver la paire de points la plus proche, en utilisant la distance euclidienne entre deux points, pour trouver la paire de points la plus proche $(1,2)$, $(1,6), (2,4), (2,8), (3,1), (3,6), (3,10), (4,3), (5,1)$, $(5,5), (5,9), (6,7), (7,1), (7,4), (7,9)$ et $(8,6)$.

∗ **26.** Utilisez un pseudocode pour décrire l'algorithme récursif pour résoudre le problème de la paire la plus proche comme décrit dans ple 12.

27. Construisez une variante de l'algorithme décrit dans ample 12 ainsi que les justifications des étapes utilisées par l'algorithme pour trouver la plus petite distance entre deux si la distance entre deux points est définie comme étant $d((x_i, y_i), (x_j, y_j)) = \max(|x_i - x_j|, |y_i - y_j|)$.

∗ **28.** Supposons que quelqu'un choisisse un nombre x dans un ensemble de n Nombres. Une deuxième personne essaie de deviner le nombre en sélectionnant successivement des sous-ensembles des n nombres et

b) Montrer qu'en divisant l'ensemble initial de n éléments en quatre parties, chacune avec $n/4$ éléments, 1/4 des éléments peut être éliminé en utilisant deux requêtes. [*Astuce:* utilisez deux requêtes, où chacune des requêtes demande si le l'élément est dans l'union de deux des sous-ensembles avec $n/4$ éléments et où l'un des sous-ensembles de $n/4$ éléments est utilisé dans les deux requêtes.]

c) Montrer de la partie (b) que si $f(n)$ est égal au nombre des requêtes utilisées pour résoudre le problème d'Ulam en utilisant le méthode de la partie (b) et n est divisible par 4, alors $f(n) = f(3n/4) + 2$.

d) Résoudre la relation de récurrence dans la partie (c) pour $f(n)$.

e) Est-ce la manière naïve de résoudre le problème d'Ulam en à chaque question deux fois ou le diviser pour mieux régner méthode basée sur la partie (b) plus efficace? Le plus moyen efficace de résoudre le problème d'Ulam a été déterminé par A. Pelc [Pe87].

Dans les exercices 29 à 33, supposez que f est une fonction croissante satisfaisant la relation de récurrence $f(n) = af(n/b) + cn^d$, où $a \geq 1$, b est un entier supérieur à 1, et c et d sont des nombres réels positifs. Ces exercices fournissent une preuve de Théorème 2.

∗ **29.** Montrer que si $a = b^d$ et n est une puissance de b, alors $f(n) = f(1)n^d + cn^d \log_b n$.

30. Utilisez l'exercice 29 pour montrer que si $a = b^d$, alors $f(n)$ est $O(n^d \log n)$.

∗ **31.** Montrer que si $a = b^d$ et n est une puissance de b, alors $f(n) = C_1 n^d + C_2 n^{\log_b a}$, où $C_1 = b^d c/(b^d - a)$ et $C_2 = f(1) + b^d c/(a - b^d)$.

32. Utilisez l'exercice 31 pour montrer que si $a < b^d$, alors $f(n)$ est $O(n^d)$.

33. Utilisez l'exercice 31 pour montrer que si $a > b^d$, alors $f(n)$ est $O(n^{\log_b a})$.

34. Trouver $f(n)$ lorsque $n = 4^k$, où f satisfait la récurrence relation $f(n) = 5f(n/4) + 6n$, avec $f(1) = 1$.

35. Donnez une estimation de grand O pour la fonction f dans l'exercice 34 si f est une fonction croissante.

36. Trouver $f(n)$ lorsque $n = 2^k$, où f satisfait la récurrence relation $f(n) = 8f(n/2) + n^2$ avec $f(1) = 1$.

37. Donnez une estimation de grand O pour la fonction f dans l'exercice 36 si f est une fonction croissante.

Génération de fonctions

introduction

Les fonctions génératrices sont utilisées pour représenter efficacement des séquences en codant les termes d'une séquence. comme coefficients de puissance d'une variable x dans une série de puissance formelle. Génération de fonctions peut être utilisé pour résoudre de nombreux types de problèmes de comptage, tels que le nombre de façons de sélectionner ou distribuer des objets de différents types, soumis à une variété de contraintes, et le nombre de façons de changer un dollar en utilisant des pièces de monnaie de différentes dénominations.Génération de fonctions peut être utilisé pour résoudre des relations de récurrence en traduisant une relation de récurrence pour les termes de une séquence en une équation impliquant une fonction génératrice. Cette équation peut ensuite être résolue pour trouver une forme fermée pour la fonction génératrice. A partir de cette forme fermée, les coefficients du des séries de puissance pour la fonction de génération peuvent être trouvées, résolvant la relation de récurrence d'origine. La génération de fonctions peut également être utilisée pour prouver des identités combinatoires en tirant parti des relations relativement simples entre les fonctions qui peuvent être traduites en identités impliquant les termes des séquences. La génération de fonctions est un outil utile pour étudier de nombreuses propriétés de séquences autres que celles décrites dans cette section, telles que leur utilisation pour établir des formules pour les termes d'une séquence.

Nous commençons par la définition de la fonction génératrice d'une séquence.

DÉFINITION 1 La *fonction génératrice de la séquence* $a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots$ de nombres réels est l'infini séries

$$G(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k .$$

Remarque: La fonction génératrice de $\{a_k\}$ donnée dans la définition 1 est parfois appelée l'**ordinaire fonction** de **génération** de $\{a_k\}$ pour la distinguer des autres types de fonctions de génération pour cette séquence.

EXEMPLE 1 Les fonctions génératrices des séquences $\{a_k\}$ avec $a_k = 3$, $a_k = k+1$ et $a_k = 2^k$ sont $\sum_{k=0}^{\infty} 3x^k$, $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k$, et $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k$, respectivement. ▲

Nous pouvons définir des fonctions de génération pour des séquences finies de nombres réels en étendant un séquence finie $a_0, a_1, \ldots, a_n$ en une séquence infinie en définissant $a_{n+1} = 0$, $a_{n+2} = 0$, etc. sur. La fonction génératrice $G(x)$ de cette séquence infinie $\{a_n\}$ est un polynôme de degré n car aucun terme de la forme $a_j x^j$ avec $j > n$ se produire, c'est-à-dire

$$G(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n .$$

EXEMPLE 2 Quelle est la fonction génératrice de la séquence 1, 1, 1, 1, 1, 1?

Solution: La fonction génératrice de 1, 1, 1, 1, 1, 1 est

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 .$$

Selon le théorème 1 de la section 2.4, nous avons

$$(x^6 - 1)/(x - 1) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$$

lorsque $x = 1$. Par conséquent, $G(x) = (x^6 - 1)/(x - 1)$ est la fonction génératrice de la séquence 1, 1, 1, 1, 1, 1. [Parce que les pouvoirs de x ne sont que des repères pour les termes de la séquence dans une fonction génératrice, nous n'avons pas à craindre que $G(1)$ ne soit pas défini.] ▲

EXEMPLE 3 Soit m un entier positif. Soit $a_k = C(m, k)$, pour $k = 0, 1, 2, \ldots, m$. Quelle est la génération fonction pour la séquence $a_0, a_1, \ldots, a_m$?

Solution: la fonction de génération de cette séquence est

$$G(x) = C(m, 0) + C(m, 1)x + C(m, 2)x^2 + \cdots + C(m, m)x^m.$$

Le théorème binomial montre que $G(x) = (1 + x)^m$. ▲

Faits utiles sur la série Power

Lorsque des fonctions de génération sont utilisées pour résoudre des problèmes de comptage, elles sont généralement être **une série de pouvoirs formelle**. Les questions sur la convergence de ces séries sont ignorées. cependant, pour appliquer certains résultats du calcul, il est parfois important de considérer pour quel x le les séries de puissance convergent. Le fait qu'une fonction ait une série de puissance unique autour de $x = 0$ être également important. En règle générale, cependant, nous ne nous préoccuperons pas des questions de convergence ou l'unicité des séries de pouvoir dans nos discussions.Les lecteurs familiers avec le calcul peuvent consulter manuels sur ce sujet pour plus de détails sur les séries de puissance, y compris la convergence des séries nous considérons ici.

Nous allons maintenant énoncer quelques faits importants sur les séries infinies utilisées lorsque vous travaillez avec générer des fonctions. Une discussion de ces résultats et des résultats connexes peut être trouvée dans les textes de calcul.

EXEMPLE 4 La fonction $f(x) = 1/(1 - x)$ est la fonction génératrice de la séquence 1, 1, 1, 1, ..., be-cause

$$1/(1 - x) = 1 + x + x^2 + \cdots$$

pour $|x| < 1$. ▲

EXEMPLE 5 La fonction $f(x) = 1/(1 - ax)$ est la fonction génératrice de la séquence $1, a, a^2, a^3, \ldots,$ car

$$1/(1 - hache) = 1 + hache + a^2x^2 + \cdots$$

quand $|hache| < 1$, ou de manière équivalente, pour $|x| < 1/|a|$ pour $a = 0$. ▲

Nous aurons également besoin de résultats sur la façon d'ajouter et de multiplier deux fonctions génératrices. Des preuves de ces résultats peuvent être trouvées dans les textes de calcul.

THÉORÈME 1 Soit $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ et $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$. alors

$$f(x) + g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k)x^k \quad \text{et } f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} \right) x^k.$$

Remarque: le théorème 1 n'est valable que pour les séries de puissance qui convergent dans un intervalle, comme toutes les séries examiné dans cette section. Cependant, la théorie de la génération de fonctions ne se limite pas à de telles séries. Dans le cas de séries qui ne convergent pas, les affirmations du théorème 1 peuvent être considérées comme définitions de l'addition et de la multiplication des fonctions génératrices.

Nous allons illustrer comment le théorème 1 peut être utilisé avec l'exemple 6.

EXEMPLE 6 Soit $f(x) = 1/(1-x)^2$. Utilisez l'exemple 4 pour trouver les coefficients $a_0, a_1, a_2, \ldots$ dans l'expansion $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

Solution: à partir de l'exemple 4, nous voyons que

$$1/(1-x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots.$$

Par conséquent, à partir du théorème 1, nous avons

$$1/(1-x)^2 = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} 1\right) x^k = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k.$$

▲

Remarque: Ce résultat peut également être dérivé de l'exemple 4 par différenciation.La prise de dérivés est une technique utile pour produire de nouvelles identités à partir d'identités existantes pour générer des fonctions.

Pour utiliser des fonctions de génération pour résoudre de nombreux problèmes de comptage importants, nous devrons appliquer le théorème binomial pour les exposants qui ne sont pas des entiers positifs.Avant de déclarer un version étendue du théorème binomial, nous devons définir des coefficients binomiaux étendus.

DÉFINITION 2 Soit u un nombre réel et k un entier non négatif. Ensuite, le *coefficient binomial étendu* $\binom{u}{k}$ est défini par

$$\binom{u}{k} = \begin{cases} u(u-1)\cdots(u-k+1)/k! & \text{si } k > 0, \\ 1 & \text{si } k = 0. \end{cases}$$

EXEMPLE 7 Trouver les valeurs des coefficients binomiaux étendus $\binom{-2}{3}$ et $\binom{\text{Une}/\text{deux}}{3}$.

Solution: Prendre $u = -2$ et $k = 3$ dans la définition 2 nous donne

$$\binom{-2}{3} = \frac{(-2)(-3)(-4)}{3!} = -4.$$

De même, en prenant $u = 1/2$ et $k = 3$ nous donne

$$\binom{1/2}{3} = \frac{(1/2)(1/2-1)(1/2-2)}{3!}$$
$$= (\text{Une}/2)(-1/2)(-3/2)/6$$
$$= 1/\text{seize}.$$

▲

L'exemple 8 fournit une formule utile pour les coefficients binomiaux étendus lorsque le haut
Le paramètre est un entier négatif. Il sera utile dans nos discussions ultérieures.

EXEMPLE 8 Lorsque le paramètre supérieur est un entier négatif, le coefficient binomial étendu peut être exprimé en termes de coefficient binomial ordinaire. Pour voir que c'est le cas, notez que

$$\begin{aligned}
\binom{-n}{r} &= \frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-r+1)}{r!} && \text{par définition du coefficient binomial étendu}\\
&= \frac{(-1)^r n(n+1)\cdots(n+r-1)}{r!} && \text{factoriser -1 de chaque terme dans le numérateur}\\
&= \frac{(-1)^r (n+r-1)(n+r-2)\cdots n}{r!} && \text{par la loi commutative pour la multiplication}\\
&= \frac{(-1)^r (n+r-1)!}{r!(n-1)!} && \text{multipliant à la fois le numérateur et le dénominateur par } (n-1)!\\
&= (-1)^r \binom{n+r-1}{r} && \text{par la définition des coefficients binomiaux}\\
&= (-1)^r C(n+r-1, r). && \text{utilisation d'une notation alternative pour le binôme coefficients}
\end{aligned}$$

▲

Nous énonçons maintenant le théorème binomial étendu.

THÉORÈME 2 **LE THÉORÈME BINOMIQUE ÉTENDU** Soit x un nombre réel avec $|x| < 1$ et Soit u un vrai nombre. alors

$$(1+x)^u = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{u}{k} x^k .$$

Le théorème 2 peut être prouvé en utilisant la théorie des séries de Maclaurin. Nous laissons sa preuve au lecteur avec une familiarité avec cette partie du calcul.

Remarque: lorsque u est un entier positif, le théorème binomial étendu se réduit au binôme théorème présenté à la section 6.4, car dans ce cas $\binom{u}{k} = 0$ si $k > u$.

L'exemple 9 illustre l'utilisation du théorème 2 lorsque l'exposant est un entier négatif.

EXEMPLE 9 Trouver les fonctions génératrices pour $(1+x)^{-n}$ et $(1-x)^{-n}$, où n est un entier positif, en utilisant le théorème binomial étendu.

Solution: Par le théorème binomial étendu, il s'ensuit que

$$(1+x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} x^k .$$

En utilisant l'exemple 8, qui fournit une formule simple pour $\binom{-n}{k}$, on obtient

$$(1+x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C(n+k-1, k) x^k .$$

En remplaçant x par $-x$, nous constatons que

$$(1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} C(n+k-1, k) x^k .$$

▲

Le tableau 1 présente un résumé utile de certaines fonctions génératrices qui surviennent fréquemment.

Remarque: Notez que les deuxième et troisième formules de ce tableau peuvent être déduites de la première formule en substituant ax et x^r pour x, respectivement. De même, les sixième et septième formules peut être déduit de la cinquième formule en utilisant les mêmes substitutions.Les dixième et onzième peuvent être déduit de la neuvième formule en substituant $-x$ et ax à x, respectivement. Aussi quelques des formules de ce tableau peuvent être dérivées d'autres formules en utilisant des méthodes de calcul (comme la différenciation et l'intégration). Les étudiants sont encouragés à connaître les formules de base ce tableau (c'est-à-dire les formules à partir desquelles les autres peuvent être dérivées, peut-être les premier, quatrième, cinquième, huitième, neuvième, douzième et treizième formules) et comprendre comment dériver les autres formules à partir de ces formules de base.

Compter les problèmes et générer des fonctions

Les fonctions de génération peuvent être utilisées pour résoudre une grande variété de problèmes de comptage.En particulier, ils peut être utilisé pour compter le nombre de combinaisons de différents types.Au chapitre 6, nous avons développé techniques pour compter les r-combinaisons d'un ensemble avec n éléments lorsque la répétition est autorisée et des contraintes supplémentaires peuvent exister.Ces problèmes équivalent à compter les solutions équations de la forme

$$e_1 + e_2 + \cdots + e_n = C,$$

où C est une constante et chaque e_i est un entier non négatif qui peut être soumis à une valeur spécifiée contrainte. Les fonctions de génération peuvent également être utilisées pour résoudre des problèmes de comptage de ce type, comme Les exemples 10 à 12 le montrent.

EXEMPLE 10 Trouver le nombre de solutions de

$$e_1 + e_2 + e_3 = 17,$$

où e_1, e_2 et e_3 sont des entiers non négatifs avec $2 \leq e_1 \leq 5$, $3 \leq e_2 \leq 6$ et $4 \leq e_3 \leq 7$.

Solution: Le nombre de solutions avec les contraintes indiquées est le coefficient de x^{17} dans le expansion de

$$(x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(x^3 + x^4 + x^5 + x^6)(x^4 + x^5 + x^6 + x^7).$$

TABLEAU 1 **Fonctions de génération utiles.**

$G(x)$	un_k
$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^k$ $= 1 + C(n,1)x + C(n,2)x^2 + \cdots + x^n$	$C(n,k)$
$(1+\textit{hache})^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)a^k x^k$ $= 1 + C(n,1)ax + C(n,2)a^2x^2 + \cdots + a^n x^n$	$C(n,k)a^k$
$(1+x^r)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^{rk}$ $= 1 + C(n,1)x^r + C(n,2)x^{2r} + \cdots + x^{rn}$	$C(n,k/r)$ si $r \mid k$; 0 sinon
$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$	1 si $k \leq n$; 0 sinon
$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots$	1
$\frac{1}{1-\textit{hache}} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k x^k = 1 + ax + a^2x^2 + \cdots$	un_k
$\frac{1}{1-x^r} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{rk} = 1 + x^r + x^{2r} + \cdots$	1 si $r \mid k$; 0 sinon
$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots$	$k+1$
$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} C(n+k-1,k)x^k$ $= 1 + C(n,1)x + C(n+1,2)x^2 + \cdots$	$C(n+k-1,k) = C(n+k-1,n-1)$
$\frac{1}{(1+x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} C(n+k-1,k)(-1)^k x^k$ $= 1 - C(n,1)x + C(n+1,2)x^2 - \cdots$	$(-1)^k C(n+k-1,k) = (-1)^k C(n+k-1,n-1)$
$\frac{1}{(1-\textit{hache})^n} = \sum_{k=0}^{\infty} C(n+k-1,k)a^k x^k$ $= 1 + C(n,1)ax + C(n+1,2)a^2x^2 + \cdots$	$C(n+k-1,k)a^k = C(n+k-1,n-1)a^k$
$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$	$1/k!$
$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$	$(-1)^{k+1}/k$

Remarque: La série pour les deux dernières fonctions de génération peut être trouvée dans la plupart des livres de calcul lorsque les séries de puissance sont discutées.

Cela suit parce que nous obtenons un terme égal à x^{17} dans le produit en choisissant un terme dans le première somme x^{e_1}, un terme dans la deuxième somme x^{e_2}, et un terme dans la troisième somme x^{e_3}, où le les exposants e_1, e_2 et e_3 satisfont l'équation $e_1 + e_2 + e_3 = 17$ et les contraintes données.

Il n'est pas difficile de voir que le coefficient de x^{17} dans ce produit est 3. Par conséquent, il y a trois solutions. (Notez que le calcul de ce coefficient implique à peu près autant de travail comme énumérant toutes les solutions de l'équation avec les contraintes données.Cependant, le méthode que cela illustre souvent peut être utilisée pour résoudre de grandes classes de problèmes de comptage avec formules spéciales, comme nous le verrons. En outre, un système d'algèbre informatique peut être utilisé pour faire de tels calculs.) ▲

EXEMPLE 11 De combien de manières différentes huit cookies identiques peuvent-ils être répartis entre trois des enfants si chaque enfant reçoit au moins deux cookies et pas plus de quatre cookies?

Solution: parce que chaque enfant reçoit au moins deux mais pas plus de quatre cookies, pour chaque enfant il y a un facteur égal à

$$(x^2 + x^3 + x^4)$$

dans la fonction génératrice de la séquence $\{c_n\}$, où c_n est le nombre de façons de distribuer n biscuits. Parce qu'il y a trois enfants, cette fonction génératrice est

$$(x^2 + x^3 + x^4)^3.$$

Nous avons besoin du coefficient de x^8 dans ce produit. La raison en est que les termes x^8 dans l'expansion correspondent à la manière dont trois termes peuvent être sélectionnés, avec un pour chaque facteur, exposants totalisant jusqu'à 8. De plus, les exposants du terme des premier, deuxième et les troisièmes facteurs sont le nombre de cookies que les premier, deuxième et troisième enfants reçoivent, respectivement. Le calcul montre que ce coefficient est égal à 6. Par conséquent, il existe six façons de répartir cookies afin que chaque enfant reçoive au moins deux, mais pas plus de quatre, cookies. ▲

EXEMPLE 12 Utilisez des fonctions de génération pour déterminer le nombre de façons d'insérer des jetons d'une valeur de 1 \$, 2 \$, et 5 \$ dans un distributeur automatique pour payer un article qui côûte r dollars dans les deux cas lorsque l'ordre dans lequel les jetons sont insérés n'a pas d'importance et quand l'ordre est important.(Pour Par exemple, il existe deux façons de payer un article qui coûte 3 \$ lorsque l'ordre dans lequel les jetons sont insérés n'a pas d'importance: insérer trois jetons \$ 1 ou un jeton \$ 1 et un jeton \$ 2.Quand l'ordre importe, il y a trois façons: insérer trois jetons \$ 1, insérer un jeton \$ 1 puis un jeton \$ 2, ou en insérant un jeton \$ 2 puis un jeton \$ 1.)

Solution: Considérez le cas où l'ordre dans lequel les jetons sont insérés n'a pas d'importance. Ici, tout ce qui nous intéresse, c'est le nombre de chaque jeton utilisé pour produire un total de r dollars. Car nous pouvons utiliser n'importe quel nombre de jetons 1 \$, n'importe quel nombre de jetons 2 \$ et n'importe quel nombre de jetons 5 \$, la réponse est le coefficient de x^r dans la fonction génératrice

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots)(1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \cdots).$$

(Le premier facteur de ce produit représente les jetons de 1 \$ utilisés, le second les jetons de 2 \$ utilisés et le troisième, les jetons de 5 \$ utilisés.) Par exemple, le nombre de façons de payer pour un article coûtant 7 \$ l'utilisation de jetons \$ 1, \$ 2 et \$ 5 est donnée par le coefficient de x^7 dans cette expansion, ce qui équivaut à 6.

Lorsque l'ordre dans lequel les jetons sont insérés est important, le nombre de façons d'insérer exactement n jetons pour produire un total de r dollars est le coefficient de x^r dans

$$(x + x^2 + x^5)^n,$$

!

car chacun des jetons r peut être un jeton de 1 \$, un jeton de 2 \$ ou un jeton de 5 \$.Parce que tout nombre de jetons peuvent être insérés, le nombre de façons de produire r dollars en utilisant des jetons de 1 \$, 2 \$ ou 5 \$, lorsque l'ordre dans lequel les jetons sont insérés est le coefficient de x^r dans

$$1 + (x + x^2 + x^5) + (x + x^2 + x^5)^2 + \cdots = \frac{1}{1 - (x + x^2 + x^5)}$$

$$= \frac{1}{1 - x - x^2 - x^5},$$

où nous avons ajouté le nombre de façons d'insérer 0 jetons, 1 jeton, 2 jetons, 3 jetons et ainsi de suite, et où nous avons utilisé l'identité $1/(1 - x) = 1 + x + x^2 + \cdots$ avec x remplacé avec $x + x^2 + x^5$. Par exemple, le nombre de façons de payer un article coûtant 7 \$ en utilisant 1 \$, 2 \$, et 5 \$ jetons, lorsque l'ordre dans lequel les jetons sont utilisés est le coefficient de x^7 dans ce expansion, ce qui équivaut à 26. [*Indice:* Pour voir que ce coefficient est égal à 26, il faut ajouter des coefficients de x^7 dans les extensions $(x + x^2 + x^5)^k$ pour $2 \leq k \leq 7$. Cela peut être fait en main avec un calcul considérable, ou un système d'algèbre informatique peut être utilisé.] ▲

L'exemple 13 montre la polyvalence de la génération de fonctions lorsqu'il est utilisé pour résoudre des problèmes avec hypothèses différentes.

EXEMPLE 13 Utilisez des fonctions de génération pour trouver le nombre de k- combinaisons d'un ensemble avec n éléments. Présumer que le théorème binomial a déjà été établi.

Solution: Chacun des n éléments de l'ensemble contribue le terme $(1 + x)$ à la fonction génératrice $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Ici $f(x)$ est la fonction génératrice de $\{a_k\}$, où a_k représente la nombre de k -combinaisons d'un ensemble avec n éléments. Par conséquent,

$$f(x) = (1 + x)^n.$$

Mais par le théorème binomial, nous avons

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k,$$

où

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Par conséquent, $C(n, k)$, le nombre de k- combinaisons d'un ensemble avec n éléments, est

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

▲

Remarque: Nous avons prouvé le théorème binomial de la section 6.4 en utilisant la formule du nombre de r -combinaisons d'un ensemble avec n éléments. Cet exemple montre que le théorème binomial, qui

peut être prouvée par induction mathématique, peut être utilisée pour dériver la formule du nombre de r -combinaisons d'un ensemble avec n éléments.

EXEMPLE 14 Utiliser des fonctions de génération pour trouver le nombre decombinaisons r dans un ensemble avec n éléments lorsque la répétition des éléments est autorisée.

Solution: Soit $G(x)$ la fonction génératrice de la séquence $\{a_r\}$, où a_r est égal au nombre de r -combinaisons d'un ensemble avec n éléments avec répétitions autorisées. Autrement dit, $G(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$. Parce que nous pouvons sélectionner n'importe quel nombre d'un membre particulier de l'ensemble avec n éléments lorsque nous formons une r- combinaison avec répétition autorisée, chacun des n éléments contribue $(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)$ à une extension de produit pour $G(x)$. Chaque élément contribue à ce facteur

car il peut être sélectionné zéro fois, une fois, deux fois, trois fois, etc., lorsqu'un *La* combinaison r est formée (avec un total de r éléments sélectionnés). Parce qu'il y a n éléments dans

l'ensemble et chacun contribue ce même facteur à $G(x)$, nous avons

$$G(x) = (1 + x + x^2 + \cdots)^n .$$

Tant que $|x| < 1$, nous avons $1 + x + x^2 + \cdots = 1/(1 - x)$, donc

$$G(x) = 1/(1 - x)^n = (1 - x)^{-n} .$$

En appliquant le théorème binomial étendu (Théorème 2), il s'ensuit que

$$(1 - x)^{-n} = (1 + (-x))^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-n}{r} (-x)^r .$$

Le nombre de r -combinaisons d'un ensemble avec n éléments avec des répétitions autorisées, lorsque r est un entier positif, est le coefficient a_r de x^r dans cette somme. Par conséquent, en utilisant l'exemple 8, nous trouvons que *un* $_r$ est égal à

$$\begin{aligned}\binom{-n}{r}(-1)^r &= (-1)^r C(n + r - 1, r) \cdot (-1)^r \\ &= C(n + r - 1, r).\end{aligned}$$

▲

Notez que le résultat de l'exemple 14 est le même résultat que nous avons déclaré comme théorème 2 dans la section 6.5.

EXEMPLE 15 Utilisez des fonctions de génération pour trouver le nombre de façons de sélectionner r objets de n types différents si nous devons sélectionner au moins un objet de chaque type.

Solution: Parce que nous devons sélectionner au moins un objet de chaque type, chacun des n types d'objets contribue le facteur $(x + x^2 + x^3 + \cdots)$ à la fonction génératrice $G(x)$ pour la séquence $\{a_r\}$, où a_r est le nombre de façons de sélectionner r objets de n types différents si nous en avons besoin d'au moins un objet de chaque nature. Par conséquent,

$$G(x) = (x + x^2 + x^3 + \cdots)^n = x^n(1 + x + x^2 + \cdots)^n = x^n/(1 - x)^n.$$

En utilisant le théorème binomial étendu et l'exemple 8, nous avons

$$\begin{aligned}
G(x) &= x^n/(1-x)^n \\
&= x^n \cdot (1-x)^{-n} \\
&= x^n \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-n}{r} (-x)^r \\
&= x^n \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r C(n+r-1, r)(-1)^r x^r \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} C(n+r-1, r) x^{n+r} \\
&= \sum_{t=n}^{\infty} C(t-1, t-n) x^t \\
&= \sum_{r=n}^{\infty} C(r-1, r-n) x^r.
\end{aligned}$$

Nous avons décalé la somme dans l'avant-dernière égalité en posant $t = n + r$ de telle sorte que $t = n$ lorsque $r = 0$ et $n + r - 1 = t - 1$, puis nous avons remplacé t par r comme indice de sommation dans la dernière égalité pour revenir à notre notation d'origine. Il existe donc $C(r - 1, r - n)$ façons de sélectionnez r objets de n types différents si nous devons sélectionner au moins un objet de chaque type. ▲

Utilisation de fonctions de génération pour résoudre les relations de récurrence

On peut trouver la solution à une relation de récurrence et ses conditions initiales en trouvant une explicite formule pour la fonction génératrice associée. Ceci est illustré dans les exemples 16 et 17.

EXEMPLE 16 Résoudre la relation de récurrence $a_k = 3a_{k-1}$ pour $k = 1, 2, 3, \ldots$ et la condition initiale $a_0 = 2$.

Solution: Soit $G(x)$ la fonction génératrice de la séquence $\{a_k\}$, c'est-à-dire $G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

Notez d'abord que

$$xG(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^k .$$

En utilisant la relation de récurrence, nous voyons que

$$G(x) - 3xG(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - 3 \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^k$$
$$= un_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - 3a_{k-1}) x^k$$
$$= 2 ,$$

car $a_0 = 2$ et $a_k = 3a_{k-1}$. Donc,

$$G(x) - 3xG(x) = (1 - 3x)G(x) = 2 .$$

Page 169

La résolution de $G(x)$ montre que $G(x) = 2/(1 - 3x)$. Utilisation de l'identité $1/(1 - ax) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k x^k$, du tableau 1, nous avons

$$G(x) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} 3^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} 2 \cdot 3^k x^k .$$

Par conséquent, $a_k = 2 \cdot 3^k$. ▲

EXEMPLE 17 Supposons qu'un mot de code valide soit un nombre à n chiffres en notation décimale contenant un pair nombre de 0. Soit a_n le nombre de mots de code valides de longueur n . Dans l'exemple 4 de Section 8.1 nous avons montré que la séquence $\{a_n\}$ satisfait la relation de récurrence

$$a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}$$

et la condition initiale $a_1 = 9$. Utilisez des fonctions génératrices pour trouver une formule explicite pour a_n .

Solution: pour simplifier notre travail de génération de fonctions, nous étendons cette séquence en définissant $un_0 = 1$; lorsque nous attribuons cette valeur à un_0 et utilisons la relation de récurrence, nous avoir $un_1 = 8un_0 + 10^0 = 8 + 1 = 9$, ce qui correspond à notre condition initiale d'origine. (Il a également un sens car il y a un mot de code de longueur 0 - la chaîne vide.)

On multiplie les deux côtés de la relation de récurrence par x^n obtenir

$$a_n x^n = 8a_{n-1} x^n + 10^{n-1} x^n .$$

$\sum^{\infty}$

Soit $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ être la fonction génératrice de la séquence $a_0, a_1, a_2, \ldots$. On additionne les deux côtés de la dernière équation commençant par $n = 1$, pour constater que

$$\begin{aligned} G(x) - 1 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (8a_{n-1}x^n + 10^{n-1}x^n) \\ &= 8\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \text{dix}^{n-1}x^n \\ &= 8x\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} + x\sum_{n=1}^{\infty} \text{dix}^{n-1}x^{n-1} \\ &= 8x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + x\sum_{n=0}^{\infty} \text{dix}^n x^n \\ &= 8xG(x) + x/(1-10x), \end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'exemple 5 pour évaluer la deuxième somme. Par conséquent, nous avons

$$G(x) - 1 = 8xG(x) + x/(1-10x).$$

La résolution de $G(x)$ montre que

$$G(x) = \frac{1-9x}{(1 \text{ à } 8x)(1 \text{ à } 10x)}.$$

Élargir le côté droit de cette équation en fractions partielles (comme cela se fait dans l'intégration des fonctions rationnelles étudiées en calcul) donne

$$G(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-8x} + \frac{1}{1-10x}\right).$$

L'utilisation de l'exemple 5 deux fois (une fois avec $a = 8$ et une fois avec $a = 10$) donne

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} 8^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \text{dix}^n x^n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}(8^n + 10^n)x^n. \end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons montré que

$$a_n = \frac{1}{2}(8^n + 10^n).$$

▲

Prouver des identités via des fonctions de génération

Au chapitre 6, nous avons vu comment les identités combinatoires pouvaient être établies en utilisant preuves. Nous montrerons ici que ces identités, ainsi que les identités pour les coefficients binomiaux étendus peuvent être prouvés en utilisant des fonctions génératrices.Parfois, l'approche de la fonction génératrice est plus simple que les autres approches, surtout quand il est plus simple de travailler avec le formulaire fermé d'une fonction génératrice qu'avec les termes de la séquence eux-mêmes.Nous illustrons comment la génération de fonctions peut être utilisée pour prouver des identités avec l'exemple 18.

EXEMPLE 18 Utilisez des fonctions de génération pour montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} C(n,k)^2 = C(2n,n)$$

chaque fois que n est un entier positif.

Solution: notons d'abord que par le théorème binomial $C(2n,n)$ est le coefficient de x^n en $(1+x)^{2n}$. Cependant, nous avons également

$$\begin{aligned}(1+x)^{2n} &= [(1+x)^n]^2\\ &= [C(n,0)+C(n,1)x+C(n,2)x^2+\cdots+C(n,n)x^n]^2.\end{aligned}$$

Le coefficient de x^n dans cette expression est

$$C(n,0)C(n,n)+C(n,1)C(n,n-1)+C(n,2)C(n,n-2)+\cdots+C(n,n)C(n,0).$$

Cela équivaut à $\sum_{k=0}^{n} C(n,k)^2$, car $C(n,n-k)=C(n,k)$. Parce que $C(2n,n)$ et $\sum_{k=0}^{n} C(n,k)^2$ représente le coefficient de x^n en $(1+x)^{2n}$, ils doivent être égaux. ▲

Les exercices 42 et 43 demandent de prouver l'identité de Pascal et celle de Vandermonde en utilisant générer des fonctions.

Des exercices

1. Trouvez la fonction génératrice de la séquence finie 2, 2, 2, 2, 2, 2.
2. Trouvez la fonction génératrice de la séquence finie 1, 4, 16, 64, 256.

Dans les exercices 3 à 8, par **forme fermée,** nous entendons un exemple algébrique pression n'impliquant pas de sommation sur une plage de valeurs ou l'utilisation d'ellipses.

3. Trouvez un formulaire fermé pour la fonction de génération pour chaque de ces séquences. (Pour chaque séquence, utilisez le plus choix judicieux d'une séquence qui suit le modèle du termes initiaux énumérés.)
   a) 0, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 0, 0, 0, 0, 0, ...

7. Pour chacune de ces fonctions génératrices, fournissez un formule pour la séquence qu'il détermine.
   a) $(3x-4)^3$ **b)** $(x^3+1)^3$
   c) $1/(1-5x)$ **d)** $x^3/(1+3x)$
   e) $x^2+3x+7+(1/(1-x^2))$
   f) $(x^4/(1-x^4))-x^3-x^2-x-1$
   g) $x^2/(1-x)^2$ **h)** $2e^{2x}$
8. Pour chacune de ces fonctions génératrices, fournissez un formule pour la séquence qu'il détermine.
   a) $(x^2+1)^3$ **b)** $(3x-1)^3$
   c) $1/(1-2x^2)$ **d)** $x^2/(1-x)^3$
   e) $x-1+(1/(1-3x))$ **f)** $(1+x^3)/(1+x)^3$

b) 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, ...
c) 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, ...
d) 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, ...
e) $\binom{\text{sept}}{0}, \binom{\text{sept}}{1}, \binom{\text{sept}}{2}, \ldots, \binom{\text{sept}}{\text{sept}}$, 0, 0, 0, 0, 0, ...
f) 2, -2, 2, -2, 2, -2, 2, -2, ...
g) 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, ...
h) 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, ...

4. Trouvez un formulaire fermé pour la fonction de génération pour chaque de ces séquences. (Supposons une forme générale pour les termes de la séquence, en utilisant le choix le plus évident d'un tel séquence.)

a) -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, ...
b) 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, ...
c) 0, 0, 3, −3, 3, −3, 3, −3, ...
d) 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, ...
e) $\binom{\text{sept}}{0}, 2\binom{\text{sept}}{1}, 2^2\binom{\text{sept}}{2}, \ldots, 2^7\binom{\text{sept}}{\text{sept}}$, 0, 0, 0, 0, ...
f) −3, 3, −3, 3, −3, 3, ...
g) 0, 1, −2, 4, −8, 16, −32, 64, ...
h) 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, ...

5. Recherchez un formulaire fermé pour la fonction de génération séquence $\{a_n\}$, où

a) $a_n = 5$ pour tout $n = 0, 1, 2, \ldots$.
b) $a_n = 3^n$ pour tout $n = 0, 1, 2, \ldots$.
c) $a_n = 2$ pour $n = 3, 4, 5, \ldots$ et $a_0 = a_1 = a_2 = 0$.
d) $a_n = 2n + 3$ pour tout $n = 0, 1, 2, \ldots$.
e) $a_n = \binom{8}{n}$ pour tout $n = 0, 1, 2, \ldots$.
f) $a_n = \binom{n+4}{n}$ pour tout $n = 0, 1, 2, \ldots$.

6. Recherchez un formulaire fermé pour la fonction de génération séquence $\{a_n\}$, où

a) $a_n = -1$ pour tout $n = 0, 1, 2, \ldots$.
b) $a_n = 2^n$ pour $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ et $a_0 = 0$.
c) $a_n = n - 1$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$.
d) $a_n = 1/(n+1)!$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$.
e) $a_n = \binom{n}{2}$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$.
f) $a_n = \binom{\text{dix}}{n+1}$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$.

∗ **g)** $x/(1 + x + x^2)$ **h)** $e^{3x^2} - 1$

9. Trouvez le coefficient de x^{10} dans la série de puissances de chacun ces fonctions.

a) $(1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \cdots)^3$
b) $(x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + \cdots)^3$
c) $(x^4 + x^5 + x^6)(x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)$
d) $(x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \cdots)(x^3 + x^6 + x^9 + \cdots)(x^4 + x^8 + x^{12} + \cdots)$
e) $(1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \cdots)(1 + x^4 + x^8 + x^{12} + \cdots)(1 + x^6 + x^{12} + x^{18} + \cdots)$

10. Trouvez le coefficient de x^9 dans la série de puissances de chacun ces fonctions.

a) $(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots)^3$
b) $(x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \cdots)^3$
c) $(x^3 + x^5 + x^6)(x^3 + x^4)(x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)$
d) $(x + x^4 + x^7 + x^{10} + \cdots)(x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \cdots)$
e) $(1 + x + x^2)^3$

11. Trouvez le coefficient de x^{10} dans la série de puissances de chacun ces fonctions.

a) $1/(1 - 2x)$ **b)** $1/(1 + x)^2$
c) $1/(1 - x)^3$ **d)** $1/(1 + 2x)^4$
e) $x^4/(1 - 3x)^3$

12. Trouvez le coefficient de x^{12} dans la série de puissances de chacun ces fonctions.

a) $1/(1 + 3x)$ **b)** $1/(1 - 2x)^2$
c) $1/(1 + x)^8$ **d)** $1/(1 - 4x)^3$
e) $x^3/(1 + 4x)^2$

13. Utilisez des fonctions de génération pour déterminer le nombre de différentes manières 10 ballons identiques peuvent être donnés à quatre enfants si chaque enfant reçoit au moins deux ballons.

14. Utilisez des fonctions de génération pour déterminer le nombre de différentes manières 12 figurines identiques peuvent être données à cinq enfants afin que chaque enfant reçoive au maximum trois actions Les figures.

15. Utilisez des fonctions de génération pour déterminer le nombre de différentes manières 15 animaux en peluche identiques six enfants pour que chaque enfant reçoive au moins un mais pas plus de trois animaux en peluche.

16. Utilisez des fonctions de génération pour trouver le nombre de choisissez une douzaine de bagels parmi trois variétés: œuf, salé, et simple - si au moins deux bagels de chaque type mais pas plus plus de trois bagels salés sont choisis.

17. De combien de façons 25 beignets identiques peuvent-ils être distribués à quatre agents de police afin que chaque agent obtienne au moins trois mais pas plus de sept beignets?

b) Utilisez la partie (a) pour trouver le nombre de façons de faire un total de 8 lorsqu'un dé est lancé à plusieurs reprises, et l'ordre de le rôle est important. (Utilisation d'un package d'algèbre informatique est conseillé.)

27. Utilisez des fonctions de génération (et un pack d'algèbre âge, le cas échéant) pour trouver le nombre de façons de changer pour 1 $ en utilisant

18. Utilisez des fonctions de génération pour trouver le nombre de sélectionner 14 boules dans un pot contenant 100 boules rouges, 100 boules bleues, et 100 boules vertes pour qu'au moins 3 et pas plus de 10 boules bleues sont sélectionnées. Supposons que le l'ordre dans lequel les balles sont tirées n'a pas d'importance.

19. Quelle est la fonction génératrice de la séquence $\{ c_k \}$, où c_k est le nombre de façons de changer k dollars en utilisant des billets de 1 \$, 2 \$, 5 \$ et 10 \$?

20. Quelle est la fonction génératrice de la séquence $\{ c_k \}$, où c_k représente le nombre de façons d'apporter des changements pour k pesos en utilisant des factures d'une valeur de 10 pesos, 20 pesos, 50 pesos, et 100 pesos?

21. Donner une interprétation combinatoire du coefficient de x^4 dans l'extension $(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^3$. Utilisation cette interprétation pour trouver ce numéro.

22. Donner une interprétation combinatoire du coefficient de x^6 dans l'expansion $(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^n$. Utilisation cette interprétation pour trouver ce numéro.

23. a) Quelle est la fonction génératrice de $\{ a_k \}$, où a_k est le nombre de solutions de $x_1 + x_2 + x_3 = k$ lorsque x_1, x_2 et x_3 sont des entiers avec $x_1 \geq 2$, $0 \leq x_2 \leq 3$, et $2 \leq x_3 \leq 5$?

b) Utilisez votre réponse à la partie (a) pour trouver *un* $_6$.

24. a) Quelle est la fonction génératrice de $\{ a_k \}$, où a_k est le nombre de solutions de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = k$ lorsque x_1, x_2, x_3 et x_4 sont des entiers avec $x_1 \geq 3$, $1 \leq x_2 \leq 5$, $0 \leq x_3 \leq 4$ et $x_4 \geq 1$?

b) Utilisez votre réponse à la partie (a) pour trouver *un* $_7$.

25. Expliquez comment la génération de fonctions peut être utilisée pour trouver nombre de façons de coller l' affranchissement de r cents sur une enveloppe à l'aide de timbres de 3 cents, 4 cents et 20 cents.

a) Supposons que l'ordre dans lequel les timbres sont collés ne pas important.

b) Supposons que les timbres sont collés dans une rangée et que ordre dans lequel ils sont collés sur les questions.

c) Utilisez votre réponse à la partie (a) pour déterminer le nombre 46 cents de frais de port peuvent être collés sur un velope en utilisant des timbres de 3 cents, 4 cents et 20 cents lorsque l'ordre dans lequel les timbres sont collés n'a pas d'importance. (Il est conseillé d'utiliser un programme d'algèbre informatique.)

d) Utilisez votre réponse à la partie (b) pour déterminer le nombre ber de façons 46 cents de frais de port peuvent être collés dans un ligne sur une enveloppe en utilisant 3 cents, 4 cents et 20 cents tampons lorsque l'ordre dans lequel les tampons sont collés sur les questions. (L'utilisation d'un programme d'algèbre informatique est informé.)

26. a) Montrer que $1 / (1 - x - x^2 - x^3 - x^4 - x^5 - x^6)$ est la fonction de génération pour le nombre de façons la somme n peut être obtenue quand un dé est lancé et l'ordre des rôles est important.

a) dix sous et quarts.

b) nickels, dix sous et quartiers.

c) sous, dix sous et quartiers.

d) sous, nickels, dix sous et quartiers.

28. Utilisez des fonctions de génération (et un pack d'algèbre âge, le cas échéant) pour trouver le nombre de façons de changer pour 1 \$ en utilisant des sous, des nickels, des dix sous et des quartiers avec

a) pas plus de 10 centimes.

b) pas plus de 10 centimes et pas plus de 10 nickels.

∗ **c)** pas plus de 10 pièces.

29. Utilisez des fonctions de génération pour trouver le nombre de faire de la monnaie pour 100 \$ en utilisant

a) Billets de 10 \$, 20 \$ et 50 \$.

b) Billets de 5 \$, 10 \$, 20 \$ et 50 \$.

c) 5 \$, 10 \$, 20 \$ et 50 \$ si au moins une facture de chaque la dénomination est utilisée.

d) Billets de 5 \$, 10 \$ et 20 \$ si au moins un et pas plus de quatre de chaque dénomination sont utilisées.

30. Si $G(x)$ est la fonction génératrice de la séquence $\{ a_k \}$, quelle est la fonction génératrice de chacun de ces quences?

a) $2a_0, 2a_1, 2a_2, 2a_3, \ldots$

b) $0, a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ (en supposant que les termes suivent modèle de tous sauf le premier terme)

c) $0, 0, 0, 0, a_2, a_3, \ldots$ (en supposant que les termes suivent modèle de tous, sauf les quatre premiers termes)

d) *un* $_2$, *un* $_3$, *un* $_4$, ...

e) $a_1, 2a_2, 3a_3, 4a_4, \ldots$ [*Indice: Calcul requis* ici.]

f) *un* $^2_0$, $2a_0a_1$, $a^2_1 + 2a_0a_2$, $2a_0a_3 + 2a_1a_2$, $2a_0a_4 + 2a_1a_3 + a^2_2$, ...

31. Si $G(x)$ est la fonction génératrice de la séquence $\{ a_k \}$, quelle est la fonction génératrice de chacun de ces quences?

a) $0, 0, 0, a_3, a_4, a_5, \ldots$ (en supposant que les termes suivent modèle de tous, sauf les trois premiers termes)

b) $a_0, 0, a_1, 0, a_2, 0, \ldots$

c) $0, 0, 0, 0, a_0, a_1, a_2, \ldots$ (en supposant que les termes suivent le modèle de tous, sauf les quatre premiers termes)

d) $a_0, 2a_1, 4a_2, 8a_3, 16a_4, \ldots$

e) 0 , *un* $_0$, *une* $_{\text{une}}/2$, *un* $_2/3$, *un* $_3/4$, ... [*Remarque: calcul requis* ici.]

f) $a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, a_0 + a_1 + a_2 + a_3, \ldots$

32. Utiliser des fonctions génératrices pour résoudre la relation de récurrence $a_k = 7a_{k-1}$ avec la condition initiale $a_0 = 5$.

33. Utiliser des fonctions génératrices pour résoudre la relation de récurrence $a_k = 3a_{k-1} + 2$ avec la condition initiale $a_0 = 1$.

34. Utiliser des fonctions génératrices pour résoudre la relation de récurrence $a_k = 3a_{k-1} + 4^{k-1}$ avec la condition initiale $a_0 = 1$.

35. Utilisez des fonctions de génération pour résoudre la relation de récurrence tion $a_k = 5 a_{k-1} - 6 a_{k-2}$ avec les conditions initiales $a_0 = 6$ et $un_1 = 30$.

36. Utiliser des fonctions génératrices pour résoudre la relation de récurrence $a_k = a_{k-1} + 2 a_{k-2} + 2^k$ avec les conditions initiales $a_0 = 4$ et $un_1 = 12$.

37. Utiliser des fonctions génératrices pour résoudre la relation de récurrence $a_k = 4 a_{k-1} - 4 a_{k-2} + k^2$ aux conditions initiales $a_0 = 2$ et $un_1 = 5$.

38. Utilisez des fonctions de génération pour résoudre la récurrence lation $a_k = 2 a_{k-1} + 3 a_{k-2} + 4^k + 6$ aux conditions initiales tions $a_0 = 20$, $a_1 = 60$.

39. Utilisez les fonctions de génération pour trouver une formule explicite pour les numéros de Fibonacci.

∗ **40. a)** Montrer que si n est un entier positif, alors

$$\binom{-1/2}{n} = \frac{\binom{2n}{n}}{(-4)^n}.$$

b) Utilisez le théorème binomial étendu et la partie (a) pour montrent que le coefficient de x^n dans l'expansion de $(1 - 4x)^{-1/2}$ est $\binom{2n}{n}$ pour tous les entiers non négatifs n.

∗ **41.** (*Calcul requis*) Soit $\{C_n\}$ la séquence de catalan nombres, c'est-à-dire la solution à la relation de récurrence $C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}$ avec $C_0 = C_1 = 1$ (voir Examen-point 5 de la section 8.1).

a) Montrer que si $G(x)$ est la fonction génératrice de la de nombres catalans, puis $xG(x)^2 - G(x) + 1 = 0$. Conclure (en utilisant les conditions initiales) que $G(x) = (1 - \sqrt{1 - 4x})/(2x)$.

b) Utilisez l'exercice 40 pour conclure que

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} x^n,$$

pour que

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

c) Montrer que $C_n \geq 2^{n-1}$ pour tous les entiers positifs n.

42. Utilisez des fonctions de génération pour prouver l'identité de Pascal: $C(n, r) = C(n-1, r) + C(n-1, r-1)$ lorsque n et r sont des entiers positifs avec $r < n$. [*Astuce:* utilisez l'identité $(1 + x)^n = (1 + x)^{n-1} + x(1 + x)^{n-1}$.]

43. Utiliser des fonctions génératrices pour prouver l'identité de Vandermonde tité: $C(m + n, r) = \sum_{k=0}^{r} C(m, r - k)\, C(n, k)$, quand-jamais m, n et r sont des entiers non négatifs avec r non ex-soit m ou n. [*Astuce:* Regardez le coefficient de x^r des deux côtés de $(1 + x)^{m+n} = (1 + x)^m (1 + x)^n$.]

44. Cet exercice montre comment utiliser les fonctions de génération pour dériver une formule pour la somme des n premiers carrés.

a) Montrer que $(x^2 + x)/(1 - x)^4$ est le géné-fonction d'attribution de la séquence $\{a_n\}$, où $a_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$.

b) Utilisez la partie (a) pour trouver une formule explicite pour la somme $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$.

La **fonction de génération exponentielle** de la séquence $\{a_n\}$ est la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n.$$

Par exemple, la fonction de génération exponentielle pour le séquence 1, 1, 1, ... est la fonction $\sum_{n=0}^{\infty} x^n / n! = e^x$. (Vous trouverez cette série particulière utile dans ces exercices.) Notez que e^x est la fonction génératrice (ordinaire) de la quence $1, 1, 1/2!, 1/3!, 1/4!, \ldots$.

45. Trouvez une forme fermée pour la fonction de génération exponentielle tion pour la séquence $\{a_n\}$, où

a) $a_n = 2$. **b)** $a_n = (-1)^n$.
c) $a_n = 3^n$. **d)** $a_n = n + 1$.
e) $a_n = 1/(n + 1)$.

46. Trouvez une forme fermée pour la fonction de génération exponentielle tion pour la séquence $\{a_n\}$, où

a) $a_n = (-2)^n$. **b)** $a_n = -1$.
c) $a_n = n$. **d)** $a_n = n(n - 1)$.
e) $a_n = 1/((n + 1)(n + 2))$.

47. Trouvez la séquence avec chacune de ces fonctions comme fonction génératrice ponentielle.

a) $f(x) = e^{-x}$ **b)** $f(x) = 3x^{2x}$
c) $f(x) = e^{3x} - 3e^{2x}$ **d)** $f(x) = (1 - x) + e^{-2x}$
e) $f(x) = e^{-2x} - (1/(1 - x))$
f) $f(x) = e^{-3x} - (1 + x) + (1/(1 - 2x))$
g) $f(x) = e^{x^2}$

48. Trouvez la séquence avec chacune de ces fonctions comme fonction génératrice ponentielle.

a) $f(x) = e^{3x}$ **b)** $f(x) = 2e^{-3x+1}$
c) $f(x) = e^{4x} + e^{-4x}$ **d)** $f(x) = (1 + 2x) + e^{3x}$
e) $f(x) = e^x - (1/(1 + x))$
f) $f(x) = xe^x$ **g)** $f(x) = e^{x^3}$

49. Un système de codage code les messages en utilisant des chaînes d'octal (base 8) chiffres. Un mot de code est considéré comme valide si et seulement s'il contient un nombre pair de 7.

a) Trouver une relation de récurrence linéaire non homogène pour le nombre de mots de code valides de longueur n. Quels sont les conditions initiales?

b) Résolvez cette relation de récurrence en utilisant le Théorème 6 dans la Sec-8.2.

c) Résoudre cette relation de récurrence en utilisant des fonctions de génération tions.

∗ **50.** Un système de codage code les messages à l'aide de chaînes de base 4 chiffres (c'est-à-dire les chiffres de l'ensemble {0, 1, 2, 3}). Un mot de code est valide si et seulement s'il contient un pair nombre de 0 et un nombre pair de 1. Soit un_n égal le nombre de mots de code valides de longueur n. En outre, laisser b_n, c_n, et d_n égal au nombre de chaînes de base 4 DIG sa longueur n avec un nombre pair de 0 et un nombre impair nombre de 1, avec un nombre impair de 0 et un nombre pair de 1 et avec un nombre impair de 0 et un nombre impair de 1s, respectivement.

a) Montrer que $d_n = 4^n - a_n - b_n - c_n$. Utilisez ceci pour montrer que $a_{n+1} = 2a_n + b_n + c_n$, $b_{n+1} = b_n - c_n + 4^n$, et $c_{n+1} = c_n - b_n + 4^n$.

b) Quels sont un_1, b_1, c_1, et D_1 ?

c) Utiliser des parties (a) et (b) pour trouver un_3, b_3, c_3, et d_3.

d) Utiliser les relations de récurrence dans la partie (a), avec conditions initiales de la partie b), de mettre en place trois concernant les fonctions génératrices $A(x)$, $B(x)$, et $C(x)$ pour les séquences $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ et $\{c_n\}$, re spectralement.

e) Résoudre le système d'équations de la partie (d) pour obtenir formules explicites pour $A(x)$, $B(x)$ et $C(x)$ et utiliser ceux-ci pour obtenir des formules explicites pour a_n, b_n, c_n et d_n.

Les fonctions de génération sont utiles pour étudier le nombre de différents types de partitions d'un entier n. Une **partition** de un entier positif est un moyen d'écrire cet entier comme la somme d'entiers positifs où la répétition est autorisée et l'ordre des entiers dans la somme n'a pas d'importance. Par exemple, le les partitions de 5 (sans restriction) sont 1 + 1 + 1 + 1 + 1, 1 + 1 + 1 + 2, 1 + 1 + 3, 1 + 2 + 2, 1 + 4, 2 + 3 et 5. Les exercices 51 à 56 illustrent certaines de ces utilisations.

51. Montrer que le coefficient $p(n)$ de x^n dans le formel expansion en série de puissance de $1/((1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots)$ est égal au nombre de partitions de n.

52. Montrer que le coefficient $p_o(n)$ de x^n dans le formel extension en série de puissance de $1/((1-x)(1-x^3)(1-x^5)\cdots)$ est égal au nombre de partitions de n en entiers impairs, qui est, le nombre de façons d'écrire n comme la somme des impairs positifs entiers, où l'ordre n'a pas d'importance et répétitions sont autorisés.

53. Montrer que le coefficient $p_d(n)$ de x^n dans le pouvoir formel expansion en série de $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots$ est égal à le nombre de partitions de n en parties distinctes, c'est-à-dire le nombre de façons d'écrire n comme la somme des tegers, où l'ordre n'a pas d'importance mais pas de répétitions sont autorisés.

54. Trouver $p_o(n)$, le nombre de partitions de n en parties impaires avec des répétitions autorisées, et $p_d(n)$, le nombre de positions de n en parties distinctes, pour $1 \leq n \leq 8$, en écrivant chaque partition de chaque type pour chaque entier.

55. Montrer que si n est un entier positif, alors le nombre de partitions de n en parties distinctes est égal au nombre des partitions de n en parties impaires avec des répétitions autorisées; c'est-à-dire, $p_o(n) = p_d(n)$. [*Astuce:* montrer que la génération les fonctions pour $p_o(n)$ et $p_d(n)$ sont égales.]

**** 56.** (*Nécessite un calcul*) Utilisez la fonction génératrice de $p(n)$ pour montrer que $p(n) \leq e^{C\sqrt{n}}$ pour un certain C constant [Robuste et Ramanujan a montré que $p(n) \sim e^{\pi\sqrt{2/3}\sqrt{n}}/(4\sqrt{3}n)$, ce qui signifie que le rapport de $p(n)$ et le côté droit approche 1 comme n approche de l'infini.]

Supposons que X est une variable aléatoire sur un espace échantillon S tel que $X(s)$ est un entier non négatif pour tous $s \in S$. Le **proba- fonction de génération de bilité** pour X est

$$G_X(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p(X(s) = k)\, x^k .$$

57. (*Nécessite un calcul*) Montrez que si G_X est la probabilité générer une fonction pour une variable aléatoire X telle que $X(s)$ est un entier non négatif pour tout $s \in S$, alors

a) $G_X(1) = 1$. **b)** $E(X) = G_X'(1)$.

c) $V(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2$.

58. Soit X la variable aléatoire dont la valeur est n si le le premier succès se produit sur le n ème essai lorsque indépendant Des essais de Bernoulli sont effectués, chacun avec une probabilité de succès p.

a) Trouvez une formule fermée pour la génération de probabilité fonctionner G_X.

b) Trouvez la valeur attendue et la variance de X en utilisant Exercice 57 et formulaire fermé pour la probabilité fonction génératrice trouvée dans la partie (a).

59. Soit m un entier positif. Soit X_m la variance aléatoire capable dont la valeur est n si le m ème succès se produit sur la $(n+m)$ e procès lorsque des essais indépendants de Bernoulli sont formé, chacun avec une probabilité de succès p.

a) Utilisation de l'exercice 32 dans les exercices supplémentaires du chapitre 7, montrent que la probabilité de la fonction G_{X_m} est donnée par $G_{X_m}(x) = p^m/(1-qx)^m$, où $q = 1 - p$.

b) Trouver la valeur attendue et la variance de X_m en utilisant Exercice 57 et formulaire fermé pour la probabilité fonction génératrice dans la partie (a).

60. Montrer que si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes sur un espace échantillon S tel que $X(s)$ et $Y(s)$ ne soient pas négatifs entiers pour tout $s \in S$, alors $G_{X+Y}(x) = G_X(x)\, G_Y(x)$.

Inclusion – Exclusion

introduction

Un cours de mathématiques discret contient 30 femmes et 50 étudiants de deuxième année. Combien d'étudiants dans la classe sont des femmes ou des étudiants de deuxième année? Cette question ne peut être répondue à moins des informations sont fournies. Addition du nombre de femmes dans la classe et du nombre d'étudiants de deuxième année ne donne probablement pas la bonne réponse, car les femmes en deuxième année sont comptées deux fois. Cette L'observation montre que le nombre d'élèves de la classe qui sont soit des étudiants de deuxième année soit des femmes est la somme du nombre de femmes et du nombre d'étudiants de deuxième année dans la classe moins le nombre des femmes en deuxième année. Une technique pour résoudre ces problèmes de comptage a été introduite dans

Section 6.1. Dans cette section, nous généraliserons les idées introduites dans cette section pour résoudre problèmes qui nous obligent à compter le nombre d'éléments dans l'union de plus de deux ensembles.

Le principe d'inclusion – exclusion

Combien d'éléments sont dans l'union de deux ensembles finis? Dans la section 2.2, nous avons montré que le nombre des éléments dans l'union des deux ensembles A et B est la somme des nombres d'éléments dans le définit moins le nombre d'éléments dans leur intersection. C'est,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Comme nous l'avons montré à la section 6.1, la formule du nombre d'éléments dans l'union de deux ensembles est utile pour compter les problèmes. Les exemples 1 à 3 fournissent des illustrations supplémentaires de l'utilité de cette formule.

EXEMPLE 1 Dans une classe de mathématiques discrète, chaque étudiant est majeur en informatique ou en mathématiques, ou les deux. Le nombre d'étudiants ayant une spécialisation en informatique (éventuellement avec mathématiques) est de 25; le nombre d'élèves ayant les mathématiques comme spécialité (éventuellement avec informatique) est de 13; et le nombre d'étudiants se spécialisant à la fois en informatique et les mathématiques sont 8. Combien d'élèves sont dans cette classe?

Solution: Soit A l'ensemble des étudiants de la classe spécialisé en informatique et B l'ensemble des élèves de la classe avec spécialisation en mathématiques. Alors $A \cap B$ est l'ensemble des élèves de la classe qui sont des majeures conjointes en mathématiques et en informatique. Parce que chaque élève de la classe est spécialisé en informatique ou en mathématiques (ou les deux), il s'ensuit que le nombre de étudiants de la classe sont $|A \cup B|$. Donc,

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\ &= 25 + 13 - 8 = 30. \end{aligned}$$

Par conséquent, il y a 30 élèves dans la classe. Ce calcul est illustré à la figure 1. ▲

EXEMPLE 2 Combien d'entiers positifs ne dépassant pas 1000 sont divisibles par 7 ou 11?

Solution: Soit A l'ensemble des entiers positifs ne dépassant pas 1000 qui sont divisibles par 7, et soit B l'ensemble des entiers positifs ne dépassant pas 1000 qui sont divisibles par 11. Alors $A \cup B$ est l'ensemble des nombres entiers ne dépassant pas 1000 qui sont divisibles par 7 ou 11, et $A \cap B$ est le ensemble d'entiers ne dépassant pas 1000 qui sont divisibles à la fois par 7 et 11. D'après l'exemple 2 de Section 4.1, nous savons que parmi les entiers positifs ne dépassant pas 1000, il y a $\lfloor 1000/7 \rfloor$ entiers divisibles par 7 et $\lfloor 1000/11 \rfloor$ divisibles par 11. Parce que 7 et 11 sont relativement premiers, les entiers divisibles par 7 et 11 sont ceux divisibles par $7 \cdot 11$. Par conséquent, il y a $\lfloor 1000/(11 \cdot 7) \rfloor$ entiers positifs ne dépassant pas 1000 qui sont divisibles à la fois par 7 et 11. Il s'ensuit qu'il y a

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\ &= \left\lfloor \frac{1000}{\text{sept}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{11} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{7 \cdot 11} \right\rfloor \\ &= 142 + 90 - 12 = 220 \end{aligned}$$

entiers positifs ne dépassant pas 1000 divisibles par 7 ou 11. Ce calcul est illustré à la figure 2. ▲

AB = *A* + *B* - *AB* = 25 + 13 - 8 = 30

UNE *UN B* *B*

A = 25 *AB* = 8 *B* = 13

FIGURE 1 **L'ensemble des élèves dans un Cours de mathématiques discrètes.**

AB = *A* + *B* - *AB* = 142 + 90 - 12 = 220

UNE *UN B* *B*

A = 142 *AB* = 12 *B* = 90

FIGURE 2 **L'ensemble des nombres entiers positifs non Plus de 1000 Divisible par 7 ou 11.**

L'exemple 3 montre comment trouver le nombre d'éléments dans un ensemble universel fini qui se trouvent à l'extérieur l'union de deux ensembles.

EXEMPLE 3 Supposons qu'il y ait 1807 étudiants de première année dans votre école. Parmi eux, 453 suivent un cours de informatique, 567 suivent un cours de mathématiques et 299 suivent des cours dans les deux informatique et mathématiques. Combien ne suivent pas non plus de cours en informatique ou en mathématiques?

Solution: trouver le nombre d'étudiants de première année qui ne suivent aucun cours de mathématiques ou en informatique, soustrayez le nombre de personnes qui suivent un cours dans l'une ou l'autre de ces matières du nombre total d'étudiants de première année. Soit A l'ensemble de tous les étudiants de première année suivant un cours informatique, et que B soit l'ensemble de tous les étudiants de première année suivant un cours de mathématiques. Ça suit que $|A| = 453$, $|B| = 567$ et $|A \cap B| = 299$. Le nombre d'étudiants de première année suivant un cours soit l'informatique ou les mathématiques est

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 453 + 567 - 299 = 721.$$

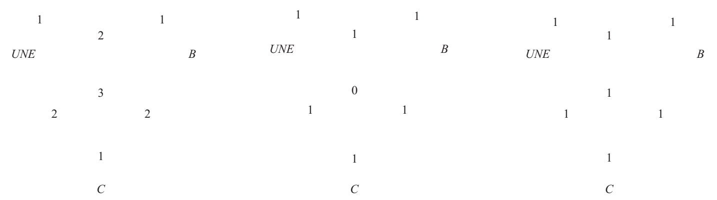
Par conséquent, il y a 1807 - 721 = 1086 étudiants de première année qui ne suivent pas de cours en informatique sciences ou mathématiques. ▲

Nous allons maintenant commencer notre développement d'une formule pour le nombre d'éléments dans l'union d'un nombre fini d'ensembles. La formule que nous développerons s'appelle le **principe de l'inclusion - exclusion** . Pour être concret, avant de considérer les unions de n ensembles, où n est un entier positif, nous tirerons une formule pour le nombre d'éléments dans l'union de trois ensembles A , B et C . À construire cette formule, on note que $|A| + |B| + |C|$ compte chaque élément qui est dans exactement un des trois ensembles une fois, des éléments qui se trouvent exactement dans deux des ensembles deux fois, et des éléments dans les trois définit trois fois. Ceci est illustré dans le premier panneau de la figure 3.

Pour supprimer le nombre excessif d'éléments dans plus d'un des ensembles, nous soustrayons le nombre d'éléments dans les intersections de toutes les paires des trois ensembles. On obtient

$$|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|.$$

Cette expression compte toujours les éléments qui se produisent dans exactement l'un des ensembles une fois. Un élément qui se produit dans exactement deux des ensembles est également compté exactement une fois, car cet élément se produira dans l'une des trois intersections d'ensembles pris deux à la fois. Cependant, ces éléments qui se produisent dans les trois ensembles seront comptés zéro fois par cette expression, car ils se produisent dans les trois intersections d'ensembles prises deux à la fois. Ceci est illustré dans le deuxième panneau de la figure 3.



a) Nombre d'éléments par

b) Nombre d'éléments par

(c) Nombre d'éléments par

FIGURE 3 **Recherche d'une formule pour le nombre d'éléments dans l'union de trois ensembles.**

Pour remédier à ce sous-dénombrement, nous ajoutons le nombre d'éléments à l'intersection des trois ensembles. Cette expression finale compte chaque élément une fois, que ce soit dans un, deux ou trois des ensembles. Donc,

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Cette formule est illustrée dans le troisième panneau de la figure 3.

L'exemple 4 illustre comment cette formule peut être utilisée.

EXEMPLE 4 Au total, 1232 étudiants ont suivi un cours d'espagnol, 879 ont suivi un cours de français, et 114 ont suivi un cours de russe. De plus, 103 ont suivi des cours d'espagnol et de Français, 23 ont suivi des cours d'espagnol et de russe et 14 ont suivi des cours dans les deux Français et russe. Si 2092 étudiants ont suivi au moins l'un des cours d'espagnol, de français et de russe, combien d'étudiants ont suivi un cours dans les trois langues?

Solution: Soit S l'ensemble des étudiants qui ont suivi un cours d'espagnol, F l'ensemble des étudiants qui ont suivi un cours de français, et R l'ensemble des étudiants qui ont suivi un cours de russe. alors

$$|S| = 1232, \qquad |F| = 879, \qquad |R| = 114,$$
$$|S \cap F| = 103, \ |S \cap R| = 23, \ |F \cap R| = 14,$$

et

$$|S \cup F \cup R| = 2092.$$

Lorsque nous insérons ces quantités dans l'équation

$$|S \cup F \cup R| = |S| + |F| + |R| - |S \cap F| - |S \cap R| - |F \cap R| + |S \cap F \cap R|$$

on obtient

$$2092 = 1232 + 879 + 114 - 103 - 23 - 14 + |S \cap F \cap R|.$$

Nous résolvons maintenant pour $|S \cap F \cap R|$. Nous constatons que $|S \cap F \cap R| = 7$. Par conséquent, il y a sept étudiants qui ont suivi des cours d'espagnol, de français et de russe. Ceci est illustré à la figure 4. ▲

S *SF* *F*

SFR

SR *FR*

R

FIGURE 4 **L'ensemble des étudiants qui ont suivi des cours en espagnol, français et russe.**

Nous allons maintenant énoncer et prouver le principe d'inclusion-exclusion, qui nous indique combien les éléments sont dans l'union d'un nombre fini d'ensembles finis.

THÉORÈME 1 **LE PRINCIPE D'INCLUSION – EXCLUSION** Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des ensembles finis. alors

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|.$$

Preuve: Nous prouverons la formule en montrant qu'un élément de l'union est compté exactement une fois par le côté droit de l'équation. Supposons que a est un membre d'exactement r du fixe $A_1, A_2, \ldots, A_n$ où $1 \le r \le n$. Cet élément est compté $C(r, 1)$ fois par $|A_i|$. Il est compté $C(r, 2)$ fois par $|A_i \cap A_j|$. En général, il est compté $C(r, m)$ fois par la somme impliquant m des ensembles A_i. Ainsi, cet élément est compté exactement

$$C(r, 1) - C(r, 2) + C(r, 3) - \cdots + (-1)^{r+1} C(r, r)$$

fois par l'expression sur le côté droit de cette équation. Notre objectif est d'évaluer cela quantité. Selon le corollaire 2 de la section 6.4, nous avons

$$C(r, 0) - C(r, 1) + C(r, 2) - \cdots + (-1)^{r} C(r, r) = 0.$$

Par conséquent,

$$1 = C(r, 0) = C(r, 1) - C(r, 2) + \cdots + (-1)^{r+1} C(r, r).$$

Par conséquent, chaque élément de l'union est compté exactement une fois par l'expression de droite côté de l'équation. Cela prouve le principe de l'inclusion-exclusion.

Le principe d'inclusion-exclusion donne une formule pour le nombre d'éléments dans l'union de n ensembles pour chaque entier positif n. Il existe des termes dans cette formule pour le nombre dans l'intersection de chaque sous-ensemble non vide de la collection des n ensembles. Par conséquent, il sont $2^n - 1$ termes dans cette formule.

EXEMPLE 5 Donner une formule pour le nombre d'éléments dans l'union de quatre ensembles.

Solution: Le principe d'inclusion-exclusion montre que

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = {} & |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| \\ & - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_4| \\ & - |A_3 \cap A_4| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| \\ & + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|.\end{aligned}$$

Notez que cette formule contient 15 termes différents, un pour chaque sous-ensemble non vide de $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$. ▲

Des exercices

1. Combien d'éléments sont dans $A_1 \cup A_2$ s'il y a 12 éléments dans A_1, 18 éléments dans A_2, et

a) $A_1 \cap A_2 = \emptyset$? **b)** $|A_1 \cap A_2| = 1$?

c) $|A_1 \cap A_2| = 6$? **d)** $A_1 \subseteq A_2$?

2. Il y a 345 étudiants dans un collège qui ont suivi un cours de calcul, 212 qui ont suivi un cours de dis- mathématiques crètes, et 188 qui ont suivi des cours de à la fois le calcul et les mathématiques discrètes. Combien d'étudiants bosses ont suivi un cours de calcul ou discret mathématiques?

3. Une enquête auprès des ménages aux États-Unis révèle que 96% ont au moins un téléviseur, 98% ont un téléphone service, et 95% ont un service téléphonique et au moins un téléviseur. Quel pourcentage de ménages dans le Les États-Unis n'ont ni service téléphonique ni télévision ensemble de sion?

4. Un rapport marketing concernant les ordinateurs personnels indique que 650 000 propriétaires achèteront une imprimante pour leurs machines l'année prochaine et 1 250 000 achèteront au moins un logiciel paquet. Si le rapport indique que 1 450 000 propriétaires acheter une imprimante ou au moins un progiciel, comment beaucoup achèteront à la fois une imprimante et au moins un logiciel paquet?

5. Trouvez le nombre d'éléments dans $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ s'il y a sont 100 éléments dans chaque ensemble et si

a) les ensembles sont disjoints deux à deux.

b) il y a 50 éléments communs dans chaque paire d'ensembles et

c) il y a 50 éléments communs dans chaque paire d'ensembles et 25 éléments dans les trois ensembles.

d) les ensembles sont égaux.

6. Trouvez le nombre d'éléments dans $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ s'il y a 100 éléments en A_1, 1000 en A_2 et 10 000 en A_3 si

a) $A_1 \subseteq A_2$ et $A_2 \subseteq A_3$.

b) les ensembles sont disjoints deux à deux.

c) il y a deux éléments communs à chaque paire d'ensembles et un élément dans les trois ensembles.

7. Il y a 2504 étudiants en informatique dans une école. De ceux-ci, 1876 ont suivi un cours à Java, 999 ont suivi Linux et 345 ont suivi un cours en C. Fur- là, 876 ont suivi des cours en Java et Linux, 231 ont suivi des cours à la fois sur Linux et C, et 290 ont suivi des cours en Java et en C. Si 189 de ces étudiants ont suivi des cours sur Linux, Java et C, combien de ces 2504 étudiants n'ont suivi aucun cours ces trois langages de programmation?

8. Dans une enquête auprès de 270 étudiants, il a été constaté que 64 choux de Bruxelles, 94 comme le brocoli, 58 comme le chou-fleur, 26 comme les choux de Bruxelles et le brocoli, 28 comme les deux brus- choux de Bruxelles et chou-fleur, 22 comme le brocoli et chou-fleur, et 14 comme les trois légumes. Combien des 270 étudiants n'aiment aucun de ces légumes?

9. Combien d'étudiants sont inscrits dans un cours soit en culus, mathématiques discrètes, structures de données ou apprendre les langues dans une école s'il y en a 507, 292, 312, et 344 étudiants dans ces cours, respectivement; 14 dans les deux calcul et structures de données; 213 en calcul et en proaucun élément dans les trois ensembles.

langages de programmation; 211 en mathématiques discrètes

et les structures de données; 43 en mathématiques discrètes et langages de programmation; et aucun élève ne peut culus et mathématiques discrètes, ou structures de données et langages de programmation, simultanément?

10. Trouvez le nombre d'entiers positifs ne dépassant pas 100 qui ne sont pas divisibles par 5 ou par 7.

11. Trouvez le nombre d'entiers positifs ne dépassant pas 100 qui sont soit impairs, soit le carré d'un entier.

12. Trouvez le nombre d'entiers positifs ne dépassant pas 1000 qui sont soit le carré ou le cube d'un entier.

13. Combien de chaînes de bits de longueur huit ne contiennent pas six 0 consécutifs?

∗ **14.** Combien de permutations des 26 lettres de l'anglais

l'alphabet ne contient aucune des chaînes *poisson* , *rat* ou *oiseau* ?

15. Combien de permutations des 10 chiffres commencent par les 3 chiffres 987, contiennent les chiffres 45 dans les cinquième et sixième positions, ou se terminent par les 3 chiffres 123?

16. Combien d'éléments sont réunis en quatre ensembles si chacun des ensembles a 100 éléments, chaque paire d'ensembles partage 50 éléments, chacun des trois ensembles partage 25 élé- et il y a 5 éléments dans les quatre ensembles?

17. Combien d'éléments sont dans l'union de quatre ensembles si le les ensembles ont respectivement 50, 60, 70 et 80 éléments paire d'ensembles a 5 éléments en commun, chaque triple de les ensembles ont 1 élément commun, et aucun élément n'est en tout quatre ensembles?

18. Combien de termes y a-t-il dans la formule du nombre d'éléments dans l'union de 10 ensembles donnés par le principe d'inclusion-exclusion?

19. Écrivez la formule explicite donnée par le principe de inclusion – exclusion pour le nombre d'éléments dans le union de cinq ensembles.

20. Combien d'éléments sont dans l'union de cinq ensembles si le les ensembles contiennent 10 000 éléments chacun, chaque paire d'ensembles a 1000 éléments communs, chaque triple d'ensembles a 100 com- éléments mon, tous les quatre des ensembles ont 10 communs éléments, et il y a 1 élément dans les cinq ensembles?

21. Écrivez la formule explicite donnée par le principe de inclusion – exclusion pour le nombre d'éléments dans le union de six ensembles quand on sait que trois de ces les ensembles ont une intersection commune.

∗ **22.** Démontrer le principe de l'inclusion-exclusion en utilisant des

induction matique.

23. Soit E_1 , E_2 et E_3 sont trois événements à partir d' un espace échantillon S . Trouvez une formule pour la probabilité de $E_1 \cup E_2 \cup E_3$.

24. Trouver la probabilité que lorsqu'une pièce de monnaie équitable est retournée cinq fois la queue revient exactement trois fois, la première et la dernière les flips remontent la queue, ou les deuxième et quatrième flips arrivent les têtes.

25. Trouver la probabilité que lorsque quatre nombres de 1 à 100, inclusivement, sont choisis au hasard sans répétitions autorisé, soit tous sont impairs, tous sont divisibles par 3, soit tous sont divisible par 5.

26. Trouver une formule pour la probabilité de l'union de quatre les événements dans un espace échantillon si trois d'entre eux ne peuvent se produire à le même temps.

27. Trouver une formule pour la probabilité de l'union de cinq événements dans un espace échantillon si quatre d'entre eux ne peuvent pas se produire à le même temps.

28. Trouver une formule pour la probabilité de l'union de n événements dans un espace échantillon lorsque deux de ces événements ne peuvent pas se produire à la fois.

29. Trouver une formule pour la probabilité de l'union de n événements dans un espace échantillon.

Applications de l'inclusion – exclusion

introduction

De nombreux problèmes de comptage peuvent être résolus en utilisant le principe de l'inclusion-exclusion.Par exemple, nous pouvons utiliser ce principe pour trouver le nombre de nombres premiers inférieurs à un entier positif.Beaucoup de problèmes peut être résolu en comptant le nombre de fonctions sur d'un ensemble fini à un autre.le le principe d'inclusion-exclusion peut être utilisé pour trouver le nombre de ces fonctions.Le célèbre le problème des écoutilles peut être résolu en utilisant le principe de l'inclusion-exclusion.Ce problème demande pour la probabilité qu'aucune personne ne reçoive le bon chapeau par une personne de contrôle qui donne les chapeaux reviennent au hasard.

Une autre forme d'inclusion-exclusion

Il existe une autre forme du principe d'inclusion-exclusion qui est utile pour compter problèmes. En particulier, ce formulaire peut être utilisé pour résoudre des problèmes qui demandent le nombre de éléments d'un ensemble qui n'ont aucune des n propriétés $P_1, P_2, ..., P_n$.

Soit A_i le sous-ensemble contenant les éléments qui ont la propriété P_i. Le nombre d'éléments avec toutes les propriétés $P_{i_1}, P_{i_2}, ..., P_{i_k}$ sera notée $N(P_{i_1} P_{i_2} ... P_{i_k})$.

En écrivant ces quantités en termes d'ensembles, nous avons

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = N(P_{i_1} P_{i_2} ... P_{i_k}).$$

Si le nombre d'éléments n'ayant aucune des propriétés $P_1, P_2, ..., P_n$ est noté $N(P_1 P_2 ... P_n)$ et le nombre d'éléments dans l'ensemble est noté N, il s'ensuit que

$$N(P_1 P_2 ... P_n) = N - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|.$$

Du principe d'inclusion-exclusion, nous voyons que

$$N(P_1 P_2 ... P_n) = N - \sum_{1 \le i \le n} N(P_i) + \sum_{1 \le i < j \le n} N(P_i P_j) - \sum_{1 \le i < j < k \le n} N(P_i P_j P_k) + \cdots + (-1)^n N(P_1 P_2 ... P_n).$$

L'exemple 1 montre comment le principe d'inclusion-exclusion peut être utilisé pour déterminer nombre de solutions en entiers d'une équation avec contraintes.

EXEMPLE 1 Combien de solutions

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11$$

ont, où x_1, x_2 et x_3 sont des entiers non négatifs avec $x_1 \le 3$, $x_2 \le 4$ et $x_3 \le 6$?

Solution: Pour appliquer le principe d'inclusion-exclusion, laissez une solution avoir la propriété P_1 si $x_1 > 3$, propriété P_2 si $x_2 > 4$ et propriété P_3 si $x_3 > 6$. Le nombre de solutions satisfaites comparer les inégalités $x_1 \le 3$, $x_2 \le 4$ et $x_3 \le 6$ est

$$N(P_1 P_2 P_3) = N - N(P_1) - N(P_2) - N(P_3) + N(P_1 P_2) + N(P_1 P_3) + N(P_2 P_3) - N(P_1 P_2 P_3).$$

En utilisant les mêmes techniques que dans l'exemple 5 de la section 6.5, il s'ensuit que

- N = nombre total de solutions = $C(3+11-1, 11) = 78$,
- $N(P_1) =$ (nombre de solutions avec $x_1 \geq 4$) $= C(3+7-1, 7) = C(9, 7) = 36$,
- $N(P_2) =$ (nombre de solutions avec $x_2 \geq 5$) $= C(3+6-1, 6) = C(8, 6) = 28$,
- $N(P_3) =$ (nombre de solutions avec $x_3 \geq 7$) $= C(3+4-1, 4) = C(6, 4) = 15$,
- $N(P_1 P_2) =$ (nombre de solutions avec $x_1 \geq 4$ et $x_2 \geq 5$) $= C(3+2-1, 2) = C(4, 2) = 6$,
- $N(P_1 P_3) =$ (nombre de solutions avec $x_1 \geq 4$ et $x_3 \geq 7$) $= C(3+0-1, 0) = 1$,
- $N(P_2 P_3) =$ (nombre de solutions avec $x_2 \geq 5$ et $x_3 \geq 7$) $= 0$,
- $N(P_1 P_2 P_3) =$ (nombre de solutions avec $x_1 \geq 4$, $x_2 \geq 5$ et $x_3 \geq 7$) $= 0$.

L'insertion de ces quantités dans la formule pour $N(P_1 P_2 P_3)$ montre que le nombre de solutions avec $x_1 \leq 3$, $x_2 \leq 4$ et $x_3 \leq 6$ est égal à

$$N(P_1 P_2 P_3) = 78 - 36 - 28 - 15 + 6 + 1 + 0 - 0 = 6$$

▲

Le tamis d'Ératosthène

Dans la section 4.3, nous avons montré comment utiliser le tamis d'Eratosthène pour trouver tous les nombres premiers inférieurs à un entier positif spécifié n . En utilisant le principe d'inclusion-exclusion, nous pouvons trouver le nombre des nombres premiers ne dépassant pas un entier positif spécifié avec le même raisonnement que celui utilisé dans le tamis d'Eratosthène. Rappelons qu'un entier composite est divisible par un nombre premier ne dépassant pas sa racine carrée. Donc, pour trouver le nombre de nombres premiers ne dépassant pas 100, notons d'abord que la composition les entiers non supérieurs à 100 doivent avoir un facteur premier non supérieur à 10. Parce que le seul les nombres premiers ne dépassant pas 10 sont 2, 3, 5 et 7, les nombres premiers ne dépassant pas 100 sont ces quatre nombres premiers et ces entiers positifs supérieurs à 1 et n'excédant pas 100 qui sont divisibles par aucun de 2, 3, 5 ou 7. Pour appliquer le principe d'inclusion-exclusion, soit P_1 la propriété qu'un l'entier est divisible par 2, soit P_2 la propriété qu'un entier soit divisible par 3, soit P_3 le propriété qu'un entier est divisible par 5, et que P_4 soit la propriété qu'un entier est divisible par 7. Ainsi, le nombre de nombres premiers ne dépassant pas 100 est

$$4 + N(P_1 P_2 P_3 P_4).$$

Parce qu'il y a 99 entiers positifs supérieurs à 1 et n'excédant pas 100, le principe de l'inclusion-exclusion montre que

$$\begin{aligned} N(P_1 P_2 P_3 P_4) = 99 &- N(P_1) - N(P_2) - N(P_3) - N(P_4) \\ &+ N(P_1 P_2) + N(P_1 P_3) + N(P_1 P_4) + N(P_2 P_3) + N(P_2 P_4) + N(P_3 P_4) \\ &- N(P_1 P_2 P_3) - N(P_1 P_2 P_4) - N(P_1 P_3 P_4) - N(P_2 P_3 P_4) \\ &+ N(P_1 P_2 P_3 P_4). \end{aligned}$$

Le nombre d'entiers ne dépassant pas 100 (et supérieur à 1) qui sont divisibles par tous les nombres premiers dans un sous-ensemble de $\{2, 3, 5, 7\}$ est $\lfloor 100/N \rfloor$, où N est le produit des nombres premiers de ce sous-ensemble.(Cette suit parce que deux de ces nombres premiers n'ont pas de facteur commun.) Par conséquent,

$$N(P_1 P_2 P_3 P_4) = 99 - \left\lfloor \frac{100}{} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{} \right\rfloor$$

2 3 5 sept

$$+\left\lfloor\frac{100}{2\cdot 3}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{100}{2\cdot 5}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{100}{2\cdot 7}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{100}{3\cdot 5}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{100}{3\cdot 7}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{100}{5\cdot 7}\right\rfloor$$

$$-\left\lfloor\frac{100}{2\cdot 3\cdot 5}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{100}{2\cdot 3\cdot 7}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{100}{2\cdot 5\cdot 7}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{100}{3\cdot 5\cdot 7}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{100}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7}\right\rfloor$$

$$= 99 - 50 - 33 - 20 - 14 + 16 + 10 + 7 + 6 + 4 + 2 - 3 - 2 - 1 + 0 + 0$$
$$= 21 .$$

Par conséquent, il y a 4 + 21 = 25 nombres premiers ne dépassant pas 100.

Le nombre de fonctions sur

Le principe d'inclusion-exclusion peut également être utilisé pour déterminer le nombre de fonctions sur d'un ensemble avec m éléments à un ensemble avec n éléments. Considérons d'abord l'exemple 2.

EXEMPLE 2 Combien y a-t-il de fonctions sur d'un ensemble à six éléments à un ensemble à trois éléments?

Solution: Supposons que les éléments du codomaine soient b_1, b_2 et b_3. Soit P_1, P_2 et P_3 soit les propriétés que b_1, b_2 et b_3 ne sont pas respectivement dans la plage de la fonction. Notez que

une fonction est sur si et seulement si elle n'a aucune des propriétés P_1, P_2 ou P_3. Par l'inclusion–principe d'exclusion, il s'ensuit que le nombre de fonctions sur d'un ensemble de six éléments à un ensemble à trois éléments est

$$N(P_1'P_2'P_3') = N - [N(P_1) + N(P_2) + N(P_3)]$$
$$+ [N(P_1P_2) + N(P_1P_3) + N(P_2P_3)] - N(P_1P_2P_3),$$

où N est le nombre total de fonctions d'un ensemble à six éléments à une à trois éléments. Nous évaluerons chacun des termes du côté droit de cette équation.

De l'exemple 6 de la section 6.1, il s'ensuit que $N = 3^6$. Notez que $N(P_i)$ est le nombre de fonctions qui n'ont pas b_i dans leur plage. Par conséquent, il existe deux choix pour la valeur du fonction à chaque élément du domaine. Par conséquent, $N(P_i) = 2^6$. De plus, il y a $C(3, 1)$ termes de ce genre. Notez que $N(P_iP_j)$ est le nombre de fonctions qui n'ont pas b_i et b_j dans leur gamme. Par conséquent, il n'y a qu'un seul choix pour la valeur de la fonction à chaque élément de le domaine. Par conséquent, $N(P_iP_j) = 1^6 = 1$. De plus, il existe $C(3, 2)$ termes de ce type. Notez également que $N(P_1P_2P_3) = 0$, car ce terme est le nombre de fonctions qui n'en ont pas de b_1, b_2 et b_3 dans leur plage. De toute évidence, il n'y a pas de telles fonctions. Par conséquent, le nombre de sur les fonctions d'un ensemble de six éléments à un avec trois éléments est

$$3^6 - C(3, 1)\, 2^6 + C(3, 2)\, 1^6 = 729 - 192 + 3 = 540.$$

▲

Le résultat général qui nous dit combien il y a de fonctions sur un ensemble avec m éléments à un avec n éléments sera maintenant indiqué. La preuve de ce résultat est laissée en exercice au lecteur.

THÉORÈME 1 Soit m et n des entiers positifs avec $m \geq n$. Ensuite, il y a

$$n^m - C(n, 1)(n-1)^m + C(n, 2)(n-2)^m - \cdots + (-1)^{n-1} C(n, n-1) \cdot 1^m$$

sur les fonctions d'un ensemble avec m éléments à un ensemble avec n éléments.

Compter sur les fonctions est beaucoup plus difficile que compter un à un les fonctions!

Une fonction sur d'un ensemble de m éléments à un ensemble de n éléments correspond à un façon de distribuer les m éléments du domaine à n cases indiscernables de sorte qu'aucune case ne soit vide, puis d'associer chacun des n éléments du domaine codé à une boîte. Cela signifie que le nombre de fonctions sur d'un ensemble avec m éléments à un ensemble avec n éléments est le nombre de façons de répartir m objets distinctifs dans n boîtes indiscernables de sorte qu'aucune boîte ne soit vide multiplié par le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments. Par conséquent, le nombre de fonctions sur depuis un ensemble avec m éléments vers un ensemble avec n éléments est égal à $n! S(m, n)$, où $S(m, n)$ est un *nombre de Stirling du deuxième type* défini à la section 6.5. Cela signifie que nous pouvons utiliser le théorème 1 pour déduire la formule donnée à la section 6.5 pour $S(m, n)$. (Voir le chapitre 6 de [MiRo91] pour plus de détails sur les nombres de Stirling du second type.)

Une des nombreuses applications différentes du Théorème 1 va maintenant être décrite.

EXEMPLE 3 De combien de façons existe-t-il d'affecter cinq emplois différents à quatre employés différents l'employé se voit attribuer au moins un emploi?

Solution: considérez l'affectation des tâches en fonction de l'ensemble de cinq tâches à l'ensemble de quatre employés. Une affectation où chaque employé obtient au moins un emploi est la même chose qu'un

sur la fonction de l'ensemble des emplois à l'ensemble des employés. Par conséquent, par le théorème 1, il s'ensuit que il y a

$$4^5 - C(4, 1)3^5 + C(4, 2)2^5 - C(4, 3)1^5 = 1024 - 972 + 192 - 4 = 240$$

des façons d'affecter les tâches afin que chaque employé se voit attribuer au moins une tâche. ▲

Dérangements

Le principe d'inclusion-exclusion sera utilisé pour compter les permutations de n objets qui ne laissez aucun objet dans sa position d'origine. Prenons l'exemple 4.

EXEMPLE 4 **Le problème des écoutilles** Un nouvel employé vérifie les chapeaux de n personnes dans un restaurant, oubliant mettre des numéros de chèque de réclamation sur les chapeaux Lorsque les clients reviennent pour leurs chapeaux, le vérificateur donne les dos chapeaux choisis au hasard parmi les chapeaux restants. Quelle est la probabilité que personne ▲

reçoit le bon chapeau?

Remarque: La réponse est le nombre de façons dont les chapeaux peuvent être disposés de sorte qu'il n'y ait pas de chapeau dans sa position d'origine divisée par n !, le nombre de permutations de n chapeaux. Nous y reviendrons exemple après avoir trouvé le nombre de permutations de n objets qui ne laissent aucun objet dans leur position initiale.

Un **dérangement** est une permutation d'objets qui ne laisse aucun objet dans sa position d'origine. À résoudre le problème posé dans l'exemple 4, nous devrons déterminer le nombre de dérangements d'un ensemble de n objets.

EXEMPLE 5 La permutation 21453 est un dérangement de 12345 car aucun nombre n'est laissé dans son original position. Cependant, 21543 n'est pas un dérangement de 12345, car cette permutation laisse 4 fixé. ▲

Soit D_n le nombre de dérangements de n objets. Par exemple, $D_3 = 2$, car le les dérangements de 123 sont 231 et 312. Nous évaluerons D_n, pour tous les entiers positifs n, en utilisant le principe d'inclusion-exclusion.

THÉORÈME 2 Le nombre de dérangements d'un ensemble à n éléments est

$$D_n = n!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right].$$

Preuve: Soit une permutation ayant la propriété P_i si elle fixe l'élément i. Le nombre de dérangements est le nombre de permutations n'ayant aucune des propriétés P_i pour $i = 1, 2, \ldots, n$. Ça signifie cette

$$D_n = N(P_1 P_2 \ldots P_n).$$

En utilisant le principe de l'inclusion-exclusion, il s'ensuit que

$$D_n = N - \sum_{je} N(P_i) + \sum_{i<j} N(P_i P_j) - \sum_{i<j<k} N(P_i P_j P_k) + \cdots + (-1)^n N(P_1 P_2 \ldots P_n),$$

où N est le nombre de permutations de n éléments. Cette équation indique que le nombre de permutations qui ne fixent aucun élément est égal au nombre total de permutations, moins le nombre qui fixer au moins un élément, plus le nombre qui fixe au moins deux éléments, moins le nombre qui fixe au moins trois éléments, etc. Toutes les quantités qui se trouvent sur le côté droit de cette l'équation va maintenant être trouvée.

Tout d'abord, notez que $N = n$!, Car N est simplement le nombre total de permutations de n éléments. Aussi, $N(P_i) = (n - 1)$!. Cela découle de la règle du produit, car $N(P_i)$ est le nombre de permutations qui fixent l'élément i, donc la i ème position de la permutation est déterminée, mais chaque des postes restants peuvent être pourvus arbitrairement. De même,

$$N(P_i P_j) = (n-2)!,$$

parce que c'est le nombre de permutations qui fixent les éléments i et j , mais où le d'autres $n - 2$ éléments peuvent être arrangés arbitrairement. En général, notez que

$$N(P_{i_1} P_{i_2} \ldots P_{i_m}) = (n-m)!,$$

car c'est le nombre de permutations qui fixent les éléments $i_1, i_2, \ldots, i_m$, mais où le d'autres $n - m$ éléments peuvent être arrangés arbitrairement. Parce qu'il y a $C(n, m)$ façons de choisir m éléments de n , il s'ensuit que

$$\sum_{1 \le i \le n} N(P_i) = C(n,1)(n-1)!,$$

$$\sum_{1 \le i < j \le n} N(P_i P_j) = C(n,2)(n-2)!,$$

et en général,

$$\sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_m \le n} N(P_{i_1} P_{i_2} \ldots P_{i_m}) = C(n,m)(n-m)!.$$

Par conséquent, l'insertion de ces quantités dans notre formule pour D_n donne

$$D_n = n! - C(n,1)(n-1)! + C(n,2)(n-2)! - \cdots + (-1)^n C(n,n)(n-n)!$$

$$= n! - \frac{n!}{1!\,(n-1)!}(n-1)! + \frac{n!}{2!\,(n-2)!}(n-2)! - \cdots + (-1)^n \frac{n!}{n!\,0!}0!.$$

Simplifier cette expression donne

$$D_n = n!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right].$$

NOTE HISTORIQUE Dans les *rencontres* , un ancien jeu de cartes français, les 52 cartes d'un jeu sont disposées dans une rangée. Les cartes d'un deuxième jeu sont disposées avec une carte du deuxième jeu au-dessus de chaque carte de le premier pont. Le score est déterminé en comptant le nombre de cartes correspondantes dans les deux jeux. En 1708 Pierre Raymond de Montmort (1678-1719) pose *le problème des rencontres:* Quelle est la probabilité qu'aucun les matchs se déroulent dans le jeu des rencontres? La solution au problème de Montmort est la probabilité qu'un permutation aléatoire de 52 objets est un Dérangement, à savoir, $D_{52} / 52!$, qui, comme nous le verrons, est environ $1/e$.

TABLEAU 1 **La probabilité d'un dérangement.**

n	2	3	4	5	6	*sept*

$D_n/n!$	0,50000	0,33333	0,37500	0,36667	0,36806	0,36786

Il est maintenant simple de trouver D_n pour un entier positif donné n . Par exemple, en utilisant le théorème 2, il s'ensuit que

$$D_3 = 3!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right] = 6\left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) = 2,$$

comme nous l'avons déjà remarqué.

La solution du problème de l'exemple 4 peut maintenant être donnée.

Solution: La probabilité que personne ne reçoive le chapeau correct est $D_n/n!$. Par le théorème 2, ce la probabilité est

$$\frac{D_n}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}.$$

Les valeurs de cette probabilité pour $2 \leq n \leq 7$ sont affichées dans le tableau 1.

En utilisant des méthodes de calcul, on peut montrer que

$$e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} + \cdots \approx 0.368.$$

Parce qu'il s'agit d'une série alternée avec des termes tendant vers zéro, il s'ensuit que lorsque n croît sans lié, la probabilité que personne ne reçoive le chapeau correct converge vers $e^{-1} \approx 0.368$. En fait, cette probabilité peut être montrée à $1/(n+1)!$ de e^{-1} . ◄

Des exercices

1. Supposons que dans un boisseau de 100 pommes, 20 ont des vers et 15 qui ont des ecchymoses. Seuls ceux des pommes sans vers ni contusions peuvent être vendues. S'il y a sont 10 pommes meurtries qui ont des vers en eux, combien des 100 pommes peuvent-elles être vendues?

2. Sur 1000 candidats pour un voyage d'alpinisme dans le Himalaya, 450 souffrent du mal de l'altitude, 622 ne sont pas en bonne santé assez de forme, et 30 ont des allergies. Un demandeur si et seulement si ce demandeur ne prend pas d'altitude maladie, est en bonne forme et n'a pas d'allergies. Si il y a 111 candidats qui souffrent du mal de l'altitude et sont pas en assez bonne forme, 14 qui ont le mal de l'altitude et avez des allergies, 18 qui ne sont pas en assez bonne forme et avez des allergies, et 9 qui ont le mal de l'altitude, sont pas en assez bonne forme, et avez des allergies, combien les candidats sont-ils admissibles?

3. Combien de solutions l'équation $x_1 + x_2 + x_3 =$ 13 ont où x_1 , x_2 et x_3 sont des entiers non négatifs moins que 6?

4. Trouvez le nombre de solutions de l'équation $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17$, où x_i , $i = 1, 2, 3, 4$, sont non négatifs entiers tels que $x_1 \leq 3$, $x_2 \leq 4$, $x_3 \leq 5$ et $x_4 \leq 8$.

5. Trouvez le nombre de nombres premiers inférieurs à 200 en utilisant principe d'inclusion-exclusion.

6. Un entier est appelé sans **carré** s'il n'est pas divisible par le carré d'un entier positif supérieur à 1. Trouvez le nombre d'entiers positifs sans carré inférieur à 100.

7. Combien d'entiers positifs inférieurs à 10 000 ne sont pas deuxième puissance ou plus d'un entier?

8. Combien y a-t-il de fonctions sur un ensemble de sept éléments à un avec cinq éléments?

9. Combien y a-t-il de façons de distribuer six jouets différents à trois enfants différents de sorte que chaque enfant obtient au moins un jouet?

10. De combien de façons peut-on distribuer huit balles distinctes en trois urnes distinctes si chaque urne doit contenir au moins une balle?

11. De combien de façons peut-on attribuer sept emplois différents à quatre employés différents afin que chaque employé soit signé au moins un travail et le travail le plus difficile est signé au meilleur employé?

12. Énumérez tous les dérangements de $\{1, 2, 3, 4\}$.

13. Combien de dérangements y a-t-il d'un ensemble de sept éléments?

14. Quelle est la probabilité qu'aucune personne sur 10 ne reçoive le bon chapeau si une personne à l'écoutille rend son chapeau au hasard?

15. Une machine qui insère des lettres dans des enveloppes se détraque et insère des lettres au hasard dans des enveloppes. Quel est le probabilité que dans un groupe de 100 lettres

a) aucune lettre n'est placée dans la bonne enveloppe?

b) exactement une lettre est placée dans la bonne enveloppe?

c) exactement 98 lettres sont placées dans les bonnes enveloppes?

d) exactement 99 lettres sont placées dans les bonnes enveloppes?

e) toutes les lettres sont placées dans les bonnes enveloppes?

16. Un groupe de n étudiants se voit attribuer des sièges pour chacun des deux cours dans la même classe. De combien de façons ces des places soient attribuées si aucun étudiant ne se voit attribuer le même siège pour les deux classes?

∗ **17.** De combien de façons les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 peuvent-ils être disposés de sorte qu'aucun chiffre pair ne soit dans sa position d'origine?

∗ **18.** Utilisez un argument combinatoire pour montrer que la séquence $\{D_n\}$, où D_n désigne le nombre de dérangements de n objets, satisfait la relation de récurrence

$$D_n = (n - 1)(D_{n-1} + D_{n-2})$$

pour $n \geq 2$. [*Astuce:* Notez qu'il y a n - 1 choix pour le premier élément k d'un dérangement. Considérez séparément le dérangements qui commencent par k qui ont et n'ont pas 1 en k ème position.]

∗ **19.** Utilisez l'exercice 18 pour montrer que

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$$

pour $n \geq 1$.

20. Utilisez l'exercice 19 pour trouver une formule explicite pour D_n.

21. Pour lesquels n entiers positifs n est D_n, le nombre de rangements de n objets, même?

22. Supposons que p et q soient des nombres premiers distincts. Utilisez le principe d'inclusion-exclusion pour trouver $\varphi(pq)$, le nombre d'entiers positifs ne dépassant pas pq qui sont relativement premier à pq.

∗ **23.** Utiliser le principe de l'inclusion-exclusion pour dériver une mula pour $\varphi(n)$ lorsque la factorisation première de n est

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_m^{a_m}.$$

∗ **24.** Montrer que si n est un entier positif, alors

$$n! = C(n, 0) D_n + C(n, 1) D_{n-1} + \cdots + C(n, n-1) D_1 + C(n, n) D_0,$$

où D_k est le nombre de dérangements de k objets.

25. Combien de dérangements de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ commencent par les entiers 1, 2 et 3, dans un certain ordre?

26. Combien de dérangements de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ se terminent par le entiers 1, 2 et 3, dans un certain ordre?

27. Prouvez le théorème 1.

Termes et résultats clés

TERMES

relation de récurrence: une formule exprimant les termes d'une par conséquent, sauf pour certains termes initiaux, en fonction d'un ou plusieurs termes précédents de la séquence

conditions initiales d'une relation de récurrence: les valeurs de la termes d'une séquence satisfaisant la relation de récurrence avant cette relation prend effet

programmation dynamique : un paradigme algorithmique qui trouve la solution à un problème d'optimisation en récursivement décomposer le problème en sous-problèmes qui se chevauchent et combiner leurs solutions à l'aide d'une récidive relation

relation de récurrence homogène linéaire avec co-efficients: une relation de récurrence qui exprime les termes de une séquence, sauf les termes initiaux, comme une combinaison linéaire de termes précédents

racines caractéristiques d'une récurrence linéaire homogène relation avec des coefficients constants: les racines du poly-nominal associé à une récurrence linéaire homogène relation avec des coefficients constants

relation de récurrence linéaire non homogène avec constante coefficients: une relation de récurrence qui exprime les termes d'une séquence, à l'exception des termes initiaux, comme une combinaison linéaire tion des termes précédents plus une fonction qui n'est pas identique zéro qui ne dépend que de l'indice

algorithme de division et de conquête: un algorithme qui résout un problème récursivement en le divisant en un nombre fixe de sous-problèmes plus petits non chevauchants du même type

fonction génératrice d'une séquence: la série formelle qui a le n ème terme de la séquence comme coefficient de x^n

tamis d'Eratosthène: une procédure pour trouver les nombres premiers moins qu'un entier positif spécifié

dérangement: une permutation d'objets telle qu'aucun objet n'est à sa place d'origine

RÉSULTATS

la formule du nombre d'éléments dans l'union de deux ensembles finis:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

la formule du nombre d'éléments dans l'union de trois ensembles finis:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

le principe d'inclusion-exclusion:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

le nombre de fonctions sur d'un ensemble avec *m* éléments à un ensemble avec *n* éléments:

$$n^m - C(n, 1)(n-1)^m + C(n, 2)(n-2)^m - \cdots + (-1)^{n-1} C(n, n-1) \cdot 1^m$$

le nombre de dérangements de *n* objets:

$$D_n = n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right]$$

Questions de révision

1. a) Qu'est-ce qu'une relation de récurrence?

b) Trouver une relation de récurrence pour le montant d'argent qui sera dans un compte après n années si 1 000 000 $ est déposé dans un compte rapportant 9% par an.

2. Expliquez comment les nombres de Fibonacci sont utilisés pour résoudre Fi- le problème de bonacci sur les lapins.

3. a) Trouvez une relation de récurrence pour le nombre d'étapes nécessaire pour résoudre le puzzle de la tour de Hanoi.

b) Montrer comment cette relation de récurrence peut être résolue en utilisant itération.

4. a) Expliquez comment trouver une relation de récurrence pour le nombre nombre de chaînes de bits de longueur n ne contenant pas deux con- secutive 1s.

b) Décrivez un autre problème de comptage qui a une solution satisfaisant la même relation de récurrence.

5. a) Qu'est-ce **qu'une** programmation dynamique et comment se reproduisent les relations utilisées dans les algorithmes qui suivent ce paradigme?

b) Expliquez comment la programmation dynamique peut être utilisée pour planifier des entretiens dans une salle de conférence à partir d'un ensemble de possibles discussions pour maximiser la fréquentation globale.

6. Définir une relation de récurrence linéaire homogène de dé- gree k .

7. a) Expliquer comment résoudre une récurrence linéaire homogène relations de degré 2.

b) Résoudre la relation de récurrence $a_n = 13a_{n-1} - 22a_{n-2}$ pour $n \geq 2$ si $a_0 = 3$ et $a_1 = 15$.

c) Résoudre la relation de récurrence $a_n = 14a_{n-1} - 49a_{n-2}$ pour $n \geq 2$ si $a_0 = 3$ et $a_1 = 35$.

8. a) Explique comment trouver $f(b^k)$ où k est un entier positif ger si $f(n)$ satisfait la récurrence diviser pour régner relation $f(n) = af(n/b) + g(n)$ chaque fois que b *se* divise l'entier positif n .

b) Trouvez $f(256)$ si $f(n) = 3f(n/4) + 5n/4$ et $f(1) = 7$.

9. a) Dériver une relation de récurrence diviser pour mieux régner pour le nombre de comparaisons utilisées pour trouver un nombre dans une liste utilisant une recherche binaire.

b) Donnez une estimation du grand O pour le nombre de comparaisons utilisé par une recherche binaire du diviser pour mieux régner relation de récurrence que vous avez donnée en (a) en utilisant le théorème 1 dans la section 8.3.

10. a) Donnez une formule pour le nombre d'éléments dans l'union de trois ensembles.

b) Expliquez pourquoi cette formule est valide.

c) Expliquez comment utiliser la formule de (a) pour trouver le nombre d'entiers n'excédant pas 1000 qui sont divisés ible par 6, 10 ou 15.

d) Expliquez comment utiliser la formule de (a) pour trouver le nombre de solutions en entiers non négatifs à la équation $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 22$ avec $x_1 < 8$, $x_2 < 6$ et $x_3 < 5$.

11. a) Donnez une formule pour le nombre d'éléments dans l'union de quatre ensembles et expliquer pourquoi il est valide.

b) Supposons que les ensembles A_1 , A_2 , A_3 et A_4 contiennent chacun 25 éléments, l'intersection de deux de ces ensembles contient 5 éléments, l'intersection de trois d'entre eux ensembles contient 2 éléments, et 1 élément est dans les quatre des ensembles. Combien d'éléments sont dans l'union de la quatre ensembles?

12. a) Énoncer le principe de l'inclusion-exclusion.

b) Esquissez une preuve de ce principe.

13. Expliquez comment le principe de l'inclusion-exclusion peut être utilisé pour compter le nombre de fonctions sur à partir d'un ensemble avec m éléments à un ensemble avec n éléments.

14. a) Comment pouvez-vous compter le nombre de façons d'attribuer m emplois à n employés afin que chaque employé soit affecté au moins un emploi?

b) De combien de manières existe-t-il pour attribuer sept emplois employés afin que chaque employé soit affecté au moins un emploi?

15. Expliquez comment le principe d'inclusion-exclusion peut être utilisé pour compter le nombre de nombres premiers ne dépassant pas la entier positif *n* .

16. a) Définissez un dérangement.

b) Pourquoi compte-t-on le nombre de façons dont un fils peut rendre des chapeaux à *n* personnes, afin que personne ne reçoive le bon chapeau, la même chose que de compter le nombre de dérangements de *n* objets?

c) Expliquer comment compter le nombre de dérangements de *n* objets.

Exercices supplémentaires

1. Un groupe de 10 personnes commence une chaîne de lettres, chaque fils envoyant la lettre à quatre autres personnes. Chacun de ces les gens envoient la lettre à quatre personnes supplémentaires.

a) Trouver une relation de récurrence pour le nombre de lettres envoyé au *n* ème stade de cette chaîne, si personne reçoit jamais plus d'une lettre.

b) Quelles sont les conditions initiales de la relation de récidive dans la partie a)?

c) Combien de lettres sont envoyées au *n* ème stade de la chaîne lettre?

2. Un réacteur nucléaire a créé 18 grammes d'un particulier isotope radioactif. Toutes les heures, 1% de cette radioactivité les isotopes se désintègrent.

a) Établissez une relation de récurrence pour le montant de cette l'isotope a quitté *n* heures après sa création.

b) Quelles sont les conditions initiales de la relation de récidive dans la partie a)?

c) Résolvez cette relation de récurrence.

3. Chaque heure, le gouvernement américain imprime 10 000 $ de plus 1 $ billets, 4000 de plus 5 $, 3000 de plus 10 $, 2500 de plus Billets de 20 $, 1000 billets de plus de 50 $ et le même nombre de Billets de 100 $ comme à l'heure précédente. Dans l'heure initiale 1000 de chaque facture ont été produites.

a) Mettre en place une relation de récurrence pour le montant d'argent produit à la *n* ième heure.

b) Quelles sont les conditions initiales de la relation de récidive dans la partie a)?

c) Résoudre la relation de récurrence pour le montant d'argent produit à la *n* ième heure.

d) Établir une relation de récurrence pour le montant total de l'argent produit dans les *n* premières heures.

e) Résoudre la relation de récurrence pour le montant total de l'argent produit dans les *n* premières heures.

4. Supposons que chaque heure il y a deux nouvelles bactéries dans un colonie pour chaque bactérie qui était présente la précédente heure, et que toutes les bactéries âgées de 2 heures meurent. La colonie commence avec 100 nouvelles bactéries.

a) Établir une relation de récurrence pour le nombre de bactéries présent après *n* heures.

b) Quelle est la solution de cette relation de récurrence?

c) Quand la colonie contiendra-t-elle plus d'un million de bac- teria?

5. Les messages sont envoyés sur un canal de communication en utilisant deux signaux différents. Un signal nécessite 2 microsecondes pour la transmission, et l'autre signal nécessite 3 microsec- onds pour la transmission. Chaque signal d'un message est suivi immédiatement par le signal suivant.

a) Trouver une relation de récurrence pour le nombre de différents signaux pouvant être envoyés en *n* microsecondes.

b) Quelles sont les conditions initiales de la relation de récidive dans la partie a)?

c) Combien de messages différents peuvent être envoyés en 12 millions crosecondes?

6. Un petit bureau de poste n'a que des timbres de 4 cents, 6 cents timbres et timbres de 10 cents. Trouver une relation de récurrence pour le nombre de façons de former l'affranchissement de *n* cents avec ces tampons si l'ordre dans lequel les tampons sont utilisés ters. Quelles sont les conditions initiales de cette récidive relation?

7. De combien de façons existe-t-il pour former ces affranchissements les règles décrites dans l'exercice 6?

a) 12 cents **b)** 14 cents
c) 18 cents **d)** 22 cents

8. Trouver les solutions du système simultané de récurrence relations de présence

$$a_n = a_{n-1} + b_{n-1}$$
$$b_n = a_{n-1} - b_{n-1}$$

avec $a_0 = 1$ et $b_0 = 2$.

9. Résoudre la relation de récurrence $a_n = a^2_{n-1} / a_{n-2}$ si $a_0 = 1$ et $un_1 = 2$. [*Astuce:* Prenez les logarithmes des deux côtés pour obtenir une relation de récurrence pour le log de séquence a_n, $n = 0, 1, 2, ...$]

∗ **10.** Résoudre la relation de récurrence $a_n = a^3_{n-1} a^2_{n-2}$ si $un_0 = 2$ et $un_1 = 2$. (Voir le conseil pour l'exercice 9.)

11. Trouver la solution de la relation de récurrence $a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3} + 1$ si $a_0 = 2$, $a_1 = 4$ et $a_2 = 8$.

12. Trouver la solution de la relation de récurrence $a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3}$ si $a_0 = 2$, $a_1 = 2$ et $a_2 = 4$.

∗ **13.** Supposons que dans l'exemple 1 de la section 8.1, une paire de lapins quitte l'île après avoir reproduit deux fois. Trouver un récidiviste relation de référence pour le nombre de lapins sur l'île au milieu du *n* ème mois.

∗ **14.** Dans cet exercice, nous construisons une programmation dynamique gorithme pour résoudre le problème de la recherche d'un sous-ensemble *S* des éléments choisis parmi un ensemble de *n* éléments où l'élément *i* a un poids w_i, qui est un entier positif, de sorte que le to- Le poids total des éléments en *S* est un maximum mais ne dépasser une limite de poids fixe W . Soit $M(j, w)$ le poids total maximum des articles dans un sous-ensemble du premiers j articles tels que ce poids total ne dépasse pas w . Ce problème est connu sous le nom de **problème de sac à dos** .

a) Montrer que si $w_j > w$, alors $M(j, w) = M(j - 1, w)$.

b) Montrer que si $w_j \leq w$, alors $M(j, w) =$ max $(M(j - 1, w), w_j + M(j - 1, w - w_j))$.

c) Utiliser (a) et (b) pour construire une programmation dynamique algorithme pour déterminer le poids total maximum des articles pour que ce poids total ne dépasse pas W . Dans votre algorithme, stockez les valeurs $M(j, w)$ telles qu'elles sont a trouvé.

d) Expliquez comment vous pouvez utiliser les valeurs $M(j, w)$ commis par l'algorithme dans la partie (c) pour trouver un sous-ensemble de articles dont le poids total maximum ne dépassant pas W .

Dans les exercices 15 à 18, nous développons une programmation dynamique gorithme pour trouver une sous-séquence commune la plus longue de deux séquences $a_1, a_2, ..., a_m$ et $b_1, b_2, ..., b_n$, un important problème dans la comparaison de l'ADN de différents organismes.

15. Supposons que $c_1, c_2, ..., c_p$ est une plus longue commune sous-séquence des séquences $a_1, a_2, ..., a_m$ et $b_1, b_2, ..., b_n$.

a) Montrer que si $a_m = b_n$, alors $c_p = a_m = b_n$ et $c_1, c_2, ..., c_{p-1}$ est une sous-séquence commune la plus longue de $a_1, a_2, ..., a_{m-1}$ et $b_1, b_2, ..., b_{n-1}$ lorsque $p > 1$.

b) Supposons que $a_m = b_n$. Montrer que si $c_p = a_m$, alors $c_1, c_2, ..., c_p$ est une sous-forme commune la plus longue quence d' $un_1, un_2, ..., a_{m-1}$ et $b_1, b_2, ..., b_n$ et montrent également que si $c_p = b_n$, alors $c_1, c_2, ..., c_p$ est a la plus longue sous- séquence commune d' $un_1, un_2, ..., a_m$ et $b_1, b_2, ..., b_{n-1}$.

16. Soit $L(i, j)$ la longueur d'un plus long com- séquence mon d' $un_1, un_2, ..., a_i$ et $b_1, b_2, ..., b_j$, où $0 \leq i \leq m$ et $0 \leq j \leq n$. Utilisez les parties (a) et (b) de l'exercice 15 pour montrer que $L(i, j)$ satisfait la récurrence relation de référence $L(i, j) = L(i - 1, j - 1) + 1$ si les deux i et j sont non nuls et $a_i = b_i$, et $L(i, j) =$ max $(L(i, j - 1), L(i - 1, j))$ si i et j sont tous deux non nuls et $a_i = b_i$, et la condition initiale $L(i, j) = 0$ si $i = 0$ ou $j = 0$.

17. Utilisez l'exercice 16 pour construire une programmation dynamique algorithme de calcul de la longueur d'une plus longue commun sous-séquence de deux séquences $a_1, a_2, ..., a_m$ et $b_1, b_2, ..., b_n$, stockant les valeurs de $L(i, j)$ telles qu'elles sont a trouvé.

18. Développer un algorithme pour trouver une plus longue commun sous-séquence de deux séquences $a_1, a_2, ..., a_m$ et $b_1, b_2, ..., b_n$ en utilisant les valeurs $L(i, j)$ trouvées par l'algo- dans l'exercice 17.

19. Trouver la solution de la relation de récurrence $f(n) = f(n/2) + n^2$ pour $n = 2^k$ où k est un entier positif et $f(1) = 1$.

20. Trouver la solution de la relation de récurrence $f(n) = 3f(n/5) + 2n^4$, lorsque n est divisible par 5, pour $n = 5^k$, où k est un entier positif et $f(1) = 1$.

21. Donnez une estimation de grand O pour la taille de f dans l'exercice 20 si f est une fonction croissante.

22. Trouvez une relation de récurrence qui décrit le nombre de comparaisons utilisées par l'algorithme suivant: les plus grands et les deuxièmes plus grands éléments d'une séquence de n nombres récursivement en divisant la séquence en deux sous-séquences avec un nombre égal de termes, ou où il y a un terme de plus dans une sous-séquence que dans le à chaque étape. Arrêter lorsque des sous-séquences avec deux termes sont atteints.

23. Donnez une estimation de grand O pour le nombre de comparaisons utilisé par l'algorithme décrit dans l'exercice 22.

24. Une séquence $a_1, a_2, ..., a_n$ est **unimodale** si et seulement si il y a un indice m , $1 \leq m \leq n$, tel que $a_i < a_{i+1}$ lorsque $1 \leq i < m$ et $a_i > a_{i+1}$ lorsque $m \leq i < n$. Cette est, les termes de la séquence augmentent strictement jusqu'à ce que le m e terme et ils diminuent strictement après, ce qui implique que un_m est le plus grand terme. Dans cet exercice, un_m sera al - les moyens dénotent le plus grand terme de la séquence unimodale $a_1, a_2, ..., a_n$.

a) Montrer que a_m est le terme unique de la séquence qui est supérieur à la fois le terme qui le précède immédiatement et le terme qui le suit immédiatement.

b) Montrer que si $a_i < a_{i+1}$ où $1 \leq i < n$, alors $i + 1 \leq m \leq n$.

c) Montrer que si $a_i > a_{i+1}$ où $1 \leq i < n$, alors $1 \leq m \leq i$.

d) Développer un algorithme de division et de conquête pour localiser l'indice m . [*Indice:* supposons que $i < m < j$. Utilisez les parties (a), (b) et (c) pour déterminer si $\lfloor (i+j)/2 \rfloor + 1 \leq m \leq n$, $1 \leq m \leq \lfloor (i+j)/2 \rfloor - 1$, ou $m = \lfloor (i+j)/2 \rfloor$.]

25. Montrer que l'algorithme de l'exercice 24 a le pire des cas complexité temporelle $O(\log n)$ en termes de nombre de comparaisons.

Soit $\{a_n\}$ une suite de nombres réels. La **différence rences** de cette séquence sont définies récursivement comme suit: bas: La **première différence en avant** est $a_n = a_{n+1} - a_n$; le ***(k + 1)* st différence vers l'avant** $^{k+1}a_n$ est obtenu à partir de $^{k}a_n$ par $^{k+1}a_n = {}^{k}a_{n+1} - {}^{k}a_n$.

26. Trouvez un_n , où

a) $a_n = 3$. **b)** $a_n = 4n + 7$. **c)** $a_n = n^2 + n + 1$.

27. Soit $a_n = 3n^3 + n + 2$. Trouvez $^{k}a_n$, où k est égal à

a) 2. **b)** 3. **c)** 4.

∗ **28.** Supposons que $a_n = P(n)$, où P est un polynôme de degree d . Prouve-le $^{d+1}a_n = 0$ pour toutes les intégrations non négatives gers n .

29. Soit $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ des séquences de nombres réels. Spectacle cette

$$(a_n b_n) = a_{n+1}(b_n) + b_n(a_n).$$

30. Montrer que si $F(x)$ et $G(x)$ sont les fonctions génératrices pour les séquences $\{a_k\}$ et $\{b_k\}$, respectivement, et c et d sont des nombres réels, alors $(cF + dG)(x)$ est le fonction génératrice pour $\{ca_k + db_k\}$.

31. (*Nécessite un calcul*) Cet exercice montre comment générer les fonctions peuvent être utilisées pour résoudre la relation de récurrence $(n + 1)\, a_{n+1} = a_n + (1 / n!)$ pour $n \geq 0$ aux conditions initiales tion $a_0 = 1$.

a) Soit $G(x)$ la fonction génératrice de $\{ a_n \}$. Spectacle que $G(x) = G(x) + e^x$ et $G(0) = 1$.

b) Montrer de la partie (a) que $(e^{-x} G(x)) = 1$, et conclure que $G(x) = xe^x + e^x$.

c) Utilisez la partie (b) pour trouver une forme fermée pour un_n.

32. Supposons que 14 étudiants reçoivent un A au premier examen dans une classe de mathématiques discrète, et 18 reçoivent un A sur le deuxième examen. Si 22 étudiants ont reçu un A sur le premier examen ou le deuxième examen, combien d'étudiants reçu un A aux deux examens?

33. Il y a 323 fermes dans le comté de Monmouth qui ont au moins au moins un des chevaux, des vaches et des moutons. Si 224 ont des chevaux, 85 ont des vaches, 57 ont des moutons et 18 fermes ont les trois types d'animaux, combien de fermes ont exactement deux ces trois types d'animaux?

34. Requêtes dans une base de données de dossiers d'étudiants d'un collège ont produit les données suivantes: il y a 2175 étudiants au collège, 1675 d'entre eux ne sont pas des étudiants de première année, 1074 étudiants ont suivi un cours de calcul, 444 étudiants ont suivi une cours de mathématiques discrètes, 607 élèves ne sont pas hommes et ont pris le calcul, 350 étudiants ont pris calcul et mathématiques discrètes, 201 élèves ne sont pas étudiants de première année et ont pris des mathématiques discrètes, et 143 les étudiants ne sont pas des étudiants de première année et ont pris les deux calculs et mathématiques discrètes. Toutes les réponses à la les requêtes sont-elles correctes?

35. Les élèves de l'école de mathématiques d'une université dans un ou plusieurs des quatre domaines suivants: appliqué mathématiques (AM), mathématiques pures (PM), opérations recherche (OR) et informatique (CS). Combien les élèves sont dans cette école si (y compris les majors conjointes) il 23 étudiants se spécialisent en MA; 17 en PM; 44 en salle d'opération; 63 dans CS; 5 en AM et PM; 8 en AM et CS; 4 heures du matin et OU; 6 en PM et CS; 5 en PM et OR; 14 en OR et CS; 2 en PM, OR et CS; 2 en AM, OR et CS; 1 en PM, AM et OR; 1 en PM, AM et CS; et 1 sur les quatre des champs.

36. Combien de termes sont nécessaires lorsque l'inclusion– Le principe d'exclusion est utilisé pour exprimer le nombre dans l'union de sept ensembles si cinq au plus des ces ensembles ont un élément commun?

37. Combien y a-t-il de solutions en nombres entiers positifs à l'équation $x_1 + x_2 + x_3 = 20$ avec $2 < x_1 < 6$, $6 < x_2 < 10$ et $0 < x_3 < 5$?

38. Combien d'entiers positifs inférieurs à 1 000 000 sont

a) divisible par 2, 3 ou 5?

b) non divisible par 7, 11 ou 13?

c) divisible par 3 mais pas par 7?

39. Combien d'entiers positifs inférieurs à 200 sont

a) deuxièmes ou plus grandes puissances d'entiers?

b) soit des nombres premiers, soit des puissances secondes ou supérieures d'entiers?

c) non divisible par le carré d'un entier supérieur que 1?

d) non divisible par le cube d'un entier supérieur à 1?

e) non divisible par trois nombres premiers ou plus?

∗ **40.** Combien de façons existe-t-il d'attribuer six emplois différents à trois employés différents si le travail le plus difficile est attribué à l'employé le plus expérimenté et le travail le plus simple est attribué à l'employé le moins expérimenté?

41. Quelle est la probabilité de donner exactement une personne sauvegarder le bon chapeau par une personne de contrôle qui donne n aux gens leurs chapeaux au hasard?

42. Combien de chaînes de bits de longueur six ne contiennent pas quatre 1s consécutifs?

43. Quelle est la probabilité qu'une chaîne de bits de longueur six choisisse sen au hasard contient au moins quatre 1?

Projets informatiques

Écrivez des programmes avec ces entrées et sorties.

1. Étant donné un entier positif n, énumérez tous les mouvements requis dans le puzzle de la tour de Hanoi pour déplacer n disques d'une cheville à l'autre selon les règles du puzzle.

2. Étant donné un entier positif n et un entier k avec $1 \leq k \leq n$, répertorier tous les mouvements utilisés par l'algorithme Frame – Stewart (décrit dans le préambule de l'exercice 38 de la section 8.1) pour déplacer n disques d'un piquet à un autre à l'aide de quatre piquets selon les règles du puzzle.

3. Étant donné un entier positif n, énumérez toutes les séquences de bits de longueur n qui n'a pas de paire de 0 consécutifs.

4. Étant donné un entier n supérieur à 1, écrivez toutes les façons de entre parenthèses le produit de $n + 1$ variables.

5. Étant donné un ensemble de n entretiens, leurs heures de début et de fin, ainsi que nombre de participants à chaque conférence, utilisez un programme ming pour planifier un sous-ensemble de ces entretiens dans une seule conférence salle pour maximiser la fréquentation totale.

6. Matrices données $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, ..., $\mathbf{A}_n$, de dimensions $m_1 \times m_2$, $m_2 \times m_3$, ..., $m_n \times m_{n+1}$, respectivement, chacun avec entrées entières, utilisez la programmation dynamique, dans l'exercice 57 de la section 8.1, pour trouver le nombre minimal de multiplications d'entiers nécessaires pour calculer $\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{A}_n$.

7. Étant donné une relation de récurrence $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$, où c_1 et c_2 sont des nombres réels, conditions initiales $a_0 = C_0$ et $a_1 = C_1$, et un entier positif k, trouvez $un_{k\,en}$ utilisant l'itération.

8. Étant donné une relation de récurrence $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ et conditions initiales $a_0 = C_0$ et $a_1 = C_1$, déterminer la solution unique.

9. Étant donné une relation de récurrence de la forme *f (n)* = *af (n / b)* + *c* , où *a* est un nombre réel, *b* est un positif entier, et *c* est un nombre réel, et un entier positif *k* , trouver *f (b* $_k$ *) en* utilisant l'itération.

10. Étant donné le nombre d'éléments à l'intersection de trois ensembles, le nombre d'éléments dans chaque intersection par paires de ces ensembles, et le nombre d'éléments dans chaque ensemble, trouver le nombre d'éléments dans leur union.

11. Étant donné un entier positif *n* , produire la formule pour le nombre d'éléments dans l'union de *n* ensembles.

12. Étant donné les entiers positifs *m* et *n* , trouvez le nombre de sur fonctions d'un ensemble de *m* éléments à un ensemble de *n* éléments ments.

13. Étant donné un entier positif *n* , énumérez tous les dérangements du définir {1 , 2 , 3 , ..., *n* }.

Calculs et explorations

Utilisez un ou plusieurs programmes informatiques que vous avez écrits pour effectuer ces exercices.

1. Trouvez la valeur exacte de f_{100} , f_{500} et f_{1000} , où f_n est le *n* ème numéro de Fibonacci.

2. Trouvez le plus petit nombre de Fibonacci supérieur à 1 000 000, supérieur à 1 000 000 000 et supérieur à 1 000 000 000 000.

3. Trouvez autant de nombres de Fibonacci que possible. Il est on ne sait pas s'il en existe une infinité.

4. Écrivez tous les mouvements nécessaires pour résoudre la Tour de Puzzle Hanoi avec 10 disques.

5. Écrivez tous les mouvements nécessaires pour utiliser le Frame – Stewart algorithme pour déplacer 20 disques d'une cheville à une autre cheville en utilisant quatre chevilles selon les règles du puz du Reve zle.

6. Vérifiez la conjecture du cadre pour résoudre le puzzle du Reve pour *n* disques pour autant d'entiers *n* que possible en montrant que le puzzle ne peut pas être résolu en utilisant moins de mouvements que celles faites par l'algorithme Frame-Stewart avec le choix optimal de *k* .

7. Calculez le nombre d'opérations nécessaires pour deux plis entiers avec *n* bits pour différents nombres entiers *n* in- 16, 64, 256 et 1024 en utilisant la multiplication rapide décrite dans l'exemple 4 de la section 8.3 et la norme algorithme de dard pour multiplier les entiers (algorithme 3 dans Section 4.2).

8. Calculez le nombre d'opérations nécessaires pour multiplier deux matrices *n* × *n* pour différents entiers *n* dont 4, 16, 64 et 128 en utilisant la multiplication matricielle rapide décrite dans l'exemple 5 de la section 8.3 et l'algorithme standard pour multiplier les matrices (algorithme 1 de la section 3.3).

9. Trouvez le nombre de nombres premiers ne dépassant pas 10 000 en utilisant la méthode décrite à la section 8.6 pour trouver le nombre de nombres premiers n'excédant pas 100.

10. Énumérez tous les dérangements de {1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8}.

11. Calculer la probabilité qu'une permutation de *n* objets est un dérangement pour tous les entiers positifs ne dépassant pas 20 et de déterminer à quelle vitesse ces probabilités approchez le nombre 1 / *e* .

Projets d'écriture

Répondez à ces questions par des essais en utilisant des sources extérieures.

1. Trouvez la source originale où Fibonacci a présenté son puzzle sur la modélisation des populations de lapins. Discutez-en problème et d'autres problèmes posés par Fibonacci et donner quelques informations sur Fibonacci lui-même.

2. Expliquez comment les nombres de Fibonacci apparaissent dans une variété de telles que la phyllotaxie, l'étude des arrangements ment des feuilles dans les plantes, dans l'étude des réflexions miroirs, etc.

3. Décrivez les différentes variantes de la tour de Hanoï zle, y compris ceux avec plus de trois chevilles (y compris du puzzle de la Reve discuté dans le texte et), ceux où les déplacements de disque sont limités et ceux où les disques peuvent avoir la même taille. Inclure ce qui est connu sur le nombre de mouvements nécessaires pour résoudre chaque variation.

4. Discutez autant de problèmes différents que possible lorsque le Des nombres catalans surgissent.

5. Discutez de certains des problèmes dans lesquels Richard Bellman d'abord utilisé la programmation dynamique.

6. Décrire le rôle des algorithmes de programmation dynamique en bioinformatique, y compris pour la comparaison de séquences fils, comparaison de gènes et prédiction de la structure de l'ARN.

7. Décrire l'utilisation de la programmation dynamique en économie notamment son utilisation pour étudier la consommation et ing.

8. Expliquez comment la programmation dynamique peut être utilisée pour résoudre le casse-tête qui détermine à partir duquel étages d'un bâtiment à plusieurs étages, il est sûr de laisser tomber les œufs de sans casser.

9. Décrivez la solution du problème d'Ulam (voir Exercice 28 dans la section 8.3) impliquant une recherche avec un mensonge trouvé par Andrzej Pelc.

10. Discutez des variations du problème d'Ulam (voir l'exercice 28 dans Section 8.3) impliquant une recherche avec plus d'un mensonge et ce que l'on sait de ce problème.

11. Définissez la coque convexe d'un ensemble de points dans l'avion et décrire trois algorithmes différents, dont un et-conquérir algorithme, pour trouver la coque convexe d'un ensemble de points dans l'avion.

12. Décrire comment les méthodes de tamisage sont utilisées dans la théorie des nombres. Quels types de résultats ont été établis en utilisant ces méthodes?

13. Regardez les règles de l'ancien jeu de cartes français de *rencon-tres* . Décrire ces règles et décrire le travail de Pierre Raymond de Montmort sur *le problème des rencontres* .

14. Décrire comment les fonctions de génération exponentielle peuvent être utilisé pour résoudre une variété de problèmes de comptage.

15. Décrivez la théorie de Polyá du comptage et le type de compter les problèmes qui peuvent être résolus en utilisant cette théorie.

16. Le *problème des ménages* (le problème du ménage) détient) demande le nombre de façons d'organiser *n* couples autour d'une table pour que les sexes alternent et pas de mari et sa femme sont assises ensemble. Expliquez la méthode utilisée par E. Lucas pour résoudre ce problème.

17. Expliquez comment les *polynômes de tour* peuvent être utilisés pour résoudre problèmes.

CHAPITRE

Rapports

9.1 Relations et Leur Propriétés

9.2 Relations n -aires et leur Applications

9.3 Représentation Rapports

9.4 Fermetures de Rapports

9.5 Équivalence Rapports

9.6 Partiel Commandes

Les relations entre les éléments des ensembles se produisent dans de nombreux contextes.Chaque jour, nous traitons avec des relations telles que celles entre une entreprise et son numéro de téléphone, un employé et son salaire, une personne et un parent, etc.En mathématiques, nous étudions les relations tels que ceux entre un entier positif et un qu'il divise, un entier et un qu'il est congruente à modulo 5, un nombre réel et un plus grand que lui, un nombre réel x et le valeur $f(x)$ où f est une fonction, etc. Des relations telles que celles entre un programme et une variable qu'il utilise, et celle entre un langage informatique et une déclaration valide dans ce langage se posent souvent en informatique.

Les relations entre les éléments des ensembles sont représentées à l'aide de la structure appelée relation, qui n'est qu'un sous-ensemble du produit cartésien des ensembles.Les relations peuvent être utilisées pour résoudre des problèmes comme déterminer quelles paires de villes sont liées par les vols des compagnies aériennes dans un réseau, ordre viable pour les différentes phases d'un projet compliqué, ou produisant un moyen utile de stocker informations dans des bases de données informatiques.

Dans certains langages informatiques, seuls les 31 premiers caractères du nom d'une variable comptent. La relation consistant en des paires ordonnées de chaînes où la première chaîne a la même initiale 31 caractères comme la deuxième chaîne est un exemple d'un type spécial de relation, connu sous le nom de relation d'équivalence. Les relations d'équivalence se développent en mathématiques et en informatique. Nous étudierons les relations d'équivalence et d'autres types particuliers de relations dans ce chapitre.

Relations et leurs propriétés

introduction

La façon la plus directe d'exprimer une relation entre des éléments de deux ensembles est d'utiliser des paires ordonnées composé de deux éléments liés.Pour cette raison, les ensembles de paires ordonnées sont appelés relations binaires. Dans cette section, nous présentons la terminologie de base utilisée pour décrire les relations binaires.Plus tard dans ce chapitre, nous allons utiliser les relations pour résoudre les problèmes impliquant les réseaux de communication, projet planification et identification des éléments dans des ensembles ayant des propriétés communes.

DÉFINITION 1 Soit A et B *des* ensembles. Une *relation binaire de A à B* est un sous -ensemble de $A \times B$.

En d'autres termes, une relation binaire de A à B est un ensemble R de paires ordonnées où le premier élément de chaque paire ordonnée provient de A et le deuxième élément vient de B . Nous utilisons la notation *aRb* pour indiquer que $(a, b) \in R$ et *un R b* pour indiquer que $(a, b) \notin R$. De plus, lorsque (a, b) appartient à R , a est dit être **liée à** b par R .

Les relations binaires représentent les relations entre les éléments de deux ensembles.Nous présenterons relations n -aires, qui expriment des relations entre des éléments de plus de deux ensembles, plus loin dans ce chapitre. Nous omettrons le mot *binaire* lorsqu'il n'y a aucun risque de confusion.

Les exemples 1 à 3 illustrent la notion de relation.

EXEMPLE 1 Soit A l'ensemble des élèves de votre école et B l'ensemble des cours. Que R soit la relation qui consiste en ces paires (a, b) , où a est un étudiant inscrit au cours b . Par exemple, si Jason Goodfriend et Deborah Sherman sont inscrits au CS518, les paires

(Jason Goodfriend, CS518) et (Deborah Sherman, CS518) appartiennent à R . Si Jason Goodfriend est également inscrit dans CS510, alors le couple (Jason Goodfriend, CS510) est également en R . cependant, si Deborah Sherman n'est pas inscrite au CS510, alors la paire (Deborah Sherman, CS510) est pas dans R .

Notez que si un étudiant n'est actuellement inscrit à aucun cours, il n'y aura pas de paires dans R qui avoir cet élève comme premier élément.De même, si aucun cours n'y est actuellement proposé il n'y aura pas de paires dans R qui auront ce cours comme deuxième élément. ▲

EXEMPLE 2 Soit A l'ensemble des villes des États-Unis et B l'ensemble des 50 États des États-Unis Définissez la relation R en spécifiant que (a, b) appartient à R si une ville avec le nom a est dans l'État b . Par exemple, (Boulder, Colorado), (Bangor, Maine), (Ann Arbor, Michigan), (Middletown, New Jersey), (Middletown, New York), (Cupertino, Californie) et (Red Bank, New Jersey) sont en R . ▲

EXEMPLE 3 Soit $A = \{0, 1, 2\}$ et $B = \{a, b\}$. Ensuite , $\{(0, a), (0, b), (1, a), (2, b)\}$ est une relation de A à B . Cela signifie, par exemple, que $0\ R\ a$, mais que $1 \not R\ b$. Les relations peuvent être représentées graphiquement, comme le montre la figure 1, en utilisant des flèches pour représenter les paires ordonnées.Une autre façon de représenter cela relation est d'utiliser un tableau, ce qui est également fait dans la figure 1. Nous allons discuter des représentations de les relations plus en détail dans la section 9.3. ▲

0

une

1

b

2

R	*une*	*b*
0		
1		
2		

FIGURE 1 Affichage des paires ordonnées dans la relation R de l'exemple 3.

Fonctions en tant que relations

Rappelons qu'une fonction f d'un ensemble A à un ensemble B (tel que défini dans la section 2.3) assigne exactement un élément de B à chaque élément de A . Le graphe de f est l'ensemble des paires ordonnées (a, b) telles que $b = f(a)$. Du fait que le graphe de f est un sous -ensemble de $A \times B$, il existe une relation de A à B . De plus, le graphe d'une fonction a la propriété que chaque élément de A est le premier élément d'exactement une paire ordonnée du graphique.

Inversement, si R est une relation de A à B telle que chaque élément de A est le premier élément d'exactement une paire ordonnée de R , alors une fonction peut être définie avec R comme graphique. Cela peut être fait en attribuant à un élément a de A l'unique élément $b \in B$ de telle sorte que $(a, b) \in R$. (Remarque que la relation R dans l'exemple 2 n'est pas le graphique d'une fonction parce que Middletown se produit plus plus d'une fois comme premier élément d'une paire ordonnée dans R.)

Une relation peut être utilisée pour exprimer une relation un-à-plusieurs entre les éléments du définit A et B (comme dans l'exemple 2), où un élément de A peut être lié à plusieurs éléments de B . Une fonction représente une relation où exactement un élément de B est lié à chaque élément de A .

Les relations sont une généralisation de graphes de fonctions; ils peuvent être utilisés pour exprimer beaucoup classe plus large de relations entre les ensembles. (Rappelons que le graphe de la fonction f de A à B est l'ensemble des paires ordonnées $(a, f(a))$ pour $a \in A$.)

Relations sur un ensemble

Les relations d'un ensemble A à lui-même présentent un intérêt particulier.

DÉFINITION 2 Un *rapport sur un ensemble A* est une relation de A à A .

En d' autres termes, un rapport sur un ensemble A est un sous -ensemble de $A \times A$.

EXEMPLE 4 Soit A l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$. Quelles paires ordonnées sont dans la relation $R = \{(a, b) \mid a \text{ divise } b\}$?

Solution: parce que (a, b) est dans R si et seulement si a et b sont des entiers positifs ne dépassant pas 4 tels que a divise b , on voit que

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}.$$

Les paires dans cette relation sont affichées graphiquement et sous forme de tableau dans la figure 2. ▲

Ensuite, quelques exemples de relations sur l'ensemble des entiers seront donnés dans l'exemple 5.

EXEMPLE 5 Considérons ces relations sur l'ensemble des entiers:

$R_1 = \{(a, b) \mid a \leq b\}$,
$R_2 = \{(a, b) \mid a > b\}$,
$R_3 = \{(a, b) \mid a = b \text{ ou } a = -b\}$,
$R_4 = \{(a, b) \mid a = b\}$,

$R_5 = \{(a, b) \mid a = b + 1\}$,
$R_6 = \{(a, b) \mid a + b \leq 3\}$.

Laquelle de ces relations contient chacune des paires $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(1, -1)$ et $(2, 2)$?

Remarque: Contrairement aux relations des exemples 1 à 4, ce sont des relations sur un ensemble infini.

Solution: la paire $(1, 1)$ est en R_1, R_3, R_4 et R_6 ; $(1, 2)$ est dans R_1 et R_6 ; $(2, 1)$ est dans R_2, R_5, et R_6 ; $(1, -1)$ est dans R_2, R_3 et R_6 ; et enfin, $(2, 2)$ est dans R_1, R_3 et R_4. ▲

Il n'est pas difficile de déterminer le nombre de relations sur un ensemble fini, car une relation sur un ensemble A est simplement un sous-ensemble de $A \times A$.

1 1
2 2
3 3
4 4

R	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

FIGURE 2 Affichage des paires ordonnées dans la relation R de l'exemple 4.

Page 198

EXEMPLE 6 Combien de relations y a-t-il sur un ensemble avec n éléments?

Solution: Un rapport sur un ensemble A est un sous-ensemble de $A \times A$. Parce que $A \times A$ a n^2 éléments lorsque A a n éléments, et un ensemble avec m éléments a 2^m sous-ensembles, il y a 2^{n^2} sous-ensembles de $A \times A$. Donc, il ya deux $^{n^2}$ relations sur un ensemble avec n éléments. Par exemple, il existe $2^{3^2} = 2^9 = 512$ relations sur l'ensemble $\{a, b, c\}$. ▲

Propriétés des relations

Plusieurs propriétés sont utilisées pour classer les relations sur un ensemble. Nous présenterons le le plus important d'entre eux ici.

Dans certaines relations, un élément est toujours lié à lui-même. Par exemple, soit R la relation sur l'ensemble de toutes les personnes composées de paires (x, y) où x et y ont la même mère et la même père. Ensuite, xRx pour chaque personne x.

DÉFINITION 3 Une relation R sur un ensemble A est appelé *réflexif* si $(a, a) \in R$ pour chaque élément $un \in A$.

Remarque: En utilisant des quantificateurs, nous voyons que la relation R sur l'ensemble A est réflexive si $\forall a\, ((a, a) \in R)$, où l'univers du discours est l'ensemble de tous leséléments A .

On voit qu'une relation sur A est réflexive si chaque élément de A est lié à lui-même. Les exemples 7 à 9 illustrent le concept d'une relation réflexive.

EXEMPLE 7 Considérons les relations suivantes sur {1, 2, 3, 4}:

$R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,4), (4,1), (4,4)\}$,

$R_2 = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$,

$R_3 = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)\}$,

$R_4 = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$,

$R_5 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\}$,

$R_6 = \{(3,4)\}$.

Lesquelles de ces relations sont réflexives?

Solution: Les relations R_3 et R_5 sont réflexives car elles contiennent toutes deux toutes les paires de la forme (a, a) , à savoir $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$ et $(4,4)$. Les autres relations ne sont pas réflexives car ils ne contiennent pas toutes ces paires ordonnées. En particulier, R_1 , R_2 , R_4 et R_6 ne sont pas réflexifs parce que $(3,3)$ n'est dans aucune de ces relations. ▲

EXEMPLE 8 Laquelle des relations de l'exemple 5 est réflexive?

Solution: Les relations réflexives de l'exemple 5 sont R_1 (car $a \leq a$ pour chaque entier a), R_3 et R_4 . Pour chacune des autres relations de cet exemple, il est facile de trouver une paire de forme (a, a) qui n'est pas dans la relation. (Ceci est laissé comme un exercice pour le lecteur.) ▲

EXEMPLE 9 La relation «divise» sur l'ensemble des entiers positifs est-elle réflexive?

Solution: Parce *qu'un* | *a* chaque fois *que a* est un entier positif, la relation de «division» est réflexive. (Remarque que si l'on remplace l'ensemble des entiers positifs par l'ensemble de tous les entiers, la relation n'est pas réflexive parce que par définition, 0 ne divise pas 0.) ▲

Dans certaines relations, un élément est lié à un deuxième élément si et seulement si le deuxième élément est également lié au premier élément. La relation composée de paires (x, y) , où x et y sont les élèves de votre école avec au moins une classe commune ont cette propriété. D'autres relations ont la propriété que si un élément est lié à un deuxième élément, ce deuxième élément n'est pas liés au premier. La relation composée des paires (x, y) , où x et y sont des étudiants à votre l'école, où x a une moyenne pondérée plus élevée que y a cette propriété.

DÉFINITION 4 Une relation R sur un ensemble A est appelée *symétrique* si $(b, a) \in R$ chaque fois que $(a, b) \in R$, pour tout $a, b \in A$. Une relation R sur un ensemble A telle que pour tout $a, b \in A$, si $(a, b) \in R$ et $(b, a) \in R$, alors $a = b$ est appelé *antisymétrique* .

Remarque: En utilisant des quantificateurs, nous voyons que la relation R sur l'ensemble A est symétrique si $\forall a \forall b ((a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R)$. De même, la relation R sur l'ensemble A est antisymétrique si $\forall a \forall b (((a, b) \in R \wedge (b, a) \in R) \rightarrow (a = b))$.

Autrement dit, une relation est symétrique si et seulement si a est lié à b implique que b est lié à a. Une relation est antisymétrique si et seulement s'il n'y a pas de paires d'éléments distincts a et b avec a liés à b et b liés à a. Autrement dit, la seule façon d'avoir *un* lié à b et b lié à a est pour *que a* et b soient le même élément. Les termes *symétrique* et *antisymétrique* ne sont pas opposés, car une relation peut avoir ces deux propriétés ou peut ne pas les avoir toutes les deux (voir Exercice dix). Une relation ne peut pas être à la fois symétrique et antisymétrique si elle contient une paire de la forme (a, b), où $a = b$.

Remarque: Bien que relativement peu des 2^{n^2} les relations sur un ensemble avec n éléments sont symétriques ou antisymétrique, comme le montrent les arguments de comptage, de nombreuses relations importantes ont l'une de ces Propriétés. (Voir l'exercice 47.)

EXEMPLE 10 Lesquelles des relations de l'exemple 7 sont symétriques et lesquelles sont antisymétriques?

Solution: Les relations R_2 et R_3 sont symétriques, car dans chaque cas (b, a) appartient au chaque fois que (a, b) *le* fait. Pour R_2, la seule chose à vérifier est que $(2, 1)$ et $(1, 2)$ sont tous les deux dans la relation. Pour R_3, il faut vérifier que $(1, 2)$ et $(2, 1)$ appartiennent à la relation, et $(1, 4)$ et $(4, 1)$ appartiennent à la relation. Le lecteur doit vérifier qu'aucun des autres les relations sont symétriques. Cela se fait en trouvant une paire (a, b) telle qu'elle se trouve dans la relation mais (b, a) ne l'est pas.

R_4, R_5 et R_6 sont tous antisymétriques. Pour chacune de ces relations, il n'y a pas de paire d'éléments a et b avec $a = b$ tels que (a, b) et (b, a) appartiennent à la relation. Le lecteur doit vérifiez qu'aucune des autres relations n'est antisymétrique. Cela se fait en trouvant une paire (a, b) avec $a = b$ tel que (a, b) et (b, a) sont tous deux dans la relation. ▲

EXEMPLE 11 Lesquelles des relations de l'exemple 5 sont symétriques et lesquelles sont antisymétriques?

Solution: Les relations R_3, R_4 et R_6 sont symétriques. R_3 est symétrique, car si $a = b$ ou $a = -b$, alors $b = a$ ou $b = -a$. R_4 est symétrique car $a = b$ implique que $b = a$. R_6 est symétrique car $a + b \leq 3$ implique que $b + a \leq 3$. Le lecteur doit vérifier qu'aucun des autres les relations sont symétriques.

Les relations R_1, R_2, R_4 et R_5 sont antisymétriques. R_1 est antisymétrique car le les inégalités $a \leq b$ et $b \leq a$ impliquent que $a = b$. R_2 est antisymétrique car il est impossible que $a > b$ et $b > a$. R_4 est antisymétrique, car deux éléments sont liés par rapport à R_4 si et seulement s'ils sont égaux. R_5 est antisymétrique car il est impossible que $a = b + 1$ et $b = a + 1$. Le lecteur doit vérifier qu'aucune des autres relations n'est antisymétrique. ▲

EXEMPLE 12 La relation «divise» sur l'ensemble des entiers positifs est-elle symétrique? Est-ce antisymétrique?

Solution: cette relation n'est pas symétrique car $1 \mid 2$, mais $2 \nmid 1$. Il est antisymétrique, car si *un* et b sont des entiers positifs avec $a \mid b$ et $b \mid a$, puis $a = b$ (la vérification est laissée comme exercice pour le lecteur). ▲

Soit R la relation composée de toutes les paires (x, y) d'élèves de votre école, où x a pris plus de crédits que y . Supposons que x soit lié à y et y soit lié à z . Ça signifie que x a pris plus de crédits que y et y a pris plus de crédits que z . On peut conclure que x a pris plus de crédits que z , de sorte que x est lié à z . Ce que nous avons montré, c'est que R a la propriété transitive, qui est définie comme suit.

DÉFINITION 5 Une relation R sur un ensemble A est appelée *transitive* si $(a, b) \in R$ et $(b, c) \in R$, puis $(a, c) \in R$, pour tous les $a, b, c \in A$.

Remarque: En utilisant des quantificateurs, nous voyons que la relation R sur un ensemble A est transitive si nous avons $\forall a \forall b \forall c\, (((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R) \rightarrow (a, c) \in R)$.

EXEMPLE 13 Laquelle des relations de l'exemple 7 est transitive?

Solution: R_4 , R_5 et R_6 sont transitifs. Pour chacune de ces relations, nous pouvons montrer qu'il est transitive en vérifiant que si (a, b) et (b, c) appartiennent à cette relation, alors (a, c) *le fait* aussi. Pour par exemple, R_4 est transitif, car $(3, 2)$ et $(2, 1)$, $(4, 2)$ et $(2, 1)$, $(4, 3)$ et $(3, 1)$, et $(4, 3)$ et $(3, 2)$ sont les seuls ensembles de paires de ce type, et $(3, 1)$, $(4, 1)$ et $(4, 2)$ appartiennent à R_4 . Le lecteur devrait vérifier que R_5 et R_6 sont transitifs.

R_1 n'est pas transitif car $(3, 4)$ et $(4, 1)$ appartiennent à R_1 , mais $(3, 1)$ ne l'est pas. R_2 est non transitif parce que $(2, 1)$ et $(1, 2)$ appartiennent à R_2 , mais $(2, 2)$ n'appartient pas. R_3 n'est pas transitif parce que $(4, 1)$ et $(1, 2)$ appartiennent à R_3 , mais $(4, 2)$ n'appartient pas. ▲

EXEMPLE 14 Laquelle des relations de l'exemple 5 est transitive?

Solution: Les relations R_1 , R_2 , R_3 et R_4 sont transitives. R_1 est transitif car $a \leq b$ et $b \leq c$ impliquent que $a \leq c$. R_2 est transitif car $a > b$ et $b > c$ impliquent que $a > c$. R_3 est transitif car $a = \pm b$ et $b = \pm c$ impliquent que $a = \pm c$. R_4 est clairement transitif, comme le lecteur devrait Vérifier. R_5 n'est pas transitif car $(2, 1)$ et $(1, 0)$ appartiennent à R_5 , mais pas $(2, 0)$. R_6 n'est pas transitive parce que $(2, 1)$ et $(1, 2)$ appartiennent à R_6 , mais $(2, 2)$ n'appartient pas. ▲

EXEMPLE 15 La relation "divise" sur l'ensemble des entiers positifs est-elle transitive?

Solution: Supposons que a divise b et b divise c . Ensuite, il y a des entiers positifs k et l tels que $b = ak$ et $c = bl$. Par conséquent, $c = a(kl)$, donc a divise c . Il s'ensuit que cette relation est transitif. ▲

Nous pouvons utiliser des techniques de comptage pour déterminer le nombre de relations avec des propriétés spécifiques. cravates. La recherche du nombre de relations avec une propriété particulière fournit des informations sur commune cette propriété est dans l'ensemble de toutes les relations sur un ensemble avec n éléments.

EXEMPLE 16 Combien de relations réflexives existe-t-il sur un ensemble à n éléments?

Solution: Une relation R sur un ensemble A est un sous -ensemble de $A \times A$. Par conséquent, une relation est déterminée en spécifiant si chacune des n^2 paires ordonnées de $A \times A$ est dans R . Cependant, si R est réflexif, chacune des n paires ordonnées (a, a) pour *un* $\in A$ doit être en R . Chacun des autres $n(n - 1)$ ordonné des paires de la forme (a, b) , où $a = b$, peut ou peut ne pas être dans R . Par conséquent, par la règle du produit pour en comptant, il y a $2^{n(n-1)}$ relations réflexives [c'est le nombre de façons de choisir si chaque élément (a, b) , avec $a = b$, appartient à R]. ▲

Formules pour le nombre de relations symétriques et le nombre de relations antisymétriques les relations sur un ensemble avec n éléments peuvent être trouvées en utilisant un raisonnement similaire à celui de l'exemple 16 (voir l'exercice 47). Cependant, aucune formule générale n'est connue qui compte les relations transitives sur un sertie de n éléments. Actuellement, $T(n)$, le nombre de relations transitives sur un ensemble avec n éléments, est connu uniquement pour $n \leq 17$. Par exemple, $T(4) = 3,994$, $T(5) = 154,303$ et $T(6) = 9,415,189$.

Combiner les relations

Parce que les relations de A à B sont des sous-ensembles de $A \times B$, deux relations de A à B peuvent être combinées de toute façon, deux ensembles peuvent être combinés.Prenons les exemples 17 à 19.

EXEMPLE 17 Soit $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Les relations $R_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$ et $R_2 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4)\}$ peuvent être combinés pour obtenir

$$R_1 \cup R_2 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (3,3)\},$$
$$R_1 \cap R_2 = \{(1,1)\},$$
$$R_1 - R_2 = \{(2,2), (3,3)\},$$
$$R_2 - R_1 = \{(1,2), (1,3), (1,4)\}.$$

▲

EXEMPLE 18 Soit A et B l'ensemble de tous les élèves et l'ensemble de tous les cours d'une école, respectivement. Supposons que R_1 se compose de toutes les paires ordonnées (a, b) , où a est un étudiant qui a suivi le cours b , et R_2 se compose de toutes les paires ordonnées (a, b) , où a est un étudiant qui a besoin du cours b pour obtenir son diplôme. Quelles sont les relations $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, $R_1 \oplus R_2$, $R_1 - R_2$ et $R_2 - R_1$?

Solution: La relation $R_1 \cup R_2$ est constituée de toutes les paires ordonnées (a, b) , où a est un étudiant qui soit a suivi le cours b, soit a besoin du cours b pour obtenir son diplôme, et $R_1 \cap R_2$ est l'ensemble de tous les paires (a, b) , où a est un étudiant qui a suivi le cours b et qui a besoin de ce cours pour obtenir son diplôme. De plus, $R_1 \oplus R_2$ se compose de toutes les paires ordonnées (a, b) , où l'élève a a suivi le cours b mais ne n'en a pas besoin pour obtenir son diplôme ou a besoin du cours b pour obtenir son diplôme mais ne l'a pas suivi. $R_1 - R_2$ est l'ensemble des paires ordonnées (a, b) , où a a suivi le cours b mais n'en a pas besoin pour obtenir son diplôme; c'est-à-dire, b est un cours au choix qui a a pris. $R_2 - R_1$ est l'ensemble de toutes les paires ordonnées (a, b) , où b est a bien sûr qui a besoin d'un diplôme mais n'a pas pris. ▲

EXEMPLE 19 Soit R_1 la relation "moins de" sur l'ensemble des nombres réels et soit R_2 la "plus grande que" relation sur l'ensemble des nombres réels, c'est-à-dire $R_1 = \{(x, y) \mid x < y\}$ et $R_2 = \{(x, y) \mid x > y\}$. Que sont $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, $R_1 - R_2$, $R_2 - R_1$ et $R_1 \oplus R_2$?

Solution: On note que $(x, y) \in R_1 \cup R_2$ si et seulement si $(x, y) \in R_1$ ou $(x, y) \in R_2$. Par conséquent, $(x, y) \in R_1 \cup R_2$ si et seulement si $x < y$ ou $x > y$. Parce que la condition $x < y$ ou $x > y$ est identique à la condition $x = y$, il s'ensuit que $R_1 \cup R_2 = \{(x, y) \mid x = y\}$. En d'autres termes, le l'union de la relation «inférieur à» et de la relation «supérieur à» est la relation «non égal».

Ensuite, notez qu'il est impossible pour une paire (x, y) d'appartenir à la fois à R_1 et R_2 car elle est impossible que $x < y$ et $x > y$. Il s'ensuit que $R_1 \cap R_2 = \emptyset$. On voit aussi que $R_1 - R_2 = R_1$, $R_2 - R_1 = R_2$ et $R_1 \oplus R_2 = R_1 \cup R_2 - R_1 \cap R_2 = \{(x, y) \mid x = y\}$. ▲

Il existe une autre manière de combiner les relations qui est analogue à la composition des les fonctions.

DÉFINITION 6 Soit R soit une relation d'un ensemble A à un ensemble B et S un rapport de B à un ensemble C . Le *composite* de R et S est la relation constituée de paires ordonnées (a, c) , où $a \in A$, $c \in C$, et pour où il existe un élément $b \in B$ de telle sorte que $(a, b) \in R$ et $(b, c) \in S$. Nous désignons le composite de R et S par S de R .

Pour calculer le composite de deux relations, nous devons trouver des éléments qui sont les seconds élément de paires ordonnées dans la première relation et le premier élément de paires ordonnées dans la seconde comme le montrent les exemples 20 et 21.

EXEMPLE 20 Quel est le composite des relations R et S , où R est la relation de $\{1, 2, 3\}$ à $\{1, 2, 3, 4\}$ avec $R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\}$ et S est la relation de $\{1, 2, 3, 4\}$ à $\{0, 1, 2\}$ avec $S = \{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$?

Solution: $S \circ R$ est construit en utilisant toutes les paires ordonnées dans R et les paires ordonnées dans S , où le le deuxième élément de la paire ordonnée dans R est d'accord avec le premier élément de la paire ordonnée dans S . Par exemple, les paires ordonnées $(2, 3)$ dans R et $(3, 1)$ dans S produisent la paire ordonnée $(2, 1)$ en S de R . En calculant toutes les paires ordonnées dans le composite, on trouve

$$S \circ R = \{(1, 0), (1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 1)\}.$$

▲

EXEMPLE 21 **Composer la relation parentale avec lui-même** Soit R la relation sur l'ensemble de toutes les personnes de telle sorte que $(a, b) \in R$ si la personne a est un parent de la personne b . Alors $(a, c) \in R \circ R$ si et seulement s'il y a est une personne b telle que $(a, b) \in R$ et $(b, c) \in R$, c'est-à-dire si et seulement s'il y a une personne b telle que a est un parent de b et b est un parent de c . En d'autres termes, $(a, c) \in R \circ R$ si et seulement si a est un grand-parent de c . ▲

Les puissances d'une relation R peuvent être définies récursivement à partir de la définition d'un composite de deux relations.

DÉFINITION 7 Que R soit une relation sur l'ensemble A . Les puissances R^n , $n = 1, 2, 3, ...$, sont définies récursivement par

$$R^1 = R \qquad \text{et} \qquad R^{n+1} = R^n \circ R.$$

La définition montre que $R^2 = R \circ R$, $R^3 = R^2 \circ R = (R \circ R) \circ R$, etc.

EXEMPLE 22 Soit $R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$. Trouvez les puissances R^n , $n = 2, 3, 4, ...$

Solution: Parce que $R^2 = R \circ R$, nous trouvons que $R^2 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 2)\}$. Plus loin-plus, car $R^3 = R^2 \circ R$, $R^3 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$. Spectacles de calcul supplémentaires que R^4 est identique à R^3 , donc $R^4 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$. Il s'ensuit également que $R^n = R^3$ pour $n = 5, 6, 7, ...$ Le lecteur doit vérifier cela. ▲

Le théorème suivant montre que les puissances d'une relation transitive sont des sous-ensembles de cette relation. Il sera utilisé dans la section 9.4.

THÉORÈME 1 La relation R sur un ensemble A est transitive si et seulement si $R^n \subseteq R$ pour $n = 1, 2, 3, ...$

Preuve: Nous prouvons d'abord la partie «si» du théorème. On suppose que $R^n \subseteq R$ pour $n = 1$, $2, 3, \ldots$. En particulier, $R^2 \subseteq R$. Pour voir que cela implique que R est transitif, notons que si $(a, b) \in R$ et $(b, c) \in R$, puis par la définition de la composition, $(a, c) \in R^2$. Parce que $R^2 \subseteq R$, cela signifie que $(a, c) \in R$. Par conséquent, R est transitif.

Nous utiliserons l'induction mathématique pour prouver la seule partie du théorème. Notez que ceci une partie du théorème est trivialement vraie pour $n = 1$.

Supposons que $R^n \subseteq R$, où n est un entier positif. Telle est l'hypothèse inductive. À compléter l'étape inductive, nous devons montrer que cela implique que R^{n+1} est également un sous-ensemble de R. Pour le montrer, supposons que $(a, b) \in R^{n+1}$. Alors, parce que $R^{n+1} = R^n \circ R$, il y a un élément x avec $x \in A$ tel que $(a, x) \in R$ et $(x, b) \in R^n$. L'hypothèse inductive, à savoir, que $R^n \subseteq R$, implique que $(x, b) \in R$. De plus, parce que R est transitif, et $(a, x) \in R$ et $(x, b) \in R$, il en résulte que $(a, b) \in R$. Cela montre que $R^{n+1} \subseteq R$, complétant la preuve.

Des exercices

1. Énumérer les paires ordonnées dans la relation R de $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ à $B = \{0, 1, 2, 3\}$, où $(a, b) \in R$ si et seulement si

a) $a = b$. **b)** $a + b = 4$.
c) $a > b$. **d)** $a \mid b$.
e) pgcd $(a, b) = 1$. **f)** ppcm $(a, b) = 2$.

2. a) Énumérez toutes les paires ordonnées dans la relation $R = \{(a, b) \mid a \text{ divise } b\}$ sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

b) Affichez graphiquement cette relation, comme cela a été fait dans Exemple 4.

c) Affichez cette relation sous forme de tableau, comme cela a été fait dans Exemple 4.

3. Pour chacune de ces relations sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$, décidez si elle est réflexive, si elle est symétrique, si il est antisymétrique et s'il est transitif.

a) $\{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$
b) $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
c) $\{(2, 4), (4, 2)\}$
d) $\{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$
e) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
f) $\{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4)\}$

4. Déterminer si la relation R sur l'ensemble de toutes les personnes est réflexif, symétrique, antisymétrique et / ou transitif, où $(a, b) \in R$ si et seulement si

a) a est plus grand que b.
b) a et b sont nés le même jour.
c) a a le même prénom que b.
d) a et b ont un grand-parent commun.

5. Déterminez si la relation R sur l'ensemble de tous les Web pages est réflexive, symétrique, antisymétrique et / ou trans-positif, où $(a, b) \in R$ si et seulement si

a) tous ceux qui ont visité la page Web *un* a également visité Page Web b.
b) aucun lien commun n'est trouvé sur les deux sites Web page a et page Web b.
c) il existe au moins un lien commun sur la page Web a et Page Web b.
d) il existe une page Web qui comprend des liens vers les deux sites Web page a et page Web b.

6. Déterminer si la relation R sur l'ensemble de tous les réels les nombres sont réflexifs, symétriques, antisymétriques et / ou transitive, où $(x, y) \in R$ si et seulement si

a) $x + y = 0$. **b)** $x = \pm y$.
c) $x - y$ est un nombre rationnel.
d) $x = 2y$. **e)** $xy \geq 0$.
f) $xy = 0$. **g)** $x = 1$.
h) $x = 1$ ou $y = 1$.

7. Déterminez si la relation R sur l'ensemble de tous les entiers est réflexif, symétrique, antisymétrique et / ou transitif, où $(x, y) \in R$ si et seulement si

a) $x = y$. **b)** $xy \geq 1$.
c) $x = y + 1$ ou $x = y - 1$.
d) $x \equiv y \pmod 7$. **e)** x est un multiple de y.
f) x et y sont tous deux négatifs ou tous deux non négatifs.
g) $x = y^2$. **h)** $x \geq y^2$.

8. Montrer que la relation $R = \emptyset$ sur un ensemble non vide S est symétrique et transitif, mais pas réflexif.

9. Montrer que la relation $R = \emptyset$ sur l'ensemble vide $S = \emptyset$ est réflexive, symétrique et transitive.

10. Donnez un exemple de relation sur un ensemble qui est

a) à la fois symétrique et antisymétrique.
b) ni symétrique ni antisymétrique.

Une relation R sur l'ensemble A est **irréflexive** si pour tout $un \in A$, $(a, a) \notin R$. Autrement dit, R est irréflexif si aucun élément en A est lié à lui-même.

11. Quelles relations dans l'exercice 3 sont irréfléchies?

12. Quelles relations dans l'exercice 4 sont irréflexives?

13. Quelles relations dans l'exercice 5 sont irréfléchies?

14. Quelles relations dans l'exercice 6 sont irréfléchies?

15. Une relation sur un ensemble ne peut-elle être ni réflexive ni irréflexive?

16. Utilisez des quantificateurs pour exprimer ce que cela signifie pour une relation être irréflexif.

17. Donnez un exemple de relation irréflexive sur l'ensemble de tous gens.

Une relation R est appelée **asymétrique** si $(a, b) \in R$ implique que $(b, a) \notin R$. Les exercices 18 à 24 explorent la notion d'asymétrie relation métrique. L'exercice 22 se concentre sur la différence entre asymétrie et antisymétrie.

18. Quelles relations dans l'exercice 3 sont asymétriques?

19. Quelles relations dans l'exercice 4 sont asymétriques?

20. Quelles relations dans l'exercice 5 sont asymétriques?

21. Quelles relations dans l'exercice 6 sont asymétriques?

22. Une relation asymétrique doit-elle également être antisymétrique? Doit une relation antisymétrique soit-elle asymétrique? Donne des raisons pour vos réponses.

23. Utilisez des quantificateurs pour exprimer ce que cela signifie pour une relation être asymétrique.

24. Donnez un exemple de relation asymétrique sur l'ensemble des tout le monde.

25. Combien de relations différentes existe-t-il à partir d'un ensemble avec m éléments à un ensemble avec n éléments?

Soit R soit une relation d'un ensemble A à un ensemble B . La **relation inverse tion** de B à A , notée R^{-1} , est l'ensemble des paires ordonnées $\{ (b, a) \mid (a, b) \in R \}$. La **relation complémentaire** $\bar{R}$ est la ensemble de paires ordonnées $\{ (a, b) \mid (a, b) \notin R \}$.

26. Soit R la relation $R = \{ (a, b) \mid a < b \}$ sur l'ensemble de entiers. Trouver

a) R^{-1} . **b)** $\bar{R}$.

27. Soit R la relation $R = \{ (a, b) \mid a$ divise $b \}$ sur l'ensemble d'entiers positifs. Trouver

a) R^{-1} . **b)** $\bar{R}$.

28. Soit R la relation sur l'ensemble de tous les États des États-Unis États constitués de paires (a, b) où l'État a des frontières état b . Trouver

a) R^{-1} . **b)** $\bar{R}$.

29. Supposons que la fonction f de A à B soit un à un une correspondance. Soit R la relation qui est égale à la graphique de f . Autrement dit, $R = \{ (a, f(a)) \mid a \in A \}$. Quel est le relation inverse R^{-1} ?

30. Soit $R_1 = \{ (1, 2), (2, 3), (3, 4) \}$ et $R_2 = \{ (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4) \}$ soient relade $\{1, 2, 3\}$ à $\{1, 2, 3, 4\}$. Trouver

a) $R_1 \cup R_2$. **b)** $R_1 \cap R_2$.

c) $R_1 - R_2$. **d)** $R_2 - R_1$.

31. Soit A l'ensemble des élèves de votre école et B l'ensemble des élèves livres dans la bibliothèque de l'école. Soit R_1 et R_2 les relations composé de toutes les paires ordonnées (a, b) , où l'élève a est nécessaire pour lire le livre b dans un cours, et où l'étudiant a a lu le livre b , respectivement. Décrire les paires ordonnées dans chacune de ces relations.

a) $R_1 \cup R_2$ **b)** $R_1 \cap R_2$

c) $R_1 \oplus R_2$ **d)** $R_1 - R_2$

e) $R_2 - R_1$

32. Soit R la relation $\{ (1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 1) \}$, et soit S la relation $\{ (2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 2) \}$. Trouvez $S \circ R$.

33. Soit R la relation sur l'ensemble des personnes composé de paires (a, b), où a est un parent de b . Soit S la relation sur l'ensemble des personnes composées de paires (a, b), où *un* et b sont frères et sœurs (frères ou sœurs). Que sont $S \circ R$ et $R \circ S$?

Les exercices 34 à 37 traitent de ces relations sur l'ensemble des réels Nombres:

$R_1 = \{ (a, b) \in \mathbf{R}^2 \mid a > b \}$, la relation "supérieur à",

$R_2 = \{ (a, b) \in \mathbf{R}^2 \mid a \geq b \}$, le «supérieur ou égal à» relation,

$R_3 = \{ (a, b) \in \mathbf{R}^2 \mid a < b \}$, la relation «inférieur à»,

$R_4 = \{ (a, b) \in \mathbf{R}^2 \mid a \leq b \}$, le «inférieur ou égal à» relation,

$R_5 = \{ (a, b) \in \mathbf{R}^2 \mid a = b \}$, la relation «égal à»,

$R_6 = \{ (a, b) \in \mathbf{R}^2 \mid a = b \}$, la relation «inégale à».

34. Trouver

a) $R_1 \cup R_3$. **b)** $R_1 \cup R_5$.

c) $R_2 \cap R_4$. **d)** $R_3 \cap R_5$.

e) $R_1 - R_2$. **f)** $R_2 - R_1$.

g) $R_1 \oplus R_3$. **h)** $R_2 \oplus R_4$.

35. Trouver

a) $R_2 \cup R_4$. **b)** $R_3 \cup R_6$.

c) $R_3 \cap R_6$. **d)** $R_4 \cap R_6$.

e) $R_3 - R_6$. **f)** $R_6 - R_3$.

g) $R_2 \oplus R_6$. **h)** $R_3 \oplus R_5$.

36. Trouver

a) $R_1 \circ R_1$. **b)** $R_1 \circ R_2$.

c) $R_1 \circ R_3$. **d)** $R_1 \circ R_4$.

e) $R_1 \circ R_5$. **f)** $R_1 \circ R_6$.

g) $R_2 \circ R_3$. **h)** $R_3 \circ R_3$.

37. Trouver

a) $R_2 \circ R_1$. **b)** $R_2 \circ R_2$.

c) $R_3 \circ R_5$. **d)** $R_4 \circ R_1$.

e) $R_5 \circ R_3$. **f)** $R_3 \circ R_6$.

g) $R_4 \circ R_6$. **h)** $R_6 \circ R_6$.

38. Soit R la relation parentale sur l'ensemble de toutes les personnes (voir Exemple 21). Quand est une paire ordonnée dans la relation R^3 ?

39. Soit R la relation sur l'ensemble des personnes titulaires d'un doctorat tel que $(a, b) \in R$ si et seulement si a était le directeur de thèse de b . Quand est une paire ordonnée (a, b) dans R^2 ? Quand est un paire ordonnée (a, b) dans R^n , quand n est un entier positif? (Supposons que toute personne titulaire d'un doctorat ait une thèse conseiller.)

40. Soit R_1 et R_2 les «divisions» et «est un multiple de» relations sur l'ensemble de tous les entiers positifs, respectivement. Autrement dit, $R_1 = \{ (a, b) \mid a$ divise $b \}$ et $R_2 = \{ (a, b) \mid$ *une* est un multiple de b }. Trouver

a) $R_1 \cup R_2$. **b)** $R_1 \cap R_2$.

c) $R_1 - R_2$. **d)** $R_2 - R_1$.

e) $R_1 \oplus R_2$.

41. Soit R_1 et R_2 le «module 3 congruent» et le Relations «modulo 4 congruentes», respectivement, sur l'ensemble d'entiers. Autrement dit, $R_1 = \{ (a, b) \mid a \equiv b \ (\text{mod } 3) \}$ et $R_2 = \{ (a, b) \mid a \equiv b \ (\text{mod } 4) \}$. Trouver

a) $R_1 \cup R_2$. **b)** $R_1 \cap R_2$.
c) $R_1 - R_2$. **d)** $R_2 - R_1$.
e) $R_1 \oplus R_2$.

42. Énumérez les 16 relations différentes sur l'ensemble $\{0, 1\}$.

43. Combien des 16 relations différentes sur $\{0, 1\}$ contiennent la paire $(0, 1)$?

44. Laquelle des 16 relations sur $\{0, 1\}$, que vous avez énumérées dans Exercice 42, sont

a) réflexif? **b)** irréflexif?
c) symétrique? **d)** antisymétrique?
e) asymétrique? **f)** transitif?

45. a) Combien de relations y a-t-il sur l'ensemble $\{ a, b, c, d \}$?
b) Combien de relations y a-t-il sur l'ensemble $\{ a, b, c, d \}$ qui contiennent la paire (a, a) ?

46. Soit S un ensemble de n éléments et que a et b soient distinctes éléments de S. Combien de relations R existe-t-il sur S tel que

a) $(a, b) \in R$? **b)** $(a, b) \in R$?
c) aucune paire ordonnée dans R n'a a comme premier élément?
d) au moins une paire ordonnée dans R a a comme premier élément?
e) aucune paire ordonnée dans R n'a a comme premier élément ou b comme son deuxième élément?
f) au moins une paire ordonnée en R a soit *un* comme premier élément ou a b comme deuxième élément?

∗ **47.** Combien de relations y a-t-il sur un ensemble avec n éléments qui sont

a) symétrique? **b)** antisymétrique?
c) asymétrique? **d)** irréflexif?
e) réflexif et symétrique?
f) ni réflexif ni irréfléchi?

∗ **48.** Combien de relations transitives existe-t-il sur un ensemble avec n éléments si

a) $n = 1$? **b)** $n = 2$? **c)** $n = 3$?

49. Trouvez l'erreur dans la «preuve» du «théorème» suivant.

" *Théorème* ": Soit R une relation sur un ensemble A symétrique métrique et transitif. Alors R est réflexif.

« *Preuve* »: Soit *un* $\in A$. Prenez un élément $b \in A$ tel que $(a, b) \in R$. Parce que R est symétrique, nous avons également $(b, a) \in R$. Maintenant, en utilisant la propriété transitive, nous pouvons Clude que $(a, a) \in R$ parce que $(a, b) \in R$ et $(b, a) \in R$.

50. Supposons que R et S sont des relations réflexives sur un ensemble A. Prouvez ou réfutez chacune de ces déclarations.

a) $R \cup S$ est réflexif.
b) $R \cap S$ est réflexif.
c) $R \oplus S$ est irréflexif.
d) $R - S$ est irréflexif.
e) $S \circ R$ est réflexif.

51. Montrer que la relation R sur un ensemble A est symétrique si et seulement si $R = R^{-1}$, où R^{-1} est la relation inverse.

52. Montrer que la relation R sur un ensemble A est antisymétrique si et seulement si $R \cap R^{-1}$ est un sous-ensemble de la relation diagonale $= \{ (a, a) \mid a \in A \}$.

53. Montrer que la relation R sur un ensemble A est réflexive si et seulement si la relation inverse R^{-1} est réflexif.

54. Montrer que la relation R sur un ensemble A est réflexive si et seulement si la relation complémentaire R est irréflexive.

55. Soit R une relation réflexive et transitive. Prouver que $R^n = R$ pour tous les entiers positifs n.

56. Soit R la relation sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ contenant les paires ordonnées $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$, $(3, 1)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$, $(4, 2)$, $(4, 5)$, $(5, 1)$, $(5, 2)$ et $(5, 4)$.

Trouver

a) R^2. **b)** R^3. **c)** R^4. **d)** R^5.

57. Soit R soit une relation réflexive sur un ensemble A. Montrer que R^n est réflexif pour tous les entiers positifs n.

∗ **58.** Soit R une relation symétrique. Montrer que R^n est symétrique pour tous les entiers positifs n.

59. Supposons que la relation R soit irréflexive. Le R^2 est-il nécessaire irréfléchi? Donnez une raison à votre réponse.

Relations n -aires et leurs applications

introduction

Des relations entre des éléments de plus de deux ensembles apparaissent souvent. Par exemple, il existe une relation navire comportant le nom d'un élève, la majeure de l'élève et la moyenne pondérée cumulative de l'élève. De même, il existe une relation impliquant la compagnie aérienne, le numéro de vol, le point de départ, la destination, heure de départ et heure d'arrivée d'un vol. Un exemple d'une telle relation en mathématiques implique trois entiers, où le premier entier est plus grand que le deuxième entier, qui est plus grand que le troisième. Un autre exemple est la relation d'interdépendance impliquant des points sur une ligne, que trois points sont liés lorsque le deuxième point est entre le premier et le troisième.

Nous étudierons les relations entre les éléments de plus de deux ensembles dans cette section. Ces lationships sont appelés ***n* relations -aire**. Ces relations sont utilisées pour représenter des bases de données informatiques. Ces représentations nous aident à répondre aux questions sur les informations stockées dans les bases de données, telles que comme: Quels vols atterrissent à l'aéroport O'Hare entre 3 h et 4 h? Quels étudiants de votre l'école sont des étudiants de deuxième année se spécialisant en mathématiques ou en informatique et ont plus d'un 3,0 moyenne? Quels employés d'une entreprise ont travaillé pour l'entreprise moins de 5 ans et gagner plus de 50 000 $?

Relations *n* -aires

Nous commençons par la définition de base sur laquelle repose la théorie des bases de données relationnelles.

DÉFINITION 1 Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des ensembles. Une *relation n-aire* sur ces ensembles est un sous-ensemble de $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$. Les ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont appelés *domaines* de la relation, et n est appelé son *degré* .

EXEMPLE 1 Soit R la relation sur $\mathbf{N} \times \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ composée de triplets (a, b, c), où a, b et c sont des entiers avec $un < b < c$. Ensuite , $(1, 2, 3) \in R$, mais $(2, 4, 3) \notin R$. Le degré de cette relation est 3. Ses domaines sont tous égaux à l'ensemble des nombres naturels. ▲

EXEMPLE 2 Soit R la relation sur $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ composée de tous les triplets d'entiers (a, b, c) dans laquelle a , b et c forment une progression arithmétique. Autrement dit, $(a, b, c) \in R$ si et seulement s'il y a un entier k tel que $b = a + k$ et $c = a + 2k$, ou de manière équivalente, tel que $b - a = k$ et $c - b = k$. Notez que $(1, 3, 5) \in R$ car $3 = 1 + 2$ et $5 = 1 + 2 \cdot 2$, mais $(2, 5, 9) \notin R$ étant-cause $5 - 2 = 3$ tandis que $9 - 5 = 4$. Cette relation a le degré 3 et ses domaines sont tous égaux à la ensemble d'entiers. ▲

EXEMPLE 3 Soit R la relation sur $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^+$ composé de triplets (a, b, m) , où a , b et m sont des entiers avec $m \geq 1$ et $a \equiv b \pmod{m}$. Alors $(8, 2, 3)$, $(-1, 9, 5)$ et $(14, 0, 7)$ appartiennent tous à R , mais $(7, 2, 3)$, $(-2, -8, 5)$ et $(11, 0, 6)$ n'appartiennent pas à R car $8 \equiv 2 \pmod{3}$, $-1 \equiv 9 \pmod{5}$, et $14 \equiv 0 \pmod{7}$, mais $7 \equiv 2 \pmod{3}$, $-2 \equiv -8 \pmod{5}$ et $11 \equiv 0 \pmod{6}$. Cette relation a le degré 3 et ses deux premiers domaines sont l'ensemble de tous les entiers et son troisième domaine est l'ensemble de entiers positifs. ▲

EXEMPLE 4 Soit R la relation constituée de 5 tuples (A, N, S, D, T) représentant des vols d'avion, où A est la compagnie aérienne, N est le numéro de vol, S est le point de départ, D est la destination et T est l'heure de départ. Par exemple, si Nadir Express Airlines a le vol 963 de Newark à Bangor à 15:00, puis (Nadir, 963, Newark, Bangor, 15:00) appartient à R . Le degré de cette relation est 5, et ses domaines sont l'ensemble de toutes les compagnies aériennes, l'ensemble des numéros de vol, l'ensemble des villes, l'ensemble des villes (encore), et l'ensemble des temps. ▲

Bases de données et relations

Le temps nécessaire pour manipuler les informations dans une base de données dépend de la façon dont ces informations sont stockée. Les opérations d'ajout et de suppression d'enregistrements, de mise à jour d'enregistrements, de recherche d'enregistrements, et la combinaison des enregistrements de bases de données qui se chevauchent sont effectuées des millions de fois par jour dans un grande base de données. En raison de l'importance de ces opérations, diverses méthodes de représentation des bases de données ont été développées. Nous allons discuter de l'une de ces méthodes, appelée **relationnelle modèle de données** , basé sur le concept d'une relation.

Une base de données est constituée d' **enregistrements** , qui sont n -tuples, constitués de **champs** . Les champs sont les entrées des n -tuples. Par exemple, une base de données des dossiers des élèves peut être constituée de champs contenant le nom, le numéro d'étudiant, la majeure et la moyenne pondérée cumulative de l'étudiant. La relation Le modèle de données national représente une base de données d'enregistrements comme une relation n -aire. Ainsi, les dossiers des élèves

TABLEAU 1 **Étudiants.**

Nom d'étudiant	*ID_number*	*Majeur*	*GPA*
Ackermann	231455	L'informatique	3,88
Adams	888323	La physique	3,45
Chou	102147	L'informatique	3,49
Bon ami	453876	Mathématiques	3,45
Rao	678543	Mathématiques	3,90
Stevens	786576	Psychologie	2,99

sont représentés par 4 tuples du formulaire (*Student_name, ID_number, Major, GPA*). Un échantillon base de données de six de ces enregistrements est

(Ackermann, 231455, Computer Science, 3.88)
(Adams, 888323, Physique, 3,45)
(Chou, 102147, Informatique, 3.49)
(Goodfriend, 453876, Mathématiques, 3,45)
(Rao, 678543, Mathématiques, 3,90)
(Stevens, 786576, Psychologie, 2,99).

Les relations utilisées pour représenter les bases de données sont également appelées **tables** , car ces relations sont souvent affichés sous forme de tableaux. Chaque colonne du tableau correspond à un *attribut* de la base de données. Pour Par exemple, la même base de données d'étudiants est affichée dans le tableau 1. Les attributs de cette base de données sont le nom de l'étudiant, le numéro d'identification, le majeur et le GPA.

Un domaine d'une relation n -ary est appelé une **clé primaire** lorsque la valeur du n -tuple de ce domaine détermine le n- tuple. Autrement dit, un domaine est une clé primaire lorsqu'il n'y a pas deux n -tuples dans la relation a la même valeur dans ce domaine.

Les enregistrements sont souvent ajoutés ou supprimés des bases de données. Pour cette raison, la propriété qu'un le domaine est une clé primaire dépend du temps. Par conséquent, il convient de choisir une clé primaire qui reste un chaque fois que la base de données est modifiée. La collection actuelle de n -tuples dans une relation est appelé l' **extension** de la relation. La partie la plus permanente d'une base de données, y compris nom et les attributs de la base de données, est appelé son **intension** . Lors de la sélection d'une clé primaire, le L'objectif devrait être de sélectionner une clé pouvant servir de clé primaire pour toutes les extensions possibles du base de données. Pour ce faire, il est nécessaire d'examiner l'intension de la base de données pour comprendre ensemble de n -tuples possibles pouvant se produire dans une extension.

EXEMPLE 5 Quels domaines sont des clés primaires pour la relation n -ary affichée dans le tableau 1, en supposant qu'aucun n -tuples seront ajoutés à l'avenir?

Solution: dans la mesure où il n'y a qu'un seul tuple 4 pour chaque nom d'élève, le domaine des noms des étudiants est une clé primaire. De même, les numéros d'identification dans ce tableau sont uniques, donc le le domaine des numéros d'identification est également une clé primaire. Cependant, le domaine des principaux domaines d'études n'est pas une clé primaire, car plusieurs quadruples contiennent le même principal domaine d'études. Le domaine des moyennes pondérées n'est pas non plus une clé primaire, car il y a deux 4-tuples contenant le même GPA. ▲

Les combinaisons de domaines peuvent également identifier de manière unique n -tuples dans une relation n -ary. Quand les valeurs d'un ensemble de domaines déterminent un n -tuple dans une relation, le produit cartésien de ces domaines est appelé une **clé composite** .

EXEMPLE 6 Le produit cartésien du domaine des grands domaines d'études et du domaine des GPA est-il clé composite pour la relation n -ary du tableau 1, en supposant qu'aucun n -tuples ne soit jamais ajouté?

Solution: étant donné qu'il n'y a pas deux 4-tuples de cette table ayant à la fois le même majeur et le même GPA, ce produit cartésien est une clé composite. ▲

Étant donné que les clés primaires et composites sont utilisées pour identifier les enregistrements de manière unique dans une base de données, il est important que les clés restent valides lorsque de nouveaux enregistrements sont ajoutés à la base de données. Par conséquent, des vérifications doivent être effectuées pour s'assurer que chaque nouvel enregistrement a des valeurs le ou les champs appropriés de tous les autres enregistrements de cette table. Par exemple, cela fait sens d'utiliser le numéro d'identification de l'élève comme clé pour les dossiers des élèves s'il n'y en a pas deux les étudiants ont toujours le même numéro d'identification d'étudiant. Une université ne doit pas utiliser le champ de nom comme clé, car deux élèves peuvent avoir le même nom (comme John Smith).

Opérations sur *n* Relations -aire

Il existe une variété d'opérations sur les relations n -ary qui peuvent être utilisées pour former de nouvelles relations n -ary. Appliquées ensemble, ces opérations peuvent répondre à des requêtes sur des bases de données qui demandent tous les n -tuples qui satisfaire à certaines conditions.

L'opération la plus élémentaire sur une relation n -ary consiste à déterminer tous les n -tuples dans la relation n -ary qui remplissent certaines conditions. Par exemple, nous pouvons vouloir trouver tous les enregistrements de tous les ordinateurs majors scientifiques dans une base de données de dossiers d'étudiants. Nous pouvons vouloir trouver tous les étudiants qui ont un moyenne pondérée supérieure à 3,5. Nous pouvons vouloir trouver les dossiers de toutes les majors en informatique qui ont une moyenne pondérée supérieure à 3,5. Pour effectuer de telles tâches, nous utilisons l'opérateur de sélection.

DÉFINITION 2 Soit R une relation n -ary et C une condition que les éléments de R peuvent satisfaire. Ensuite, la *sélection l'opérateur* s_C mappe la relation n -ary R à la relation n -ary de tous les n -tuples de R qui satisfont la condition C .

EXEMPLE 7 Pour trouver les enregistrements des majeures en informatique dans la relation n -ary R montrée dans le tableau 1, nous utilisons l'opérateur *de* la C_1 , où C_1 est la condition majeure = « Computer Science. » Le résultat est deux 4-tuples (Ackermann, 231455, Computer Science, 3.88) et (Chou, 102147, Computer Science, 3,49). De même, pour trouver les dossiers des élèves qui ont une moyenne pondérée supérieure à 3,5 cette base de données, nous utilisons l'opérateur s_{C_2} , où C_2 est la condition GPA > 3.5. Le résultat est le deux 4-tuples (Ackermann, 231455, Computer Science, 3.88) et (Rao, 678543, Mathematics, 3,90). Enfin, pour trouver les dossiers des majors en informatique qui ont un GPA supérieur à 3,5, nous utiliser l'opérateur *de* C_3 , où C_3 est la condition (Major = « Computer Science » ∧ GPA > 3.5). Le résultat consiste en un seul tuple 4 (Ackermann, 231455, Computer Science, 3.88). ▲

Les projections sont utilisées pour former de nouvelles relations n -ary en supprimant les mêmes champs dans chaque enregistrement de la relation.

DÉFINITION 3 La *projection* $P_{i_1 i_2, \ldots, i_m}$ où $i_1 < i_2 < \cdots < i_m$, mappe le n -uple $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ au m -tuple $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_m})$, où $m \leq n$.

En d'autres termes, la projection $P_{i_1, i_2, \ldots, i_m}$ supprime $n - m$ des composants d'un n- tuple, laissant les composants i_1 th, i_2 th, ... et i_m th.

TABLEAU 2 **AMP.**

Nom d'étudiant	*GPA*
Ackermann	3,88
Adams	3,45
Chou	3,49
Bon ami	3,45
Rao	3,90
Stevens	2,99

TABLEAU 3 **Inscriptions.**

Étudiant	*Majeur*	*Cours*
Glauser	La biologie	BI 290
Glauser	La biologie	MS 475
Glauser	La biologie	PY 410
Marcus	Mathématiques	MS 511
Marcus	Mathématiques	MS 603
Marcus	Mathématiques	CS 322
Meunier	L'informatique	MS 575
Meunier	L'informatique	CS 455

TABLEAU 4 **Majeurs.**

Étudiant	*Majeur*
Glauser	La biologie
Marcus	Mathématiques
Meunier	L'informatique

EXEMPLE 8 Que se passe-t-il lorsque la projection $P_{1,3}$ est appliqué aux 4-tuples $(2, 3, 0, 4)$, (Jane Doe, 234111001, Geography, 3.14), et (a_1, a_2, a_3, a_4) ?

Solution: La projection $P_{1,3}$ envoie ces 4-tuples à $(2, 0)$, (Jane Doe, Géographie) et (a_1, a_3), respectivement. ▲

L'exemple 9 illustre comment de nouvelles relations sont produites à l'aide de projections.

EXEMPLE 9 Quelle relation résulte lorsque la projection $P_{1,4}$ est appliquée à la relation du tableau 1?

Solution: lorsque la projection $P_{1,4}$ est utilisée, les deuxième et troisième colonnes du tableau sont supprimées, et des paires représentant les noms des élèves et les moyennes des notes sont obtenues. Tableau 2 affiche les résultats de cette projection. ▲

Il peut en résulter moins de lignes lorsqu'une projection est appliquée à la table pour une relation. Ça arrive lorsque certains des n- couples dans la relation ont des valeurs identiques dans chacune des m composantes de la projection, et seulement en désaccord sur les composants supprimés par la projection. Par exemple, considérez l'exemple suivant.

EXEMPLE 10 Quel est le tableau obtenu lorsque la projection $P_{1,2}$ est appliquée à la relation du tableau 3?

Solution: le tableau 4 affiche la relation obtenue lorsque $P_{1,2}$ est appliqué au tableau 3. Notez qu'il sont moins de lignes après l'application de cette projection. ▲

L' opération de **jointure** est utilisée pour combiner deux tables en une seule lorsque ces tables partagent certaines champs identiques. Par exemple, un tableau contenant des champs pour la compagnie aérienne, le numéro de vol et la porte, et une autre table contenant des champs pour le numéro de vol, la porte et l'heure de départ peut être combinée en un tableau contenant des champs pour la compagnie aérienne, le numéro de vol, la porte et l'heure de départ.

DÉFINITION 4 Soit R une relation de degré m et S une relation de degré n . La *jointure* $J_p(R, S)$, où $p \leq m$ et $p \leq n$, est une relation de degré $m + n - p$ qui se compose de tous $(m + n - p)$ -tuples $(a_1, a_2, ..., a_{m-p}, c_1, c_2, ..., c_p, b_1, b_2, ..., b_{n-p})$, où le m- tuple $(a_1, a_2, ..., a_{m-p}, c_1, c_2, ..., c_p)$ appartient à R et le n -uple $(c_1, c_2, ..., c_p, b_1, b_2, ..., b_{n-p})$ appartient à S .

En d'autres termes, l'opérateur de jointure J_p produit une nouvelle relation à partir de deux relations en combinant tous m -tuples de la première relation avec tous les n -tuples de la deuxième relation, où les p dernières composantes des m -tuples sont en accord avec les p premières composantes des n -tuples.

TABLEAU 5 **Enseignements_affectations.**

Professeur	*département*	*Cours_ nombre*
Cruz	Zoologie	335
Cruz	Zoologie	412
Farber	Psychologie	501
Farber	Psychologie	617
Grammer	La physique	544
Grammer	La physique	551
Rosen	L'informatique	518
Rosen	Mathématiques	575

TABLEAU 6 **Class_schedule.**

département	*Cours_ nombre*	*Pièce*	*Temps*
L'informatique	518	N521	14H00
Mathématiques	575	N502	15:00
Mathématiques	611	N521	16H00
La physique	544	B505	16H00
Psychologie	501	A100	15:00
Psychologie	617	A110	11H00
Zoologie	335	A100	09H00
Zoologie	412	A100	8 h 00

EXEMPLE 11 Quelle relation résulte lorsque l'opérateur de jointure J_2 est utilisé pour combiner la relation affichée dans Tableaux 5 et 6?

Solution: la jointure J_2 produit la relation indiquée dans le tableau 7. ▲

Il existe d'autres opérateurs que les projections et les jointures qui produisent de nouvelles relations relations existantes. Une description de ces opérations peut être trouvée dans des livres sur la théorie des bases de données.

SQL

Le langage de requête de base de données SQL (abréviation de Structured Query Language) peut être utilisé pour transporter les opérations que nous avons décrites dans cette section. L'exemple 12 illustre comment les commandes SQL sont liés aux opérations sur les relations n -aires.

EXEMPLE 12 Nous allons illustrer comment SQL est utilisé pour exprimer des requêtes en montrant comment SQL peut être utilisé faire une requête sur les vols des compagnies aériennes à l'aide du tableau 8. L'instruction SQL

```
SELECT Heure_départ
DE Vols
O Destination Destination = 'Détroit'
```

est utilisé pour trouver la projection P_5 (sur l'attribut Departure_time) de la sélection de 5-tuples dans la base de données de vols qui remplit la condition: Destination = 'Detroit'.La sortie serait un liste contenant les horaires des vols ayant pour destination Detroit, à savoir 08:10, 08:47,

TABLEAU 7 **Horaire_d'enseignement.**

Professeur	*département*	*Numéro du cours*	*Pièce*	*Temps*
Cruz	Zoologie	335	A100	09H00
Cruz	Zoologie	412	A100	8 h 00
Farber	Psychologie	501	A100	15:00
Farber	Psychologie	617	A110	11H00
Grammer	La physique	544	B505	16H00
Rosen	L'informatique	518	N521	14H00
Rosen	Mathématiques	575	N502	15:00

TABLEAU 8 **Vols.**

Compagnie aérienne	*Numéro de vol*	*Porte*	*Destination*	*Heure de départ*
Nadir	122	34	Detroit	08:10
Acmé	221	22	Denver	08:17
Acmé	122	33	Ancrage	08:22
Acmé	323	34	Honolulu	08:30
Nadir	199	13	Detroit	08:47
Acmé	222	22	Denver	09:10
Nadir	322	34	Detroit	09:44

et 09:44. SQL utilise la clause FROM pour identifier la relation n -aire à laquelle la requête est appliquée, le Clause WHERE pour spécifier la condition de l'opération de sélection et la clause SELECT pour spécifiez l'opération de projection à appliquer. (*Attention:* SQL utilise SELECT pour représenter une projection plutôt qu'une opération de sélection. Ceci est un exemple malheureux de conflit terminologie.) ▲

L'exemple 13 montre comment effectuer des requêtes SQL impliquant plusieurs tables.

EXEMPLE 13 L'instruction SQL

```
SELECT Professeur, Temps
```

FROM Teaching_assignments, Class_schedule
OERE Département = 'Mathématiques'

est utilisé pour trouver la projection $P_{1,5}$ des 5-tuples dans la base de données (présentée dans le tableau 7), qui est la jointure J_2 des bases de données Teaching_assignments et Class_schedule des tableaux 5 et 6, respectivement, qui remplissent la condition: Département = Mathématiques. La sortie consisterait en du single 2-tuple (Rosen, 15h00). La clause SQL FROM est utilisée ici pour rechercher la jointure de deux bases de données différentes. ▲

Nous n'avons abordé que les concepts de base des bases de données relationnelles dans cette section Plus des informations peuvent être trouvées dans [AhUl95].

Des exercices

1. Énumérez les triplets dans la relation { (a, b, c) | a, b et c sont entiers avec $0 < a < b < c < 5$}.

2. Quels 4-tuples sont dans la relation { (a, b, c, d) | a, b, c, et d sont des entiers positifs avec $abcd = 6$}?

3. Énumérez les 5 tuples dans la relation dans le tableau 8.

4. En supposant qu'aucun nouveau n -tuples ne soit ajouté, trouvez tous les clés primaires pour les relations affichées dans

a) Tableau 3. **b)** Tableau 5.

c) Tableau 6. **d)** Tableau 8.

5. En supposant qu'aucun nouveau n -tuples ne soit ajouté, trouvez un ite clé avec deux champs contenant le champ *Airline* pour le base de données du tableau 8.

6. En supposant qu'aucun nouveau n -tuples ne soit ajouté, trouvez un clé ite avec deux champs contenant le champ Professeur pour la base de données du tableau 7.

7. Les 3-tuples dans une relation 3-aire représentent les éléments suivants attributs d'une base de données des étudiants: numéro d'identification de l'étudiant, nom, numéro de téléphone.

a) Le numéro d'identification de l'élève est-il susceptible d'être une clé primaire?

b) Le nom est-il susceptible d'être une clé primaire?

c) Le numéro de téléphone est-il susceptible d'être une clé primaire?

8. Les 4-tuples dans une relation à 4 aires représentent ces attributs des livres publiés: titre, ISBN, date de publication, nombre de pages.

a) Quelle est la clé primaire probable de cette relation?

b) Dans quelles conditions (titre, date de publication) être une clé composite?

c) Dans quelles conditions (titre, nombre de pages) être une clé composite?

9. Les 5 tuples dans une relation à 5 aires représentent ces attributs de toutes les personnes aux États-Unis: nom, sécurité sociale numéro, adresse, ville, état.

a) Déterminez une clé primaire pour cette relation.
b) Dans quelles conditions (nom, adresse) être une clé composite?
c) Dans quelles conditions (nom, adresse, ville) être une clé composite?

10. Qu'obtenez-vous en appliquant l'opération de sélection ateur *de* c, où C est la condition Chambre = A100, à la base de données dans le tableau 7?

11. Qu'obtenez-vous en appliquant l'opération de sélection ator s_C, où C est la condition Destination = Detroit, à la base de données du tableau 8?

12. Qu'obtenez-vous lorsque vous appliquez l'option de sélection érateur s_C, où C est la condition (Projet = 2) ∧ (Quantité ≥ 50), à la base de données du tableau 10?

13. Qu'obtenez-vous lorsque vous appliquez l'opération de sélection

23. Montrer que si C est une condition que des éléments de les relations n -ary R et S peuvent satisfaire, alors $s_C(R \cap S) = s_C(R) \cap s_C(S)$.

24. Montrer que si C est une condition que des éléments de les relations n -ary R et S peuvent satisfaire, alors $s_C(R - S) = s_C(R) - s_C(S)$.

25. Montrer que si R et S sont tous deux des relations n -ary, alors $P_{i_1, i_2, \ldots, i_m}(R \cup S) = P_{i_1, i_2, \ldots, i_m}(R) \cup P_{i_1, i_2, \ldots, i_m}(S)$.

26. Donnez un exemple pour montrer que si R et S sont tous deux n -ary relations, alors $P_{i_1, i_2, \ldots, i_m}(R \cap S)$ peut être différent de $P_{i_1, i_2, \ldots, i_m}(R) \cap P_{i_1, i_2, \ldots, i_m}(S)$.

27. Donnez un exemple pour montrer que si R et S sont tous deux n -ary relations, alors $P_{i_1, i_2, \ldots, i_m}(R - S)$ peut être différent de $P_{i_1, i_2, \ldots, i_m}(R) - P_{i_1, i_2, \ldots, i_m}(S)$.

28. a) Quelles sont les opérations qui correspondent à la requête exprimé en utilisant cette instruction SQL?

ator s_C, où C est la condition (Compagnie aérienne = Nadir) ∨ (Destination = Denver), à la base de données du tableau 8?

14. Qu'obtient-on en appliquant la projection $P_{2,3,5}$ au 5-tuple (a, b, c, d, e) ?

15. Quel mappage de projection est utilisé pour supprimer le premier, deuxième et quatrième composants d'un 6-tuple?

16. Affichez le tableau produit en appliquant la projection $P_{1,2,4}$ au tableau 8.

17. Affichez le tableau produit en appliquant la projection $P_{1,4}$ au tableau 8.

18. Combien de composants y a-t-il dans les n -tuples du table obtenue en appliquant l'opérateur de jointure J_3 à deux tables avec 5-tuples et 8-tuples, respectivement?

19. Construisez la table obtenue en appliquant la jointure opérateur J_2 aux relations des tableaux 9 et 10.

20. Montrer que si C_1 et C_2 sont des conditions qui les éléments de la relation n -aire R peuvent satisfaire, alors $s_{C_1 \wedge C_2}(R) = s_{C_1}(s_{C_2}(R))$.

21. Montrer que si C_1 et C_2 sont des conditions qui les relations n -aires R peuvent satisfaire, alors $s_{C_1}(s_{C_2}(R)) = s_{C_2}(s_{C_1}(R))$.

22. Montrer que si C est une condition que des éléments de les relations n -ary R et S peuvent satisfaire, alors $s_C(R \cup S) = s_C(R) \cup s_C(S)$.

CHOISIR le fournisseur
DE Part_needs
O 1000 1000 ≤ Numéro_de pièce ≤ 5000

b) Quelle est la sortie de cette requête compte tenu de la base de données Tableau 9 en entrée?

29. a) Quelles sont les opérations qui correspondent à la requête exprimé en utilisant cette instruction SQL?

SELECT Fournisseur, Projet
DE Part_needs, Parts_inventory
O Quantity Quantité ≤ 10

b) Quel est le résultat de cette requête compte tenu des bases de données dans les tableaux 9 et 10 en entrée?

30. Déterminer s'il existe une clé primaire pour la relation dans l'exemple 2.

31. Déterminer s'il existe une clé primaire pour la relation dans l'exemple 3.

32. Montrer qu'une relation n -aire avec une clé primaire peut être considéré comme le graphique d'une fonction qui mappe les valeurs de la clé primaire de (n - 1) -tuples formés à partir des valeurs de les autres domaines.

TABLEAU 9 **Part_needs.**

Fournisseur	*Numéro d'article*	*Projet*
23	1092	1
23	1101	3
23	9048	4
31	4975	3
31	3477	2
32	6984	4
32	9191	2
33	1001	1

TABLEAU 10 **Inventaire des pièces.**

Numéro d'article	*Projet*	*Quantité*	*Code couleur*
1001	1	14	8
1092	1	2	2
1101	3	1	1
3477	2	25	2
4975	3	6	2
6984	4	dix	1
9048	4	12	2
9191	2	80	4

Représentation des relations

introduction

Dans cette section et dans la suite de ce chapitre, toutes les relations que nous étudions seront des relations binaires. Pour cette raison, dans cette section et dans le reste de ce chapitre, le mot relation fera toujours référence à une relation binaire. Il existe de nombreuses façons de représenter une relation entre des ensembles finis.Comme nous avons vu dans la section 9.1, une façon est de lister ses paires ordonnées.Une autre façon de représenter une relation est de utilisez une table, comme nous l'avons fait dans l'exemple 3 de la section 9.1. Dans cette section, nous discuterons de deux alternatives méthodes de représentation des relations. Une méthode utilise des matrices zéro à un. L'autre méthode utilise représentations picturales appelées graphes dirigés, dont nous parlerons plus loin dans cette section.

Généralement, les matrices sont appropriées pour la représentation des relations dans les programmes informatiques. D'un autre côté, les gens trouvent souvent la représentation des relations à l'aide de graphiques dirigés utile pour comprendre les propriétés de ces relations.

Représenter les relations à l'aide de matrices

Une relation entre des ensembles finis peut être représentée à l'aide d'une matrice zéro-un. Supposons que R est un relation de $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ à $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. (Ici les éléments des ensembles A et B ont été énumérés dans un ordre particulier, mais arbitraire. De plus, lorsque $A = B$ nous utilisons même ordre pour A et B.) La relation R peut être représentée par la matrice $\mathbf{M}_R = [m_{ij}]$, où

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } (a_i, b_j) \in R, \\ 0 \text{ si } (a_i, b_j) \notin R. \end{cases}$$

En d'autres termes, la matrice zéro-un représentant R a un 1 comme entrée (i, j) lorsqu'un a_i est lié à b_j, et un 0 dans cette position si a_i n'est pas lié à b_j. (Une telle représentation dépend de la commandes utilisées pour A et B.)

L'utilisation de matrices pour représenter les relations est illustrée dans les exemples 1 à 6.

EXEMPLE 1 Supposons que $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{1, 2\}$. Soit R la relation de A à B contenant (a, b) si $a \in A$, $b \in B$ et $a > b$. Quelle est la matrice représentant R si $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ et $a_3 = 3$, et $b_1 = 1$ et $b_2 = 2$?

Solution: Parce que $R = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$, la matrice de R est

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 0\ 0 \\ \text{dix} \\ 1\ 1 \end{bmatrix}.$$

Les 1s dans $\mathbf{M}_R$ montrent que les paires $(2, 1)$, $(3, 1)$ et $(3, 2)$ appartiennent à R. Les 0 montrent que non d' autres paires appartiennent à R. ▲

EXEMPLE 2 Soit $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ et $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$. Quelles paires ordonnées sont dans la relation R représenté par la matrice

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 0\ 1\ 0\ 0\ 0 \\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0 \\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1 \end{bmatrix}?$$

Solution: Parce que R *se* compose de ces paires ordonnées (a_i, b_j) avec $m_{ij} = 1$, il s'ensuit que

$$R = \{(a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_3), (a_2, b_4), (a_3, b_1), (a_3, b_3), (a_3, b_5)\}.$$ ▲

La matrice d'une relation sur un ensemble, qui est une matrice carrée, peut être utilisée pour déterminer si la relation a certaines propriétés. Rappelons qu'une relation R sur A est réflexive si $(a, a) \in R$ chaque fois $un \in A$. Ainsi, R est réflexif si et seulement si $(a_i, a_i) \in R$ pour $i = 1, 2, ..., n$. Par conséquent, R est réflexif si et seulement si $m_{ii} = 1$, pour $i = 1, 2, ..., n$. En d'autres termes, R est réflexif si tous les éléments sur la diagonale principale de $\mathbf{M}_R$ est égale à 1, comme le montre la figure 1. Notez que les éléments de la la diagonale principale peut être 0 ou 1.

1
1
1

1
1

FIGURE 1 Le Matrice zéro-un pour un réflexif Relation. (De Diagonal Éléments peuvent Soyez 0 ou 1.)

La relation R est symétrique si $(a, b) \in R$ implique que $(b, a) \in R$. Par conséquent, le la relation R sur l'ensemble $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ est symétrique si et seulement si $(a_j, a_i) \in R$ chaque fois $(a_i, a_j) \in R$. En termes des entrées de $\mathbf{M}_R$, R est symétrique si et seulement si $m_{ji} = 1$ chaque fois $m_{ij} = 1$. Cela signifie également $m_{ji} = 0$ chaque fois que $m_{ij} = 0$. Par conséquent, R est symétrique si et uniquement si $m_{ij} = m_{ji}$, pour toutes les paires d'entiers i et j avec $i = 1, 2, ..., n$ et $j = 1, 2, ..., n$. Rappelant la définition de la transposition d'une matrice de la section 2.6, nous voyons que R est symétrique si et seulement si

$$\mathbf{M}_R = (\mathbf{M}_R)^t,$$

c'est-à-dire, si $\mathbf{M}_R$ est une matrice symétrique. La forme de la matrice pour une relation symétrique est illustrée dans la figure 2 (a).

La relation R est antisymétrique si et seulement si $(a, b) \in R$ et $(b, a) \in R$ impliquant que $a = b$. Par conséquent, la matrice d'une relation antisymétrique a la propriété que si $m_{ij} = 1$ avec $i = j$, alors $m_{ji} = 0$. Ou, en d'autres termes, soit $m_{ij} = 0$ ou $m_{ji} = 0$ lorsque $i = j$. La forme de la matrice d'une relation antisymétrique est illustrée à la figure 2 (b).

1 0
1 0

(a) Symétrique

1 0 0
0 0 1

b) Antisymétrique

FIGURE 2 Les matrices zéro à un pour Relations symétriques et antisymétriques.

EXEMPLE 3 Supposons que la relation R sur un ensemble soit représentée par la matrice

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

R est-il réflexif, symétrique et / ou antisymétrique?

Solution: Parce que tous les éléments diagonaux de cette matrice sont égaux à 1, R est réflexif. En outre, parce que $\mathbf{M}_R$ est symétrique, il s'ensuit que R est symétrique. Il est également facile de voir que R n'est pas antisymétrique. ▲

Les opérations booléennes join and meet (discutées dans la section 2.6) peuvent être utilisées pour trouver le matrices représentant l'union et l'intersection de deux relations. Supposons que R_1 et R_2 sont des relations sur un ensemble A représenté respectivement par les matrices $\mathbf{M}_{R_1}$ et $\mathbf{M}_{R_2}$. La matrice

représentant l'union de ces relations a un 1 dans les positions où $\mathbf{M}_{R_1}$ ou $\mathbf{M}_{R_2}$ a
a 1. La matrice représentant l'intersection de ces relations a un 1 aux positions où
les deux $\mathbf{M}_{R_1}$ et $\mathbf{M}_{R_2}$ ont un 1. Ainsi, les matrices représentant l'union et l'intersection de ces
les relations sont

$$\mathbf{M}_{R_1 \cup R_2} = \mathbf{M}_{R_1} \vee \mathbf{M}_{R_2} \quad \text{et} \quad \mathbf{M}_{R_1 \cap R_2} = \mathbf{M}_{R_1} \wedge \mathbf{M}_{R_2}.$$

EXEMPLE 4 Supposons que les relations R_1 et R_2 sur un ensemble A soient représentées par les matrices

$$\mathbf{M}_{R_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{M}_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quelles sont les matrices représentant $R_1 \cup R_2$ et $R_1 \cap R_2$?

Solution: Les matrices de ces relations sont

$$\mathbf{M}_{R_1 \cup R_2} = \mathbf{M}_{R_1} \vee \mathbf{M}_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_{R_1 \cap R_2} = \mathbf{M}_{R_1} \wedge \mathbf{M}_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

▲

Nous tournons maintenant notre attention vers la détermination de la matrice du composite des relationsCette matrice peut être trouvée en utilisant le produit booléen des matrices (discuté dans la section 2.6) pour ces relations. En particulier, supposons que R est une relation de A à B et S est une relation de B à C . Supposons que A , B et C aient respectivement m , n et p éléments. Laissez le zéro– une matrice pour $S \circ R$, R et S soit $\mathbf{M}_{S \circ R} = [t_{ij}]$, $\mathbf{M}_R = [r_{ij}]$ et $\mathbf{M}_S = [s_{ij}]$, respectivement (ces matrices ont des tailles $m \times p$, $m \times n$ et $n \times p$, respectivement). La paire ordonnée (a_i, c_j) appartient à $S \circ R$ si et seulement s'il y a un élément b_k tel que (a_i, b_k) appartient à R et (b_k, c_j) appartient à S . Il s'ensuit que $t_{ij} = 1$ si et seulement si $r_{ik} = s_{kj} = 1$ pour certains k . De la définition du produit booléen, cela signifie que

$$\mathbf{M}_{S \circ R} = \mathbf{M}_R \odot \mathbf{M}_S .$$

EXEMPLE 5 Trouver la matrice représentant les relations $S \circ R$, où les matrices représentant R et S sont

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{M}_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solution: La matrice pour $S \circ R$ est

$$\mathbf{M}_{S \circ R} = \mathbf{M}_R \odot \mathbf{M}_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

▲

La matrice représentant le composite de deux relations peut être utilisée pour trouver la matrice pour $\mathbf{M}_{R^n}$. En particulier,

$$\mathbf{M}_{R^n} = \mathbf{M}_R^{[n]},$$

de la définition des pouvoirs booléens. L'exercice 35 demande une preuve de cette formule.

EXEMPLE 6 Trouver la matrice représentant la relation R^2, où la matrice représentant R est

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solution: La matrice pour R^2 est

$$\mathbf{M}_{R^2} = \mathbf{M}_R^{[2]} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

▲

Représentation des relations à l'aide de digraphes

Nous avons montré qu'une relation peut être représentée en listant toutes ses paires ordonnées ou en en utilisant une matrice zéro-un. Il existe un autre moyen important de représenter une relation à l'aide d'un représentation picturale. Chaque élément de l'ensemble est représenté par un point, et chaque ordonné la paire est représentée à l'aide d'un arc dont la direction est indiquée par une flèche. Nous utilisons de telles images représentations quand on pense aux relations sur un ensemble fini comme des **graphes dirigés**, ou des **digraphes**.

DÉFINITION 1 Un *graphe orienté*, ou *digraphe*, se compose d'un ensemble V de *sommets* (ou *nœuds*) avec un ensemble E de paires ordonnées d'éléments de V appelés *arêtes* (ou *arcs*). Le sommet a est appelé l'*initiale sommet* du bord (a, b), et le sommet b est appelé le *sommet terminal* de ce bord.

Un bord de la forme (a, a) est représenté à l'aide d'un arc du sommet a vers lui-même. Tel un bord est appelé une **boucle**.

EXEMPLE 7 Le graphe orienté avec les sommets a, b, c et d et les arêtes (a, b), (a, d), (b, b), (b, d), (c, a), (c, b) et (d, b) sont affichés dans la figure 3. ▲

une *b*

ré *c*

FIGURE 3
Un graphique dirigé.

La relation R sur un ensemble A est représentée par le graphe orienté qui a les éléments de A comme sommets et paires ordonnées (a, b), où $(a, b) \in R$, comme arêtes. Cette mission met en place un correspondance entre les relations sur un ensemble A et les graphes dirigés avec A comme leur ensemble de sommets. Ainsi, chaque déclaration sur les relations correspond à une déclaration sur dirigé graphiques, et vice versa. Les graphiques dirigés donnent un affichage visuel des informations sur les relations. Comme tels, ils sont souvent utilisés pour étudier les relations et leurs propriétés. (Notez que les relations d'un ensemble A à un ensemble B peut être représenté par un graphe orienté où il y a un sommet pour chaque élément de A et un sommet pour chaque élément de B, comme indiqué dans la section 9.1. Cependant, lorsque $A = B$, une telle représentation fournit beaucoup moins de perspicacité que les représentations digraphiques décrites ici.) l'utilisation de graphes dirigés pour représenter des relations sur un ensemble est illustrée dans les exemples 8 à 10.

EXEMPLE 8 Le graphe orienté de la relation

$$R = \{(1,1), (1,3), (2,1), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (4,1)\}$$

sur l'ensemble {1 , 2 , 3 , 4} est illustré à la figure 4. ▲

EXEMPLE 9 Quelles sont les paires ordonnées dans la relation R représentée par le graphe orienté montré sur la figure 5?

Solution: Les paires ordonnées (x, y) dans la relation sont

$$R = \{(1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,3), (4,1), (4,3)\}.$$

Chacune de ces paires correspond à un bord du graphe orienté, avec $(2,2)$ et $(3,3)$ correspondant sponding aux boucles. ▲

Nous étudierons dirigé graphiques largement en Chapitre 10.

Le graphique dirigé représentant une relation peut être utilisé pour déterminer si la relation a diverses propriétés. Par exemple, une relation est réflexive si et seulement s'il y a une boucle à chaque sommet du graphe orienté, de sorte que chaque paire ordonnée de la forme (x, x) apparaît dans la relation. Une relation est symétrique si et seulement si pour chaque arête entre des sommets distincts dans son digraphe il y a un bord dans la direction opposée, de sorte que (y, x) est dans la relation chaque fois que (x, y) est dans la relation. De même, une relation est antisymétrique si et seulement s'il n'y a jamais deux arêtes dans des directions opposées entre des sommets distincts. Enfin, une relation est transitive si et seulement si chaque fois qu'il y a une arête d'un sommet x à un sommet y et une arête d'un sommet y à un sommet z , il y a une arête de x à z (complétant un triangle où chaque côté est une arête dirigée dans le bon sens).

Remarque: Notez qu'une relation symétrique peut être représentée par un graphe non orienté, qui est un graphique où les arêtes n'ont pas de directions. Nous étudierons les graphiques non orientés au chapitre 10.

EXEMPLE 10 Déterminer si les relations pour les graphes dirigés illustrés à la figure 6 sont réflexives, symétriques métrique, antisymétrique et / ou transitive.

Solution: Parce qu'il y a des boucles à chaque sommet du graphe orienté de R , il est réflexif. R est ni symétrique ni antisymétrique car il y a un bord de a vers b mais pas un de b vers a , mais il y a des bords dans les deux sens reliant b et c . Enfin, R n'est pas transitif car il y a une arête de a à b et une arête de b à c , mais aucune arête de a à c .

1 2

4 3

FIGURE 4 Le Graphique dirigé de la relation *R* .

1 2

4 3

FIGURE 5 Le Graphique dirigé de la relation *R* .

une

b *c*

(a) Graphique dirigé de *R*

une *b*

c *ré*

(b) Graphique dirigé de *S*

FIGURE 6 Les graphiques dirigés du Relations *R* et *S* .

Parce que les boucles ne sont pas présentes à tous les sommets du graphe orienté de S , cette relation n'est pas réfléchi. Il est symétrique et non antisymétrique, car chaque arête entre des sommets distincts est accompagné d'un bord dans la direction opposée. Il n'est pas difficile non plus de voir graphe que S n'est pas transitif, car *(c, a)* et *(a, b)* appartiennent à S , mais *(c, b)* n'appartient pas de S . ▲

Des exercices

1. Représentez chacune de ces relations sur {1 , 2 , 3} avec une matrice (avec les éléments de cet ensemble répertoriés dans l'ordre croissant).

a) $\{(1,1),(1,2),(1,3)\}$
b) $\{(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\}$
c) $\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)\}$
d) $\{(1,3),(3,1)\}$

2. Représentez chacune de ces relations sur {1 , 2 , 3 , 4} avec un matrice (avec les éléments de cet ensemble énumérés de plus en plus commande).

a) $\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$
b) $\{(1,1),(1,4),(2,2),(3,3),(4,1)\}$
c) $\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3)\}$
d) $\{(2,4),(3,1),(3,2),(3,4)\}$

3. Énumérez les paires ordonnées dans les relations sur {1 , 2 , 3} répondre à ces matrices (où les lignes et les colonnes correspondent aux nombres entiers classés par ordre croissant).

une) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

4. Énumérez les paires ordonnées dans les relations sur {1 , 2 , 3 , 4} répondre à ces matrices (où les lignes et les colonnes correspondent aux nombres entiers classés par ordre croissant).

une) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

5. Comment la matrice représentant une relation R sur un ensemble A être utilisé pour déterminer si la relation est irréflexive?

6. Comment la matrice représentant une relation R sur un ensemble A être utilisé pour déterminer si la relation est asymétrique?

7. Déterminez si les relations représentées par les matrices dans l'exercice 3 sont réflexives, irréflexives, symétriques, antisymétrique et / ou transitive.

8. Déterminez si les relations représentées par les matrices dans l'exercice 4 sont réflexives, irréflexives, symétriques, antisymétrique et / ou transitive.

9. Combien d'entrées non nulles la matrice représentant la relation R sur $A = \{1, 2, 3, ..., 100\}$ constituée de la 100 premiers entiers positifs ont si R est

a) $\{(a, b) \mid a > b\}$? **b)** $\{(a, b) \mid a = b\}$?
c) $\{(a, b) \mid a = b + 1\}$? **d)** $\{(a, b) \mid a = 1\}$?
e) $\{(a, b) \mid ab = 1\}$?

10. Combien d'entrées différentes de zéro la matrice représentant la relation R sur $A = \{1, 2, 3, ..., 1000\}$ consistant en les 1000 premiers entiers positifs ont si R est

a) $\{(a, b) \mid a \leq b\}$?
b) $\{(a, b) \mid a = b \pm 1\}$?
c) $\{(a, b) \mid a + b = 1000\}$?
d) $\{(a, b) \mid a + b \leq 1001\}$?
e) $\{(a, b) \mid a \neq 0\}$?

11. Comment la matrice de $\overline{R}$, complément de la relation R , se trouve dans la matrice représentant R , quand R est une relation sur un ensemble fini A ?

12. Comment la matrice pour R^{-1} peut-elle , l'inverse de la relation R , se trouve dans la matrice représentant R , quand R est une relation sur un ensemble fini A ?

13. Soit R la relation représentée par la matrice

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Trouvez la matrice représentant

a) R^{-1} . **b)** $\overline{R}$. **c)** R^2 .

14. Soit R_1 et R_2 des relations sur un ensemble A représenté par le matrices

$$\mathbf{M}_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{M}_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Trouvez les matrices qui représentent

a) $R_1 \cup R_2$. **b)** $R_1 \cap R_2$. **c)** $R_2 \circ R_1$.
d) $R_1 \circ R_1$. **e)** $R_1 \oplus R_2$.

15. Soit R la relation représentée par la matrice

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Trouvez les matrices qui représentent

a) R^2 . **b)** R^3 . **c)** R^4 .

16. Soit R une relation sur un ensemble A avec n éléments. S'il y a sont k entrées non nulles dans $\mathbf{M}_R$, la matrice représentant R, combien d'entrées non nulles y a-t-il dans $\mathbf{M}_{R^{-1}}$, la matrice représentant R^{-1}, l'inverse de R ?

17. Soit R une relation sur un ensemble A avec n éléments. S'il y a sont k entrées non nulles dans $\mathbf{M}_R$, la matrice représentant R, combien d'entrées non nulles y a-t-il dans $\mathbf{M}_{\overline{R}}$, la matrice représentant $\overline{R}$, le complément de R ?

18. Dessinez les graphiques dirigés représentant chacune des relations tions de l'exercice 1.

19. Dessinez les graphiques dirigés représentant chacune des relations tions de l'exercice 2.

20. Tracez le graphe orienté représentant chacune des relations de l'exercice 3.

21. Tracez le graphe orienté représentant chacune des relations de l'exercice 4.

22. Tracez le graphique orienté qui représente la relation $\{(a, a), (a, b), (b, c), (c, b), (c, d), (d, a), (d, b)\}$.

Dans les exercices 23-28, énumérez les paires ordonnées dans les relations ressentis par les graphes dirigés.

23. *une* *b* *c*

24. *une* *b* *c*

25. *une* *b* *c* *ré*

26. *une* *b* *c* *ré*

27. *une* *b* *c* *ré*

28. *b* *c* *ré*

29. Comment le graphe orienté d'une relation R sur un fini l'ensemble A *doit* être utilisé pour déterminer si une relation est asymétrique?

30. Comment le graphe orienté d'une relation R sur un fini l'ensemble A soit utilisé pour déterminer si une relation est ive?

31. Déterminez si les relations représentées par la di- les graphiques rectifiés montrés dans les exercices 23-25 sont réflexifs, irréflexif, symétrique, antisymétrique et / ou transitif.

32. Déterminez si les relations représentées par la di- graphiques illustrés dans les exercices 26 à 28 sont réflexifs, irré- réflexif, symétrique, antisymétrique, asymétrique et / ou transitif.

33. Soit R soit une relation sur un ensemble A. Expliquez comment utiliser le graphe rectifié représentant R pour obtenir le graphe orienté représentant la relation inverse R^{-1}.

34. Soit R soit un rapport sur un ensemble A. Expliquez comment utiliser le graphe rectifié représentant R pour obtenir le graphe orienté représentant la relation complémentaire $\overline{R}$.

35. Montrer que si $\mathbf{M}_R$ est la matrice représentant la relation R, puis $\mathbf{M}_R^{[n]}$ est la matrice représentant la relation R^n.

36. Étant donné les graphiques dirigés représentant deux relations, comment peut le graphique dirigé de l'union, intersection, sym- différence métrique, différence et composition de ces trouver des relations?

Fermeture des relations

introduction

Un réseau informatique possède des centres de données à Boston, Chicago, Denver, Détroit, New York et San Diego. Il existe des lignes téléphoniques directes à sens unique de Boston à Chicago, de Boston à Détroit, de Chicago à Détroit, de Détroit à Denver et de New York à San Diego. Soit R la relation contenant (a, b) s'il y a une ligne téléphonique du centre de données dans a vers qu'en b. Comment déterminer s'il existe un lien (éventuellement indirect) composé d'un ou plus de lignes téléphoniques d'un centre à l'autre? Parce que tous les liens ne sont pas directs, comme lien de Boston à Denver qui passe par Detroit, R ne peut pas être utilisé directement pour répondre à cette question. Dans le langage des relations, R n'est pas transitif, donc il ne contient pas toutes les paires qui peuvent être lié. Comme nous le montrerons dans cette section, nous pouvons trouver toutes les paires de centres de données qui ont un lien en construisant une relation transitive S contenant R telle que S est un sous-ensemble de chaque transitif relation contenant R. Ici, S est la relation transitive plus petit qui contient R. Cette relation est appelé la **fermeture transitive** de R.

D'une manière générale, que R soit une relation sur un ensemble A. R peut ou non avoir une propriété **P**, telle que réflexivité, symétrie ou transitivité. S'il existe une relation S avec la propriété **P** contenant R telle que S est un sous-ensemble de chaque relation avec la propriété **P** contenant R, alors S est appelé la **fermeture** de R par rapport à **P** . (Notez que la fermeture d'une relation à l'égard d'un bien peut ne pas exister; voir les exercices 15 et 35.) Nous montrerons comment les fermetures réflexives, symétriques et transitives des relations peuvent être trouvées.

Fermetures

La relation $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2)\}$ sur l'ensemble $A = \{1, 2, 3\}$ n'est pas réflexive. Comment puis on produit une relation réflexive contenant R *la* plus petite possible? Cela peut être fait par l' ajout $(2, 2)$ et $(3, 3)$ à R , parce que ce sont les seuls couples de la forme (a, a) qui ne sont pas dans R . De toute évidence, cette nouvelle relation contient R . De plus, *toute* relation réflexive qui contient R doit contiennent également $(2, 2)$ et $(3, 3)$. Parce que cette relation contient R , est réflexive et est contenue au sein de chaque rapport réflexif qui contient R , on l'appelle la **fermeture réflexive** de R .

Comme l'illustre cet exemple, étant donné une relation R sur un ensemble A , la fermeture réflexive de R peut être formé en ajoutant à R toutes les paires de la forme (a, a) avec *un* $\in A$, ne sont pas déjà dans R . L'addition de ces paires produit une nouvelle relation qui est réflexive, contient R et est contenue dans tout relation réflexive contenant R . On voit que la fermeture réflexive de R est égale à $R \cup$, où $= \{(a, a) \mid a \in A\}$ est la **relation diagonale** sur A . (Le lecteur doit vérifier cela.)

EXEMPLE 1 Quelle est la fermeture réflexive de la relation $R = \{(a, b) \mid$ *un* $< b\}$ sur l'ensemble des entiers?

Solution: La fermeture réflexive de R est

$$R \cup \quad = \{(a, b) \mid a < b\} \cup \{(a, a) \mid a \in \mathbf{Z}\} = \{(a, b) \mid a \leq b\}.$$ ▲

La relation $\{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$ sur $\{1, 2, 3\}$ n'est pas symétrique . Comment peut-on produire une relation symétrique aussi petite que possible et contenant R ? Pour faire ça, nous devons seulement ajouter $(2, 1)$ et $(1, 3)$, car ce sont les seules paires de la forme (b, a) avec $(a, b) \in R$ qui ne sont pas dans R . Cette nouvelle relation est symétrique et contient R . En outre, *tout* relation symétrique qui contient R doit contenir cette nouvelle relation, car une relation symétrique qui contient R doit contenir $(2, 1)$ et $(1, 3)$. Par conséquent, cette nouvelle relation est appelée **fermeture symétrique** de R .

Comme l'illustre cet exemple, la fermeture symétrique d'une relation R peut être construite par en ajoutant toutes les paires ordonnées de la forme (b, a) , où (a, b) est dans la relation, qui ne sont pas prêt présent dans R . L'ajout de ces paires produit une relation symétrique, qui contient R , et qui est contenu dans toute relation symétrique qui contient R . La fermeture symétrique d'un La relation peut être construite en prenant l'union d'une relation avec son inverse (défini dans le préambule de l'exercice 26 à la section 9.1); c'est-à-dire, $R \cup R^{-1}$ est la fermeture symétrique de R , où $R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$. Le lecteur doit vérifier cette déclaration.

EXEMPLE 2 Quelle est la fermeture symétrique de la relation $R = \{(a, b) \mid a > b\}$ sur l'ensemble des entiers positifs?

Solution: La fermeture symétrique de R est la relation

$$R \cup R^{-1} = \{(a, b) \mid a > b\} \cup \{(b, a) \mid a > b\} = \{(a, b) \mid a = b\}.$$

Cette dernière égalité suit parce que R contient toutes les paires ordonnées d'entiers positifs où le le premier élément est supérieur au deuxième élément et R^{-1} contient toutes les paires ordonnées de positif entiers où le premier élément est inférieur au second. ▲

Supposons qu'une relation R n'est pas transitive. Comment pouvons-nous produire une relation transitive qui contient R tel que cette nouvelle relation soit contenue dans toute relation transitive qui tains R ? Peut- on produire la fermeture transitive d'une relation R en ajoutant toutes les paires de la forme (a, c) , où (a, b) et (b, c) sont déjà dans la relation? Considérez la relation

$R = \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2)\}$ sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$. Cette relation n'est pas transitive car il ne contient pas toutes lespaires de la forme *(a, c)* où *(a, b)* et *(b, c)* sont dans R. Les paires de cette forme qui n'est pas dans R sont $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$ et $(3, 1)$. L'ajout de ces paires neproduit *pas de* relation transitive, car la relation résultante contient $(3, 1)$ et $(1, 4)$ mais ne contient pas $(3, 4)$. Cela montre que la construction de la fermeture transitive d'une relation est plus compliquée que construire la fermeture réflexive ou symétrique. Le reste de cette section développe algo-
rithms pour construire des fermetures transitives. Comme nous le verrons plus loin dans cette section, le transitif la fermeture d'une relation peut être trouvée en ajoutant de nouvelles paires ordonnées qui doivent être présentes, puis répéter ce processus jusqu'à ce qu'aucune nouvelle paire ordonnée ne soit nécessaire.

Chemins dans les graphiques dirigés

Nous verrons que la représentation des relations par des graphes dirigés aide à la construction de transitifs fermetures. Nous introduisons maintenant une terminologie que nous utiliserons à cet effet.

Un chemin dans un graphe orienté est obtenu en parcourant le long des bords (dans la même direction que indiqué par la flèche sur le bord).

DÉFINITION 1 Un *chemin* de a à b dans le graphe orienté G est une séquence d'arêtes (x_0, x_1), (x_1, x_2), $(x_2, x_3), \ldots, (x_{n-1}, x_n)$ dans G, où n est un entier non négatif, et $x_0 = a$ et $x_n = b$, c'est-à-dire une séquence d'arêtes où le sommet terminal d'une arête est le même que l'initiale sommet dans l'arête suivante du chemin. Ce chemin est noté $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ et a *longueur* n. Nous considérons l'ensemble d'arêtes vide comme un chemin de longueur zéro de a à a. Un chemin de la longueur $n \geq 1$ qui commence et se termine au même sommet est appelée *circuit* ou *cycle*.

Un chemin dans un graphe orienté peut passer plusieurs fois par un sommet. De plus, un avantage un graphe orienté peut apparaître plusieurs fois dans un chemin.

EXEMPLE 3 Lesquels des éléments suivants sont des chemins dans le graphique dirigé montré sur la figure 1: *a, b, e, d* ; *a, e, c, d, b* ; *b, a, c, b, a, a, b* ; *d, c* ; *c, b, a* ; *e, b, a, b, a, b, e* ? Quelles sont les longueurs de ceux qui sont des chemins? Lesquels des chemins de cette liste sont des circuits?

Solution: Parce que *(a, b)*, *(b, e)* et *(e, d)* sont chacun un bord, *a, b, e, d* est un chemin de longueur trois. Parce que *(c, d)* n'est pas une arête, *a, e, c, d, b* n'est pas un chemin. De plus, *b, a, c, b, a, a, b* est un chemin de longueur six car *(b, a)*, *(a, c)*, *(c, b)*, *(b, a)*, *(a, a)* et *(a, b)* sont tous des arêtes). On voit que *d, c* est un chemin de longueur un, car *(d, c)* est une arête. Aussi *c, b, a* est un chemin de longueur deux, car *(c, b)* et *(b, a)* sont des arêtes. Tous *(e, b)*, *(b, a)*, *(a, b)*, *(b, a)*, *(a, b)* et *(b, e)* sont des arêtes, donc *e, b, a, b, a, b, e* est un chemin de longueur six.

Les deux chemins *b, a, c, b, a, a, b* et *e, b, a, b, a, b, e* sont des circuits car ils commencent et se terminent au même sommet. Les chemins *a, b, e, d* ; *c, b, a* ; et *d, c* ne sont pas des circuits. ▲

une *b* *c*

ré e

FIGURE 1 Un graphique dirigé.

Le terme *chemin* s'applique également aux relations. Reprendre la définition des graphes dirigés vers relations, il y a un **chemin** de a à b dans R s'il y a une suite d'éléments $a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b$ avec $(a, x_1) \in R$, $(x_1, x_2) \in R, \ldots,$ et $(x_{n-1}, b) \in R$. Le théorème 1 peut être obtenu à partir du définition d'un chemin dans une relation.

THÉORÈME 1 Que R soit une relation sur un ensemble A. Il y a un chemin de longueur n, où n est un entier positif, de a à b si et seulement si $(a, b) \in R^n$.

Preuve: Nous utiliserons l'induction mathématique. Par définition, il y a un chemin de a à b de longueur un si et seulement si $(a, b) \in R$, donc le théorème est vrai quand $n = 1$.

Supposons que le théorème est vrai pour l'entier positif n. Telle est l'hypothèse inductive. Il y a un chemin de longueur $n + 1$ de a vers b si et seulement s'il y a un élément $c \in A$ tel que il y a un chemin de longueur un de a à c, donc $(a, c) \in R$, et un chemin de longueur n de c à b, c'est-à-dire, $(c, b) \in R^n$ Par conséquent, par l'hypothèse inductive, il existe un chemin de longueur $n + 1$ de a à b si et seulement s'il y a un élément c avec $(a, c) \in R$ et $(c, b) \in R^n$. Mais là est un tel élément si et seulement si $(a, b) \in R^{n+1}$. Il existe donc un chemin de longueur $n + 1$ de a à b si et seulement si $(a, b) \in R^{n+1}$. Ceci complète la preuve.

Fermetures transitives

Nous montrons maintenant que trouver la fermeture transitive d'une relation équivaut à déterminer laquelle les paires de sommets du graphe orienté associé sont reliées par un chemin. Dans cet esprit, nous définir une nouvelle relation.

DÉFINITION 2 Que R soit une relation sur un ensemble A. La *relation de connectivité* R^* se compose des paires (a, b) telles qu'il y a un trajet de longueur au moins une de a à b dans R.

Parce que R^n se compose des paires (a, b) telles qu'il existe un chemin de longueur n de a à b, il suit que R^* est l'union de tous les ensembles R^n En d'autres termes,

$$R^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n .$$

La relation de connectivité est utile dans de nombreux modèles.

EXEMPLE 4 Soit R la relation sur l'ensemble de toutes les personnes dans le monde qui contient (a, b) si a a rencontré b . Qu'est-ce que R^n, où n est un entier positif supérieur à un? Qu'est-ce que R^* ?

Solution: La relation R^2 contient (a, b) s'il y a une personne c telle que $(a, c) \in R$ et $(c, b) \in R$, c'est-à-dire, s'il y a une personne c telle que a a rencontré c et c a rencontré b . De même, R^n consiste en ces paires (a, b) telles qu'il y a des personnes $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ telles que a a rencontré x_1 , x_1 a rencontré x_2 , ..., et x_{n-1} a rencontré b .

La relation R^* contient (a, b) s'il y a une séquence de personnes, commençant par a et se terminant avec b , de sorte que chaque personne de la séquence ait rencontré la personne suivante de la séquence (Là de nombreuses conjectures intéressantes sur R^* . Pensez-vous que cette relation de connectivité inclut la paire avec vous comme premier élément et le président de la Mongolie comme deuxième élément? Nous utilisera des graphiques pour modéliser cette application au chapitre 10.) ▲

EXEMPLE 5 Soit R la relation sur l'ensemble de tous les arrêts de métro de New York qui contient (a, b) si elle est possibilité de voyager de l'arrêt a à l'arrêt b sans changer de train. Qu'est-ce que R^n quand n est positif entier? Qu'est-ce que R^* ?

Solution: La relation R^n contient (a, b) s'il est possible de se déplacer de l'arrêt a à l'arrêt b en faisant au plus n - 1 changements de trains. La relation R^* se compose des paires ordonnées (a, b) où il est possibilité de voyager de l'arrêt a à l'arrêt b *en* effectuant autant de changements de trains que nécessaire. (Le le lecteur doit vérifier ces déclarations.) ▲

EXEMPLE 6 Soit R la relation sur l'ensemble de tous les états des États-Unis qui contient (a, b) si l'état a et l'état b a une frontière commune. Qu'est-ce que R^n , où n est un entier positif? Qu'est-ce que R^* ?

Solution: La relation R^n se compose des paires (a, b) , où il est possible de passer de l'état a à l'état b en franchissant exactement n frontières d'État. R^* se compose des paires ordonnées (a, b) , où il est il est possible de passer de l'état a à l'état b *en* traversant autant de frontières que nécessaire. (Le lecteur doit vérifier ces déclarations.) Les seules paires ordonnées qui ne sont pas dans R^* sont ceux qui contiennent des États qui ne sont pas connectés aux États-Unis continentaux (c.-à-d. les paires contenant l'Alaska ou Hawaï). ▲

Le théorème 2 montre que la fermeture transitive d'une relation et la connectivité associée relation sont les mêmes.

THÉORÈME 2 La fermeture transitive d'une relation R est égale à la relation de connectivité R^* .

Preuve: Notez que R^* contient R par définition. Pour montrer que R^* est la fermeture transitive de R il faut aussi montrer que R^* est transitive et que $R^* \subseteq S$ chaque fois que S est une relation transitive qui contient R .

Tout d'abord, nous montrons que R^* est transitif. Si $(a, b) \in R^*$ et $(b, c) \in R^*$, puis il y a des chemins d' *un* à b et de b à c dans R . On obtient un chemin de a à c en commençant par le chemin de a à b et le suivre avec le chemin de b à c . Donc, $(a, c) \in R^*$. Il s'ensuit que R^* est transitif.

Supposons maintenant que S est une relation transitive contenant R . Parce que S est transitif, S^n est également transitive (le lecteur doit le vérifier) et $S^n \subseteq S$ (par le théorème 1 de la section 9.1). En outre, car

$$S_* = \bigcup_{k=1}^{n} S_k$$

et $S_k \subseteq S$, il en résulte que $S_* \subseteq S$. Notez maintenant que si $R \subseteq S$, alors $R_* \subseteq S_*$, car tout chemin dans R est aussi un chemin en S . Par conséquent, $R_* \subseteq S_* \subseteq S$. Ainsi, toute relation transitive qui contient R doit également contenir R_* . Par conséquent, R_* est la fermeture transitive de R .

Maintenant que nous savons que la fermeture transitive est égale à la relation de connectivité, nous transformons notre attention au problème du calcul de cette relation. Nous n'avons pas besoin d'examiner arbitrairement chemins pour déterminer s'il existe un chemin entre deux sommets dans un graphe orienté fini. Comme Le lemme 1 le montre, il suffit d'examiner les chemins ne contenant pas plus de n arêtes, où n est le nombre d'éléments dans l'ensemble.

LEMMA 1 Laissez - A un ensemble avec n éléments, et que R soit une relation sur A . S'il y a un chemin de longueur à au moins un dans R de a à b , alors il y a un tel chemin dont la longueur ne dépasse pas n . En outre, quand $a = b$, s'il y a un chemin de longueur au moins un dans R de a à b , alors il y a un tel chemin dont la longueur ne dépasse pas n - 1.

Page 224

x_{i+2}

x_{j-2}

x_{i+1}

x_{j-1}

$a = x_0$ x_1 x_2 x_{i-1} $x_i = x_j$ x_{j+1} $x_m = b$

FIGURE 2 Production d'un chemin dont la longueur ne dépasse pas n .

Preuve: Supposons qu'il y ait un chemin à partir d' *un* à b dans R . Soit m la longueur du chemin le plus court. Supposons que $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m$, où $x_0 = a$ et $x_m = b$, est un tel chemin.

Supposons que $a = b$ et que $m > n$, de sorte que $m \geq n + 1$. Par le principe du pigeonnier, car il y a n sommets dans A , parmi les m sommets $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$, au moins deux sont égaux (voir Figure 2).

Supposons que $x_i = x_j$ avec $0 \leq i < j \leq m - 1$. Le chemin contient alors un circuit de x_i à lui-même. Ce circuit peut être supprimé du chemin de a à b , laissant un chemin, à savoir, $x_0, x_1, \ldots, x_i, x_{j+1}, \ldots, x_{m-1}, x_m$, de a à b de longueur plus courte. Par conséquent, le chemin le plus court la longueur doit avoir une longueur inférieure ou égale à n .

Le cas où $a = b$ est laissé comme exercice pour le lecteur.

Du lemme 1, nous voyons que la fermeture transitive de R est l'union de $R, R^2, R^3, \ldots,$ et R^n . Cela suit parce qu'il y a un chemin dans R_* entre deux sommets si et seulement s'il y a un chemin entre ces sommets dans R^i , pour un entier positif i avec $i \leq n$. Car

$$R_* = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots \cup R^n$$

et la matrice zéro-un représentant une union de relations est la jointure des matrices zéro-un de ces relations, la matrice zéro-un pour la fermeture transitive est la jointure des matrices zéro-un des premières n puissances de la matrice zéro-un de R .

THÉORÈME 3 Soit $\mathbf{M}_R$ la matrice zéro – un de la relation R sur un ensemble de n éléments. Alors le zéro – un matrice de la fermeture transitive R^* est

$$\mathbf{M}_{R^*} = \mathbf{M}_R \vee \mathbf{M}_R^{[2]} \vee \mathbf{M}_R^{[3]} \vee \cdots \vee \mathbf{M}_R^{[n]}.$$

EXEMPLE 7 Trouver la matrice zéro-un de la fermeture transitive de la relation R où

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solution: Par le théorème 3, il s'ensuit que la matrice zéro – un de R^* est

$$\mathbf{M}_{R^*} = \mathbf{M}_R \vee \mathbf{M}_R^{[2]} \vee \mathbf{M}_R^{[3]}.$$

Car

$$\mathbf{M}_R^{[2]} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{M}_R^{[3]} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

il s'ensuit que

$$\mathbf{M}_{R^*} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

▲

Le théorème 3 peut servir de base à un algorithme de calcul de la matrice du relation R^* . Pour trouver cette matrice, les puissances booléennes successives de $\mathbf{M}_R$, jusqu'à la n ème puissance, sont calculé. Comme chaque puissance est calculée, sa jonction avec la jonction de toutes les petites puissances est formée. Lorsque cela est fait avec la n ème puissance, la matrice pour R^* a été trouvé. Cette procédure est affiché comme algorithme 1.

ALGORITHME 1 Procédure de calcul de la fermeture transitive.

fermeture transitive de **procédure** ($\mathbf{M}_R$: matrice zéro-un $n \times n$)
$\mathbf{A} := \mathbf{M}_R$
$\mathbf{B} := \mathbf{A}$
pour $i := 2$ **à** n

$\mathbf{A} := \mathbf{A} \odot \mathbf{M}_R$
$\mathbf{B} := \mathbf{B} \vee \mathbf{A}$

return B { **B** est la matrice zéro-un pour R^* }

Nous pouvons facilement trouver le nombre d'opérations binaires utilisées par l'algorithme 1 pour déterminer la fermeture transitive d'une relation. Calcul des puissances booléennes $\mathbf{M}_R, \mathbf{M}_R^{[2]}, \ldots, \mathbf{M}_R^{[n]}$ a besoin que $n - 1$ produits booléens de $n \times n$ matrices zéro – un soient trouvés. Chacun de ces produits booléens peut être trouvé en utilisant $n^2(2n - 1)$ opérations binaires. Par conséquent, ces produits peuvent être calculés en utilisant $n^2(2n - 1)(n - 1)$ opérations binaires.

Pour trouver $\mathbf{M}_{R^*}$ à partir des n puissances booléennes de $\mathbf{M}_R$, $n - 1$ jointures de matrices zéro-un ont besoin être trouvé. Le calcul de chacune de ces jointures utilise n^2 opérations bits. Par conséquent, $(n - 1)n^2$ bits op- Les érations sont utilisées dans cette partie du calcul. Par conséquent, lorsque l'algorithme 1 est utilisé, le matrice de la fermeture transitive d'une relation sur un ensemble de n éléments peut être trouvée en utilisant $n^2(2n - 1)(n - 1) + (n - 1)n^2 = 2n^3(n - 1)$, ce qui correspond à des opérations sur $O(n^4)$ bits. Le reste de cette section décrit un algorithme plus efficace pour trouver des fermetures transitives.

Algorithme de Warshall

L'algorithme de Warshall, nommé d'après Stephen Warshall, qui a décrit cet algorithme en 1960, est une méthode efficace pour calculer la fermeture transitive d'une relation. L'algorithme 1 peut trouver le fermeture transitive d'une relation sur un ensemble de n éléments à l'aide de $2n^3(n - 1)$ opérations binaires. cependant, la fermeture transitive peut être trouvée par l'algorithme de Warshall en utilisant seulement $2n^3$ opérations bits.

Remarque: l' algorithme de Warshall est parfois appelé algorithme Roy-Warshall, car Bernard Roy a décrit cet algorithme en 1959.

Supposons que R soit une relation sur un ensemble avec n éléments. Soit $v_1, v_2, \ldots, v_n$ un arbitraire liste de ces n éléments. Le concept des **sommets intérieurs** d'un chemin est utilisé dans Warshall algorithme. Si $a, x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, b$ est un chemin, ses sommets intérieurs sont $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$, ce qui est, tous les sommets du chemin qui se produisent ailleurs que comme les premier et dernier sommets le chemin. Par exemple, les sommets intérieurs d'un chemin a, c, d, f, g, h, b, j dans un graphe orienté

sont c, d, f, g, h et b. Les sommets intérieurs de a, c, d, a, f, b sont c, d, a et f. (Notez que le le premier sommet du chemin n'est pas un sommet intérieur à moins qu'il ne soit à nouveau visité par le chemin, sauf si le dernier sommet. De même, le dernier sommet du chemin n'est pas un sommet intérieur à moins qu'il n'ait été visité précédemment par le chemin, sauf en tant que premier sommet.)

L'algorithme de Warshall est basé sur la construction d'une séquence de matrices zéro à un. Celles-ci les matrices sont $\mathbf{W}_0, \mathbf{W}_1, \ldots, \mathbf{W}_n$, où $\mathbf{W}_0 = \mathbf{M}_R$ est la matrice zéro-un de cette relation, et $\mathbf{W}_k = [w_{ij}^{(k)}]$, où $w_{ij}^{(k)} = 1$ s'il existe un chemin de v_i à v_j tel que tous les sommets intérieurs de ce chemin est dans l'ensemble $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ (les k premiers sommets de la liste) et vaut 0 sinon. (Le les premier et dernier sommets du chemin peuvent être en dehors de l'ensemble des k premiers sommets de la liste.) Remarque que $\mathbf{W}_n = \mathbf{M}_{R^*}$, car la (i, j) ème entrée de $\mathbf{M}_{R^*}$ est 1 si et seulement s'il y a un chemin de v_i à v_j, avec tous les sommets intérieurs dans l'ensemble $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ (mais ce sont les seuls sommets dans le Graphique dirigé). L'exemple 8 illustre ce que représente la matrice $\mathbf{W}_k$.

EXEMPLE 8 Soit R la relation avec le graphe orienté montré dans la figure 3. Soit a, b, c, d une liste des éléments de l'ensemble. Trouvez les matrices $\mathbf{W}_0$, $\mathbf{W}_1$, $\mathbf{W}_2$, $\mathbf{W}_3$ et $\mathbf{W}_4$. La matrice $\mathbf{W}_4$ est le transitif fermeture de R.

une b

ré c

FIGURE 3
Le Réalisé Graphique du Relation R.

Solution: Soit $v_1 = a$, $v_2 = b$, $v_3 = c$ et $v_4 = d$. $\mathbf{W}_0$ est la matrice de la relation. Par conséquent,

$$\mathbf{W}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{W}_1$ a 1 comme entrée (i, j) s'il y a un chemin de v_i vers v_j qui n'a que $v_1 = a$ comme intérieur sommet. Notez que tous les chemins de longueur un peuvent toujours être utilisés car ils n'ont pas de sommets intérieurs. De plus, il existe maintenant un chemin admissible de b à d, à savoir b, a, d. Par conséquent,

$$\mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{W}_2$ a 1 comme entrée (i, j) s'il y a un chemin de v_i vers v_j qui n'a que $v_1 = a$ et / ou $v_2 = b$ comme ses sommets intérieurs, le cas échéant. Puisqu'il n'y a pas d'arêtes qui ont b comme sommet terminal, aucune de nouveaux chemins sont obtenus lorsque nous permettons à b d'être un sommet intérieur. Par conséquent, $\mathbf{W}_2 = \mathbf{W}_1$.

STEPHEN WARSHALL (1935-2006) Stephen Warshall, né à New York, est allé à l'école publique en Brooklyn. Il a fréquenté l'Université de Harvard, où il a obtenu son diplôme en mathématiques en 1956. Il n'a jamais reçu diplôme supérieur, car à cette époque, aucun programme n'était disponible dans ses domaines d'intérêt. Cependant, il a pris études supérieures dans plusieurs universités différentes et a contribué au développement de l'informatique et de la génie logiciel.

Après avoir obtenu son diplôme de Harvard, Warshall a travaillé à ORO (Operation Research Office), qui a été fixé par Johns Hopkins pour faire de la recherche et du développement pour l'armée américaine. En 1958, il quitte ORO pour poste dans une entreprise appelée Opérations techniques, où il a aidé à construire un laboratoire de recherche et obligatoire pour les projets de logiciels militaires. En 1961, il quitte les opérations techniques pour fonder Massachusetts Computer Associés. Plus tard, cette entreprise est devenue membre d'Applied Data Research (ADR). Après la fusion, Warshall a siégé au conseil directeurs d'ADR et géré une variété de projets et d'organisations. Il a pris sa retraite de l'ADR en 1982.

Au cours de sa carrière, Warshall a mené des recherches et du développement sur les systèmes d'exploitation, la conception de compilateurs, la conception de langages et recherche opérationnelle. Au cours de l'année universitaire 1971-1972, il a présenté des conférences sur le génie logiciel dans les universités françaises. Il y a une anecdote intéressante sur sa preuve que l'algorithme de fermeture transitive, maintenant connu sous le nom d'algorithme de Warshall, est correct. Lui et un collègue des opérations techniques a parié une bouteille de rhum sur qui pourrait le premier déterminer si cet algorithme fonctionne toujours. Warshall est venu avec sa preuve du jour au lendemain, remportant le pari et le rhum, qu'il a partagé avec le perdant du pari. Parce que Warshall n'a pas comme assis à un bureau, il a fait une grande partie de son travail créatif dans des endroits non conventionnels, comme sur un voilier dans l'océan Indien ou dans un Verger de citron grec.

$\mathbf{W}_3$ a 1 comme entrée (i, j) s'il y a un chemin de v_i à v_j qui n'a que $v_1 = a$, $v_2 = b$, et / ou $v_3 = c$ comme ses sommets intérieurs, le cas échéant. Nous avons maintenant des chemins de d à a, à savoir, d, c, a, et de d à d, à savoir, d, c, d. Par conséquent,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_3 = \begin{bmatrix} 1\ 0\ 1\ 1 \\ 1\ 0\ 0\ 1 \\ 1\ 0\ 1\ 1 \end{bmatrix}.$$

Enfin, $\mathbf{W}_4$ a 1 comme entrée *(i, j)* s'il y a un chemin de v_i vers v_j qui a $v_1 = a$, $v_2 = b$, $v_3 = c$ et / ou $v_4 = d$ comme sommets intérieurs, le cas échéant. Parce que ce sont tous les sommets du graphique, cette entrée est 1 si et seulement s'il existe un chemin de v_i à v_j. Par conséquent,

$$\mathbf{W}_4 = \begin{bmatrix} 1\ 0\ 1\ 1 \\ 1\ 0\ 1\ 1 \\ 1\ 0\ 1\ 1 \\ 1\ 0\ 1\ 1 \end{bmatrix}.$$

Cette dernière matrice, $\mathbf{W}_4$, est la matrice de la fermeture transitive. ▲

L'algorithme de Warshall calcule $\mathbf{M}_{R*}$ en calculant efficacement $\mathbf{W}_0 = \mathbf{M}_R$, $\mathbf{W}_1$, $\mathbf{W}_2$, ..., $\mathbf{W}_n = \mathbf{M}_{R*}$. Cette observation montre que nous pouvons calculer $\mathbf{W}_k$ directement à partir de $\mathbf{W}_{k-1}$: il y a chemin de v_i à v_j sans autres sommets que v_1, v_2, ..., v_k comme sommets intérieurs si et seulement si soit il y a un chemin de v_i à v_j avec ses sommets intérieurs parmi les premiers k - 1 sommets du liste, ou il existe des chemins de v_i à v_k et de v_k à v_j qui ont des sommets intérieurs uniquement parmi les k - 1 premiers sommets de la liste. Autrement dit, soit un chemin de v_i à v_j existait déjà avant que v_k *ne* soit autorisé en tant que sommet intérieur, ou autoriser v_k *en* tant que sommet intérieur produit un chemin qui va de v_i à v_k puis de v_k à v_j. Ces deux cas sont illustrés à la figure 4.

Le premier type de chemin existe si et seulement si $w_{ij}^{[k-1]} = 1$, et le deuxième type de chemin existe si et seulement si les deux $w_{ik}^{[k-1]}$ et $w_{kj}^{[k-1]}$ sont 1. Par conséquent, $w_{ij}^{[k]}$ vaut 1 si et seulement si $w_{ij}^{[k-1]}$ est 1 ou les deux $w_{ik}^{[k-1]}$ et $w_{kj}^{[k-1]}$ sont 1. Cela nous donne le lemme 2.

Cas 1

v_i v_j

Tous les sommets intérieurs
dans { v_1, v_2, . . . , v_{k-1} }

v_k

Cas 2

v_i Tous les sommets intérieurs v_j
dans { v_1, v_2, . . . , v_{k-1} }

FIGURE 4 Ajout de v_k à l'ensemble de Sommets intérieurs autorisés.

LEMMA 2 Soit $\mathbf{W}_k = [w_{ij}^{[k]}]$ est la matrice zéro – un qui a un 1 dans sa *(i, j)* e position si et seulement s'il y a est un chemin de v_i à v_j avec des sommets intérieurs de l'ensemble $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$. alors

$$w_{ij}^{[k]} = w_{ij}^{[k-1]} \vee (w_{ik}^{[k-1]} \wedge w_{kj}^{[k-1]}),$$

chaque fois que i, j et k sont des entiers positifs ne dépassant pas n.

Le lemme 2 nous donne les moyens de calculer efficacement les matrices $\mathbf{W}_k$, $k = 1, 2, ..., n$. nous afficher le pseudocode de l'algorithme de Warshall, en utilisant le lemme 2, comme algorithme 2.

ALGORITHME 2 Algorithme de Warshall.

```
Procédure Warshall ( M_R : n × n matrice zéro – un)
W : = M_R
pour k : = 1 à n
    pour i : = 1 à n
        pour j : = 1 à n
            w_ij : = w_ij ∨ (w_ik ∧ w_kj )
retour W { W = [ w_ij ] est M_R* }
```

La complexité de calcul de l'algorithme de Warshall peut facilement être calculée en termes de opérations de bits. Pour trouver l'entrée $w_{ij}^{[k]}$ des entrées $w_{ij}^{[k-1]}$, $w_{ik}^{[k-1]}$ et $w_{kj}^{[k-1]}$ en utilisant le lemme 2 nécessite des opérations sur deux bits. Pour trouver toutes les n^2 entrées de $\mathbf{W}_k$ parmi celles de $\mathbf{W}_{k-1}$, il faut $2n^2$ opérations de bits. Parce que l'algorithme de Warshall commence par $\mathbf{W}_0 = \mathbf{M}_R$ et calcule la séquence de n matrices zéro à un $\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, ..., \mathbf{W}_n = \mathbf{M}_{R^*}$, le nombre total d'opérations binaires utilisées est $n \cdot 2n^2 = 2n^3$.

Des exercices

1. Soit R la relation sur l'ensemble $\{0, 1, 2, 3\}$ contenant les paires ordonnées $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$, et $(3, 0)$. Trouvez le

a) la fermeture réflexive de R. **b)** fermeture symétrique de R.

2. Soit R la relation $\{(a, b) \mid a = b\}$ sur l'ensemble des entiers. Quelle est la fermeture réflexive de R ?

3. Soit R la relation $\{(a, b) \mid a \text{ divise } b\}$ sur l'ensemble de entiers. Quelle est la fermeture symétrique de R ?

4. Comment le graphe orienté représentant la zone réflexive sûr d'une relation sur un ensemble fini être construit à partir de la graphique dirigé de la relation?

Dans les exercices 5 à 7, tracez le graphe orienté de la zone réflexive sûr des relations avec le graphique dirigé montré.

5.
une b
c ré

6.
une b
c ré

sept.
une b
c ré

8. Comment le graphe orienté représentant le symétrique la fermeture d'une relation sur un ensemble fini soit construite à partir de le graphique orienté pour cette relation?

9. Trouvez les graphiques dirigés des fermetures symétriques du relations avec les graphiques dirigés présentés dans les exercices 5 à 7.

10. Trouvez la plus petite relation contenant la relation dans Exemple 2 qui est à la fois réflexif et symétrique.

11. Trouvez le graphique dirigé de la plus petite relation qui est à la fois réflexif et symétrique qui contient chacun des relations avec les graphiques dirigés présentés dans les exercices 5 à 7.

12. Supposons que la relation R sur l'ensemble fini A soit ressentie par la matrice $\mathbf{M}_R$. Montrez que la matrice représente la fermeture réflexive de R est $\mathbf{M}_R \vee \mathbf{I}_n$.

13. Supposons que la relation R sur l'ensemble fini A soit ressentie par la matrice $\mathbf{M}_R$. Montrez que la matrice représente la fermeture symétrique de R est $\mathbf{M}_R \vee \mathbf{M}_R^t$.

14. Montrer que la fermeture d'une relation R par rapport à un la propriété **P** , si elle existe, est l'intersection de toutes les relations tions avec la propriété **P** qui contiennent R .

15. Quand est-il possible de définir la «fermeture irréflexive» d'une relation R , c'est-à-dire une relation qui contient R , est irréflexive, et est contenue dans chaque relation irréflexive qui contient R ?

16. Déterminez si ces séquences de sommets sont des chemins dans ce graphique dirigé.

une *b* *c*

e *ré*

a) *a, b, c, e*
b) *b, e, c, b, e*
c) *a, a, b, e, d, e*
d) *b, c, e, d, a, a, b*
e) *b, c, c, b, e, d, e, d*
f) *a, a, b, b, c, c, b, e, d*

17. Trouvez tous les circuits de longueur trois dans le graphique orienté Exercice 16.

18. Déterminez s'il existe un chemin dans le graphique dirigé dans Exercice 16 commençant au premier sommet donné et se terminant au deuxième sommet donné.

a) *a, b* **b)** *b, a* **c)** *b, b*
d) *a, e* **e)** *b, d* **f)** *c, d*
g) *d, d* **h)** *e, a* **i)** *e, c*

19. Soit R la relation sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ contenant les paires ordonnées $(1, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 5), (4, 3), (5, 1), (5, 2)$ et $(5, 4)$. Trouver

a) R^2 . **b)** R^3 . **c)** R^4 .
d) R^5 . **e)** R^6 . **f)** R^* .

20. Soit R la relation qui contient la paire (a, b) si a et b sont des villes telles qu'il existe une compagnie aérienne directe sans escale vol de a à b . Quand est (a, b) dans

a) R^2 ? **b)** R^3 ? **c)** R^* ?

21. Soit R la relation sur l'ensemble de tous les élèves contenant la paire ordonnée (a, b) si a et b sont dans au moins un classe commune et $a = b$. Quand est (a, b) dans

a) R^2 ? **b)** R^3 ? **c)** R^* ?

22. Supposons que la relation R soit réflexive. Montrez que R^* est réfléchi.

23. Supposons que la relation R soit symétrique. Montrez que R^* est symétrique.

24. Supposons que la relation R soit irréflexive. Est le relation R^2 nécessairement irréflexive?

25. Utilisez l'algorithme 1 pour trouver les fermetures transitives de ces relations sur $\{1, 2, 3, 4\}$.

a) $\{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$
b) $\{(2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 4), (4, 1), (4, 3)\}$
c) $\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$
d) $\{(1, 1), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 2)\}$

26. Utilisez l'algorithme 1 pour trouver les fermetures transitives de ces relations sur $\{a, b, c, d, e\}$.

a) $\{(a, c), (b, d), (c, a), (d, b), (e, d)\}$
b) $\{(b, c), (b, e), (c, e), (d, a), (e, b), (e, c)\}$
c) $\{(a, b), (a, c), (a, e), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b), (d, a), (e, d)\}$
d) $\{(a, e), (b, a), (b, d), (c, d), (d, a), (d, c), (e, a), (e, b), (e, c), (e, e)\}$

27. Utilisez l'algorithme de Warshall pour trouver les fermetures transitives des relations dans l'exercice 25.

28. Utilisez l'algorithme de Warshall pour trouver les fermetures transitives des relations dans l'exercice 26.

29. Trouver la plus petite relation contenant la relation $\{(1, 2), (1, 4), (3, 3), (4, 1)\}$ qui est

a) réflexif et transitif.
b) symétrique et transitive.
c) réflexive, symétrique et transitive.

30. Terminez la preuve du cas lorsque $a = b$ dans le lemme 1.

31. Des algorithmes ont été mis au point pour utiliser des bits d'opération $O(n^{2,8})$. pour calculer le produit booléen de deux $n \times n$ zéro–une matrices. En supposant que ces algorithmes peuvent être utilisés, donner de grandes estimations de O pour le nombre d'opérations de bits utilisant- en utilisant l'algorithme 1 et en utilisant l'algorithme de Warshall pour trouver le fermeture transitive d'une relation sur un ensemble à n éléments.

***32.** Concevoir un algorithme utilisant le concept de sommets intérieurs dans un chemin pour trouver la longueur du chemin le plus court entre deux sommets dans un graphe orienté, si un tel chemin existe.

33. Adapter l'algorithme 1 pour trouver la fermeture réflexive du fermeture transitive d'une relation sur un ensemble à n éléments.

34. Adapter l'algorithme de Warshall pour trouver la fermeture réflexive de la fermeture transitive d'une relation sur un ensemble à n éléments.

35. Montrer que la fermeture par rapport au bien **P** de la relation $R = \{(0, 0), (0, 1), (1, 1), (2, 2)\}$ sur l'ensemble $\{0, 1, 2\}$ n'existe pas si **P** est la propriété

a) «n'est pas réflexif».
b) "a un nombre impair d'éléments."

Relations d'équivalence

introduction

Dans certains langages de programmation, les noms des variables peuvent contenir un nombre illimité de personnages. Cependant, il existe une limite au nombre de caractères qui sont vérifiés lorsqu'un le compilateur détermine si deux variables sont égales. Par exemple, en C traditionnel, seul le les huit premiers caractères d'un nom de variable sont vérifiés par le compilateur.(Ces caractères sont majuscules ou minuscules, chiffres ou traits de soulignement.) Par conséquent, le compilateur considère chaînes de plus de huit caractères qui sont identiques dans leurs huit premiers caractères.Que R soit la relation sur l'ensemble des chaînes de caractères telles que sRt , où s et t sont deux chaînes, si s et t ont au moins huit caractères et les huit premiers caractères de s et t concordent, ou $s = t$. Il est facile de voir que R est réflexif, symétrique et transitif. De plus, R divise l'ensemble de tous des chaînes en classes, où toutes les chaînes d'une classe particulière sont considérées comme identiques par un compilateur pour le traditionnel C.

Les entiers a et b sont liés par la relation «congruence modulo 4» lorsque 4 divise $a - b$. Nous montrerons plus loin que cette relation est réflexive, symétrique et transitive. Il n'est pas difficile de voir que a est lié à b si et seulement si a et b ont le même reste lorsque divisé par 4. Il s'ensuit que cette relation divise l'ensemble des entiers en quatre classes différentes. Lorsque nous nous soucions uniquement du reste d'un entier lorsqu'il est divisé par 4, nous n'avons besoin que savoir dans quelle classe il se trouve, pas sa valeur particulière.

Ces deux relations, R et congruence modulo 4, sont des exemples de relations d'équivalence, à savoir, des relations réflexives, symétriques et transitives. Dans cette section, nous montrerons que ces relations divisent les ensembles en classes disjointes d'éléments équivalents. Des relations d'équivalence apparaissent chaque fois que nous nous soucions seulement de savoir si un élément d'un ensemble est dans une certaine classe d'éléments, au lieu de soucieux de son identité particulière.

Relations d'équivalence

Dans cette section, nous étudierons les relations avec une combinaison particulière de propriétés qui permet ils doivent être utilisés pour relier des objets qui sont similaires en quelque sorte.

DÉFINITION 1 Une relation sur un ensemble A est appelée *relation d'équivalence* si elle est réflexive, symétrique et transitif.

Les relations d'équivalence sont important dans chaque branche des mathématiques!

Les relations d'équivalence sont importantes en mathématiques et en informatique. Un la raison en est que dans une relation d'équivalence, lorsque deux éléments sont liés, il est logique dire qu'ils sont équivalents.

DÉFINITION 2 Deux éléments a et b qui sont liés par une relation d'équivalence sont appelés *équivalents* . le la notation $a \sim b$ est souvent utilisée pour indiquer que a et b sont des éléments équivalents par rapport à a relation d'équivalence particulière.

Pour que la notion d'éléments équivalents ait un sens, chaque élément doit être équivalent à elle-même, car la propriété réflexive garantit une relation d'équivalence. Il est logique de dire que a et b sont liés (pas seulement que a est lié à b) par une relation d'équivalence, car quand a est lié à b , par la propriété symétrique, b est lié à a . En outre, comme un la relation d'équivalence est transitive, si a et b sont équivalents et b et c sont équivalents, il s'ensuit que a et c sont équivalents.

Les exemples 1 à 5 illustrent la notion de relation d'équivalence.

EXEMPLE 1 Soit R la relation sur l'ensemble des entiers telle que aRb si et seulement si $a = b$ ou $a = -b$. Dans Dans la section 9.1, nous avons montré que R est réflexif, symétrique et transitif. Il s'ensuit que R est un relation d'équivalence. ▲

EXEMPLE 2 Soit R la relation sur l'ensemble des nombres réels telle que aRb si et seulement si $a - b$ est un entier. R est-il une relation d'équivalence?

Solution: Parce *que* $a - a = 0$ est un entier pour tous les nombres réels a , aRa pour tous les nombres réels a . Par conséquent, R est réflexif. Supposons maintenant que aRb . Alors $a - b$ est un entier, donc $b - a$ est aussi un entier. Par conséquent, bRa . Il s'ensuit que R est symétrique. Si aRb et bRc , alors $a - b$ et $b - c$ sont des entiers. Par conséquent, $a - c = (a - b) + (b - c)$ est également un entier. Par conséquent, aRc . Ainsi, R est transitif. Par conséquent, R est une relation d'équivalence. ▲

L'une des relations d'équivalence les plus utilisées est la congruence modulo m , où m est un entier supérieur à 1.

EXEMPLE 3 **Congruence Modulo** m Soit m un entier avec $m > 1$. Montrer que la relation

$$R = \{ (a, b) \mid a \equiv b \ (\text{mod}\ m) \}$$

est une relation d'équivalence sur l'ensemble des entiers.

Solution: Rappelons à la section 4.1 que $a \equiv b$ (mod m) si et seulement si m divise $a - b$. Remarque que $a - a = 0$ est divisible par m , car $0 = 0 \cdot m$. Donc, $a \equiv a$ (mod m), donc congruence modulo m est réflexif. Supposons maintenant que $a \equiv b$ (mod m). Alors $a - b$ est divisible par m , donc $a - b = km$, où k est un entier. Il s'ensuit que $b - a = (-k) m$, donc $b \equiv a$ (mod m). Par conséquent, la congruence modulo m est symétrique. Supposons ensuite que $a \equiv b$ (mod m) et $b \equiv c$ (mod m). Alors m divise à la fois $a - b$ et $b - c$. Il existe donc des entiers k et l avec $a - b = km$ et $b - c = lm$. L'ajout de ces deux équations montre que $a - c = (a - b) + (b - c) = km + lm = (k + l) m$. Ainsi, $a \equiv c$ (mod m). Par conséquent, la congruence modulo m est transitive. Il s'ensuit que la congruence modulo m est une relation d'équivalence. ▲

EXEMPLE 4 Supposons que R est la relation sur l'ensemble des chaînes de lettres anglaises telle que aRb si et seulement si $l(a) = l(b)$, où $l(x)$ est la longueur de la chaîne x . R est-il une relation d'équivalence?

Solution: Parce que $l(a) = l(a)$, il s'ensuit que aRa chaque fois *que* a est une chaîne, de sorte que R est réflexe ive. Supposons ensuite que aRb , de sorte que $l(a) = l(b)$. Alors bRa , car $l(b) = l(a)$. Par conséquent, R est symétrique. Enfin, supposons que aRb et bRc . Alors $l(a) = l(b)$ et $l(b) = l(c)$. Par conséquent, $l(a) = l(c)$, donc aRc . Par conséquent, R est transitif. Parce que R est réflexif, symétrique et transitive, c'est une relation d'équivalence. ▲

EXEMPLE 5 Soit n un entier positif et S un ensemble de chaînes. Supposons que R_n est la relation sur S telle que $sR_n t$ si et seulement si $s = t$, ou si s et t ont au moins n caractères et les n premiers caractères de s et t sont les mêmes. Autrement dit, une chaîne de moins de n caractères n'est liée qu'à elle-même; une la chaîne s avec au moins n caractères est liée à une chaîne t si et seulement si t a au moins n caractères et t commence par les n caractères au début de s . Par exemple, soit $n = 3$ et soit S l'ensemble de toutes les chaînes de bits. Alors $sR_3 t$ soit lorsque $s = t$ ou s et t sont des chaînes de bits de longueur 3 ou plus qui commencent par les mêmes trois bits. Par exemple, 01 R_3 01 et 00111 R_3 00101, mais 01 R_3 010 et 01011 R_3 01110.

Montrer que pour chaque ensemble S de chaînes et chaque entier positif n , R_n est une équivalence rapport sur S .

Solution: La relation R_n est réflexive parce que $s = s$, de sorte que sR_n *est* chaque fois que s est une chaîne en S . Si $sR_n t$, alors $s = t$ ou s et t sont tous les deux au moins n caractères qui commencent par le mêmes n caractères. Cela signifie que $tR_n s$. Nous concluons que R_n est symétrique.

Supposons maintenant que $sR_n t$ et $tR_n u$. Alors soit $s = t$ soit s et t sont au moins n caractères long et s et t commencent par les mêmes n caractères, et $t = u$ ou t et u sont au moins n les caractères longs et t et u commencent par les mêmes n caractères. On peut en déduire que soit $s = u$, soit s et u ont tous deux n caractères et s et u commencent par les mêmes n caractères (parce que dans ce cas, nous savons que s , t et u sont tous au moins n caractères de long et s et u commencer par les mêmes n caractères que t). Par conséquent, R_n est transitif. Il s'ensuit que R_n est une relation d'équivalence. ▲

Dans les exemples 6 et 7, nous examinons deux relations qui ne sont pas des relations d'équivalence.

EXEMPLE 6 Montrer que la relation «divise» est l'ensemble des entiers positifs dans une relation non équivalente.

Solution: par les exemples 9 et 15 de la section 9.1, nous savons que la relation «divise» est ive et transitive. Cependant, par l'exemple 12 de la section 9.1, nous savons que cette relation n'est pas symétrique (par exemple, 2 | 4 mais 4 | 2). Nous concluons que la relation «divise» sur l'ensemble des les entiers positifs ne sont pas une relation d'équivalence. ▲

EXEMPLE 7 Soit R la relation sur l'ensemble des nombres réels tels que xRy si et seulement si x et y sont réels des nombres qui diffèrent de moins de 1, c'est-à-dire $|x - y| < 1$. Montrer que R n'est pas une relation d'équivalence.

Solution: R est réflexif car $|x - x| = 0 < 1$ chaque fois que $x \in \mathbf{R}$. R est symétrique, si if xRy, où x et y sont des nombres réels, alors $|x - y| < 1$, ce qui nous dit que $|y - x| = |x - y| < 1$, donc que yRx. Cependant, R n'est pas une relation d'équivalence car il n'est pas transitif.Prenez $x = 2.8$, $y = 1.9$ et $z = 1.1$, de sorte que $|x - y| = |2.8 - 1.9| = 0.9 < 1$, $|y - z| = |1.9 - 1.1| = 0.8 < 1$, mais $|x - z| = |2.8 - 1.1| = 1.7 > 1$. Autrement dit, $2.8 \, R \, 1.9$, $1.9 \, R \, 1.1$, mais $2.8 \, R \, 1.1$. ▲

Classes d'équivalence

Soit A l'ensemble de tous les élèves de votre école qui ont obtenu leur diplôme d'études secondaires.Prendre en compte relation R sur A qui se compose de toutes les paires (x, y), où x et y *sont* gradués du même haut école. Étant donné un étudiant x, nous pouvons former l'ensemble de tous lesélèves équivalent à x par rapport à R. Cet ensemble comprend tous les élèves qui ont obtenu leur diplôme du même lycée que x. Ce sous-ensemble de A est appelé une classe d'équivalence de la relation.

DÉFINITION 3 Soit R une relation d'équivalence sur un ensemble A. L'ensemble de tous les éléments liés à un l'élément a de A est appelé la *classe d'équivalence* de a. La classe d'équivalence d' *un* avec respect à R est désignée par $[a]_R$. Lorsqu'une seule relation est à l'étude, nous pouvons supprimer le indice R et écrire $[a]$ pour cette classe d'équivalence.

En d'autres termes, si R est une relation d'équivalence sur un ensemble A, la classe d'équivalence du l'élément a est

$$[a]_R = \{s \mid (a, s) \in R\}.$$

Si $b \in [a]_R$, alors b est appelé un **représentant** de cette classe d'équivalence. Tout élément d'une classe peut être utilisé comme représentant de cette classe.Autrement dit, il n'y a rien de spécial sur le particulier élément choisi comme représentant de la classe.

EXEMPLE 8 Quelle est la classe d'équivalence d'un entier pour la relation d'équivalence de l'exemple 1?

Solution: un entier étant équivalent à lui-même et à son négatif dans cette relation d'équivalence, il s'ensuit que $[a] = \{-a, a\}$. Cet ensemble contient deux entiers distincts sauf si $a = 0$. Par exemple, $[7] = \{-7, 7\}$, $[-5] = \{-5, 5\}$ et $[0] = \{0\}$. ▲

EXEMPLE 9 Quelles sont les classes d'équivalence de 0 et 1 pour la congruence modulo 4?

Solution: La classe d'équivalence de 0 contient tous les entiers a tels que $a \equiv 0 \pmod 4$. Les entiers dans cette classe sont ceux divisibles par 4. Par conséquent, la classe d'équivalence de 0 pour cette relation est

$$[0] = \{\ldots, -8, -4, 0, 4, 8, \ldots\}.$$

La classe d'équivalence de 1 contient tous les entiers a tels que $a \equiv 1 \pmod 4$). Les entiers dans cette classe sont ceux qui ont un reste de 1 lorsqu'ils sont divisés par 4. Par conséquent, l'équivalence classe de 1 pour cette relation est

$$[1] = \{..., -7, -3, 1, 5, 9, ...\}.$$ ▲

Dans l'exemple 9, les classes d'équivalence de 0 et 1 par rapport à la congruence modulo 4 ont été trouvés. L'exemple 9 peut facilement être généralisé, en remplaçant 4 par n'importe quel entier positif m. Les classes d'équivalence de la relation congruence modulo m sont appelées **congruence classes modulo** m. La classe de congruence d'un entier a modulo m est notée $[a]_m$, donc $[a]_m = \{..., a - 2m, a - m, a, a + m, a + 2m, ...\}$. Par exemple, de l'exemple 9, il suit que $[0]_4 = \{..., -8, -4, 0, 4, 8, ...\}$ et $[1]_4 = \{..., -7, -3, 1, 5, 9, ...\}$.

EXEMPLE 10 Quelle est la classe d'équivalence de la chaîne 0111 par rapport à la relation d'équivalence R_3 de Exemple 5 sur l'ensemble de toutes les chaînes de bits?(Rappelons que sR_3t si et seulement si s et t sont des chaînes de bits avec $s = t$ ou s et t sont des chaînes d'au moins trois bits qui commencent par les mêmes trois bits.)

Solution: les chaînes de bits équivalentes à 0111 sont les chaînes de bits avec au moins trois bits qui commencent avec 011. Il s'agit des chaînes de bits 011, 0110, 0111, 01100, 01101, 01110, 01111, etc. Par conséquent,

$$[011]_{R_3} = \{011, 0110, 0111, 01100, 01101, 01110, 01111, ...\}.$$ ▲

EXEMPLE 11 **Identifiants dans le langage de programmation C** Dans le langage de programmation C, un **identifiant** est le nom d'une variable, d'une fonction ou d'un autre type d'entité. Chaque identifiant est un non vide chaîne de caractères où chaque caractère est une lettre anglaise minuscule ou majuscule, un chiffre, ou un trait de soulignement, et le premier caractère est une lettre anglaise minuscule ou majuscule. Identifiants peut être de n'importe quelle longueur. Cela permet aux développeurs d'utiliser autant de caractères qu'ils le souhaitent pour nommer un entité, telle qu'une variable. Cependant, pour les compilateurs de certaines versions de C, il existe une limite nombre de caractères vérifiés lorsque deux noms sont comparés pour voir s'ils se réfèrent à la même chose. Par exemple, les compilateurs C standard considèrent deux identificateurs identiques lorsqu'ils d'accord dans leurs 31 premiers caractères. Par conséquent, les développeurs doivent faire attention à ne pas utiliser d'identifiants avec les mêmes 31 caractères initiaux pour différentes choses. On voit que deux identifiants sont considérés de même quand ils sont liés par la relation R_{31} dans l'exemple 5. En utilisant l'exemple 5, nous savons que R_{31}, sur l'ensemble de tous les identifiants de la norme C, est une relation d'équivalence.

Quelles sont les classes d'équivalence de chacun des identifiants Number_of_tropical_ tempêtes, Number_of_named_tropical_storms et Number_of_named_tropical_storms_in_the_ Atlantic_in_2005?

Solution: notez que lorsqu'un identifiant comporte moins de 31 caractères, selon la définition de R_{31}, sa classe d'équivalence ne contient que lui-même. Parce que l'identifiant Number_of_tropical_storms est Long de 25 caractères, sa classe d'équivalence contient exactement un élément, à savoir lui-même.

L'identifiant Number_of_named_tropical_storms fait exactement 31 caractères. Une identité fier est équivalent à cela quand il commence par ces mêmes 31 caractères. Par conséquent, chaque identifiant au moins 31 caractères commençant par Number_of_named_tropical_storms équivaut à cet identifiant. Il s'ensuit que la classe d'équivalence de Number_of_named_tropical_storms est la ensemble de tous les identifiants commençant par les 31 caractères Number_of_named_tropical_storms.

Un identifiant est équivalent au Number_of_named_tropical_storms_in_the_Atlantic_in_ 2005 si et seulement si elle commence par ses 31 premiers caractères. Parce que ces personnages sont Number_of_named_tropical_storms, nous voyons qu'un identifiant est équivalent à Number_of_named_tropical_storms_in_the_Atlantic_in_2005 si et seulement si elle est équivalente à Number_of_named_tropical_storms. Il s'ensuit que ces deux derniers identifiants ont la même équiva- classe de lence. ▲

Classes d'équivalence et partitions

Soit A l'ensemble des élèves de votre école qui se spécialisent dans exactement une matière et laissez R être la relation sur A composée de paires (x, y) , où x et y sont des étudiants avec la même majeure. Alors R est une relation d'équivalence, comme le lecteur devrait vérifier. Nous pouvons voir que R divise tout étudiants en A dans une collection de sous-ensembles disjoints, où chaque sous-ensemble contient des étudiants avec un majeur spécifié. Par exemple, un sous-ensemble contient tous les étudiants qui se spécialisent (seulement) en informatique sciences, et un deuxième sous-ensemble contient tous les étudiants se spécialisant en histoire. En outre, ces ensembles sont des classes d' équivalence de R . Cet exemple illustre comment les classes d'équivalence d'un la relation d'équivalence partitionne un ensemble en sous-ensembles disjoints et non vides. Nous ferons ces notions plus précis dans la discussion suivante.

Que R soit une relation sur l'ensemble A . Le théorème 1 montre que les classes d'équivalence de deux les éléments de A sont soit identiques soit disjoints.

THÉORÈME 1 Soit R une relation d'équivalence sur un ensemble A . Ces déclarations pour les éléments a et b de A sont équivalent:

(i) aRb (ii) $[a] = [b]$ (iii) $[a] \cap [b] = \emptyset$

Preuve: Nous montrons d'abord que (i) implique (ii). Supposons que aRb . Nous prouverons que $[a] = [b]$ par montrant $[a] \subseteq [b]$ et $[b] \subseteq [a]$. Supposons que $c \in [a]$. Ensuite, aRc . Parce que aRb et R est symétrique, nous savons que bRa . De plus, comme R est transitif et bRa et aRc , il s'ensuit que bRc . Par conséquent, $c \in [b]$. Cela montre que $[a] \subseteq [b]$. La preuve que $[b] \subseteq [a]$ est similaire; il est laissé comme exercice pour le lecteur.

Deuxièmement, nous montrerons que (ii) implique (iii). Supposons que $[a] = [b]$. Il s'ensuit que $[a] \cap [b] = \emptyset$ parce que $[a]$ n'est pas vide (parce *que* $a \in [a]$ parce que R est réflexif).

Ensuite, nous montrerons que (iii) implique (i). Supposons que $[a] \cap [b] = \emptyset$. Ensuite, il y a un élément c avec $c \in [a]$ et $c \in [b]$. En d'autres termes, aRc et bRc . Par le symétrique propriété, cRb . Ensuite par transitivité, car aRc et cRb , nous avons aRb .

Parce que (i) implique (ii), (ii) implique (iii) et (iii) implique (i), les trois déclarations, (i), (ii), et (iii), sont équivalents.

Nous sommes maintenant en mesure de montrer comment une relation d'équivalence *partitionne* un ensemble. Soit R un relation d' équivalence sur un ensemble A . L'union des classes d'équivalence de R est tout de A , car un élément a de A est dans sa classe d'équivalence, à savoir, $[a]_R$. En d'autres termes,

$$\bigcup_{a \in A} [a]_R = A.$$

De plus, d'après le théorème 1, il s'ensuit que ces classes d'équivalence sont soit égales soit disjointes, donc

$$[a]_R \cap [b]_R = \emptyset,$$

lorsque $[a]_R = [b]_R$.

Rappelons qu'un *ensemble d'index* est un ensemble dont les membres étiquette, ou index, le éléments d'un ensemble.

Ces deux observations montrent que les classes d'équivalence forment une partition de A , car ils ont divisé A en sous-ensembles disjoints. Plus précisément, une **partition** d'un ensemble S est une collection de disjoints des sous-ensembles non vides de S qui ont S comme union. En d'autres termes, la collection de sous-ensembles A_i , $i \in I$ (où I est un ensemble d'index) forme une partition de S si et seulement si

$$A_i = \emptyset \text{ pour } i \in I,$$

$A_i \cap A_j = \emptyset$ lorsque $i = j$,

A_2
A_1
A_3
A_4 A_5
A_7
A_6
A_8 A_9

FIGURE 1 Une partition d'un ensemble.

et

$$\bigcup_{i \in I} A_i = S.$$

(Ici la notation $\bigcup_{i \in I} A_i$ représente l'union des ensembles A_i pour tout $i \in I$.) La figure 1 illustre le concept d'une partition d'un ensemble.

EXEMPLE 12 Supposons que $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. La collection d'ensembles $A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{4, 5\}$, et $A_3 = \{6\}$ forme une partition de S, parce que ces ensembles sont disjoints et leur union est S. ▲

Nous avons vu que les classes d'équivalence d'une relation d'équivalence sur un ensemble forment une partition de l'ensemble. Les sous-ensembles de cette partition sont les classes d'équivalence. Inversement, chaque partition d'un ensemble peut être utilisé pour former une relation d'équivalence. Deux éléments sont équivalents par rapport à cette relation si et seulement si elles sont dans le même sous-ensemble de la partition.

Pour voir cela, supposons que $\{A_i \mid i \in I\}$ est une partition sur S. Soit R la relation sur S consistant des paires (x, y), où x et y appartiennent au même sous-ensemble A_i dans la partition. Pour montrer que R est une relation d'équivalence, nous devons montrer que R est réflexif, symétrique et transitif.

Nous voyons que $(a, a) \in R$ pour chaque $a \in S$, car a est dans le même sous-ensemble que lui-même. Par conséquent, R est réflexif. Si $(a, b) \in R$, alors b et a sont dans le même sous-ensemble de la partition, de sorte que $(b, a) \in R$ ainsi que. Par conséquent, R est symétrique. Si $(a, b) \in R$ et $(b, c) \in R$, alors a et b sont dans le même le sous-ensemble X dans la partition, et b et c sont dans le même sous-ensemble Y de la partition. Parce que les sous-ensembles de la cloison sont disjoints et b appartient à X et Y, il en résulte que $X = Y$. Par conséquent, *un* et c appartiennent à la même sous - ensemble de la partition, de sorte que $(a, c) \in R$. Ainsi, R est transitif.

Il s'ensuit que R est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence de R *se* composent de sous-ensembles de S contenant des éléments liés, et par la définition de R, ce sont les sous-ensembles de la partition. Le théorème 2 résume les liens que nous avons établis entre les relations d'équivalence et partitions.

THÉORÈME 2 Soit R une relation d'équivalence sur un ensemble S . Ensuite, les classes d'équivalence de R forment une partition de S . Inversement, étant donné une partition $\{A_i \mid i \in I\}$ de l'ensemble S , il existe une relation d'équivalence R qui a les ensembles A_i , $i \in I$, comme classes d'équivalence.

L'exemple 13 montre comment construire une relation d'équivalence à partir d'une partition.

EXEMPLE 13 Liste des paires ordonnées dans la relation d'équivalence R produite par la partition $A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{4, 5\}$ et $A_3 = \{6\}$ de $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, donnés dans l'exemple 12.

Solution: Les sous - ensembles de la partition sont les classes d'équivalence de R . La paire $(a, b) \in R$ si et uniquement si a et b sont dans le même sous-ensemble de la partition. Les paires $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$ et $(3, 3)$ appartiennent à R car $A_1 = \{1, 2, 3\}$ est une classe d'équivalence; le les paires $(4, 4)$, $(4, 5)$, $(5, 4)$ et $(5, 5)$ appartiennent à R car $A_2 = \{4, 5\}$ est une classe d'équivalence; et enfin la paire $(6, 6)$ appartient à R car $\{6\}$ est une classe d'équivalence. Aucune paire autre que ceux qui sont énumérés appartient à R . ▲

Les classes de congruence modulo m fournissent une illustration utile du Théorème 2. Il sont m différentes classes de congruence modulo m , correspondant aux m restes différents possible lorsqu'un entier est divisé par m . Ces m classes de congruence sont désignées par $[0]_m$, $[1]_m$, ..., $[m - 1]_m$. Ils forment une partition de l'ensemble des entiers.

EXEMPLE 14 Quels sont les ensembles dans la partition des entiers issus de la congruence modulo 4?

Solution: Il existe quatre classes de congruence, correspondant à $[0]_4$, $[1]_4$, $[2]_4$ et $[3]_4$. Ils sont les ensembles

$$[0]_4 = \{..., -8, -4, 0, 4, 8, ...\},$$
$$[1]_4 = \{..., -7, -3, 1, 5, 9, ...\},$$
$$[2]_4 = \{..., -6, -2, 2, 6, 10, ...\},$$
$$[3]_4 = \{..., -5, -1, 3, 7, 11, ...\}.$$

Ces classes de congruence sont disjointes, et chaque entier est exactement dans l'une d'elles. En d'autre les mots, comme le dit le théorème 2, ces classes de congruence forment une partition. ▲

Nous fournissons maintenant un exemple de partition de l'ensemble de toutes les chaînes résultant d'une équivalence relation sur cet ensemble.

EXEMPLE 15 Soit R_3 la relation de l'exemple 5. Quels sont les ensembles dans la partition de l'ensemble de toutes les chaînes de bits résultant de la relation R_3 sur l'ensemble de toutes les chaînes de bits? (Rappelons que sR_3t , où s et t sont des bits chaînes, si $s = t$ ou s et t sont des chaînes de bits avec au moins trois bits qui correspondent dans leurs trois premiers bits.)

Solution: notez que chaque chaîne de bits de longueur inférieure à trois n'est équivalente qu'à elle-même. D'où $[\lambda]_{R_3} = \{\lambda\}$, $[0]_{R_3} = \{0\}$, $[1]_{R_3} = \{1\}$, $[00]_{R_3} = \{00\}$, $[01]_{R_3} = \{01\}$, $[10]_{R_3} = \{10\}$, et $[11]_{R_3} = \{11\}$. Notez que chaque chaîne de bits de longueur trois ou plus est équivalente à l'une des huit cordes bit 000 , 001 , 010 , 011 , 100 , 101 , 110 , et 111. Nous avons

$$[000]_{R_3} = \{000, 0000, 0001, 00000, 00001, 00010, 00011, ...\},$$

$[001]_{R_3} = \{001, 0010, 0011, 00100, 00101, 00110, 00111, ...\}$,

$[010]_{R_3} = \{010, 0100, 0101, 01000, 01001, 01010, 01011, ...\}$,

$[011]_{R_3} = \{011, 0110, 0111, 01100, 01101, 01110, 01111, ...\}$,

$[100]_{R_3} = \{100, 1000, 1001, 10000, 10001, 10010, 10011, ...\}$,

$[101]_{R_3} = \{101, 1010, 1011, 10100, 10101, 10110, 10111, ...\}$,

$[110]_{R_3} = \{110, 1100, 1101, 11000, 11001, 11010, 11011, ...\}$,

$[111]_{R_3} = \{111, 1110, 1111, 11100, 11101, 11110, 11111, ...\}$.

Ces 15 classes d'équivalence sont disjointes et chaque chaîne de bits se trouve exactement dans l'une d'entre elles.Comme Le théorème 2 nous dit que ces classes d'équivalence partitionnent l'ensemble de toutes les chaînes de bits. ▲

Des exercices

1. Lesquelles de ces relations sur {0, 1, 2, 3} sont équivalentes rapports? Déterminer les propriétés d'une équivalence que les autres manquent.

a) $\{(0,0), (1,1), (2,2), (3,3)\}$

b) $\{(0,0), (0,2), (2,0), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3)\}$

c) $\{(0,0), (1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3)\}$

d) $\{(0,0), (1,1), (1,3), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$

e) $\{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,2), (3,3)\}$

2. Lesquelles de ces relations sur l'ensemble de toutes les personnes sont relations de référence? Déterminer les propriétés d'un équivalent relation de parenté qui manque aux autres.

a) { *(a, b)* | *a* et *b* ont le même âge}

b) { *(a, b)* | *a* et *b* ont les mêmes parents}

c) { *(a, b)* | *a* et *b* partagent un parent commun}

d) { *(a, b)* | *a* et *b se* sont rencontrés}

e) { *(a, b)* | *a* et *b* parlent une langue commune}

3. Laquelle de ces relations sur l'ensemble de toutes les fonctions de **Z** à **Z** sont des relations d'équivalence? Déterminer les propriétés d'une relation d'équivalence qui manque aux autres.

a) $\{(f, g) \mid f(1) = g(1)\}$

b) $\{(f, g) \mid f(0) = g(0)$ ou $f(1) = g(1)\}$

c) $\{(f, g) \mid f(x) - g(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbf{Z}\}$

d) $\{(f, g) \mid$ pour certains $C \in \mathbf{Z}$, pour tout $x \in \mathbf{Z}$, $f(x) - g(x) = C\}$

e) $\{(f, g) \mid f(0) = g(1)$ et $f(1) = g(0)\}$

4. Définir trois relations d'équivalence sur l'ensemble des élèves

11. Montrer que la relation *R* constituée de toutes les paires *(x, y)* telles que *x* et *y* sont des chaînes de bits de longueur trois ou plus d'accord dans leurs trois premiers bits est une relation d'équivalence sur l'ensemble de toutes les chaînes de bits de longueur trois ou plus.

12. Montrer que la relation *R* constituée de toutes les paires (*x* , *y*) telles que *x* et *y* sont des chaînes de bits de longueur trois ou plus d'accord, sauf peut-être dans leurs trois premiers bits est une équiva- relation de lence sur l'ensemble de toutes les chaînes de bits de longueur trois ou plus.

13. Montrer que la relation *R* constituée de toutes les paires *(x, y)* telles que *x* et *y* sont des chaînes de bits qui conviennent dans leur premier et troisième bits est une relation d'équivalence sur l'ensemble de toutes les chaînes de bits de longueur trois ou plus.

14. Soit *R* la relation constituée de toutes les paires *(x, y)* telles que *x* et *y* sont des chaînes de majuscules et minuscules lettres polonaises avec la propriété que pour chaque teger *n* , les *n* ème caractères de *x* et *y* sont la même lettre, soit en majuscule, soit en minuscule. Montrer que *R* est un équivalent relation de lence.

15. Soit *R* la relation sur l'ensemble des paires ordonnées de posi- nombres entiers tels que $((a, b), (c, d)) \in R$ si et seulement si $a + d = b + c$. Montrez que *R* est une relation d'équivalence.

16. Soit *R* la relation sur l'ensemble des paires ordonnées de posi- nombres entiers tels que $((a, b), (c, d)) \in R$ si et seulement si $ad = bc$. Montrez que *R* est une relation d'équivalence.

17. (*Nécessite un calcul*)

dans votre classe de mathématiques discrète différente de la tions discutées dans le texte. Déterminer l'équivalence classes pour chacune de ces relations d'équivalence.

5. Définir trois relations d'équivalence sur l'ensemble des bâtiments sur un campus universitaire. Déterminer les classes d'équivalence pour chacune de ces relations d'équivalence.

6. Définissez trois relations d'équivalence sur l'ensemble des classes de- à votre école. Déterminer les classes d'équivalence pour chacune de ces relations d'équivalence.

7. Montrer que la relation d'équivalence logique sur l'ensemble de toutes les propositions composées est une relation d'équivalence. Quelles sont les classes d'équivalence de **F** et de **T** ?

8. Soit R la relation sur l'ensemble de tous les ensembles de nombres réels de telle sorte que SRT si et seulement si S et T ont le même cardinalité. Montrez que R est une relation d'équivalence. Quoi sont les classes d'équivalence des ensembles $\{0, 1, 2\}$ et **Z** ?

9. Supposons que A est un ensemble non vide, et f est une fonction qui a A comme domaine. Soit R la relation sur A consistant de toutes les paires ordonnées (x, y) telles que $f(x) = f(y)$.

a) Montrer que R est une relation d'équivalence sur A .

b) Quelles sont les classes d'équivalence de R ?

10. Supposons que A est un ensemble non vide et R est une équivalence par rapport à A . Montrer qu'il existe une fonction f avec A comme son domaine tel que $(x, y) \in R$ si et seulement si $f(x) = f(y)$.

a) Montrer que la relation R sur l'ensemble de tous les dérivables fonctions de **R** à **R** constituées de toutes les paires (f, g) de telle sorte que $f'(x) = g'(x)$ pour tous les nombres réels x est un relation d'équivalence.

b) Quelles fonctions sont dans la même classe d'équivalence que la fonction $f(x) = x^2$?

18. (*Nécessite un calcul*)

a) Soit n un entier positif. Montrez que la relation R sur l'ensemble de tous les polynômes à valeur réelle coefficients constitués de toutes les paires (f, g) tels que $f^{(n)}(x) = g^{(n)}(x)$ est une relation d'équivalence. [Ici $f^{(n)}(x)$ est la n ième dérivée de $f(x)$].

b) Quelles fonctions sont dans la même classe d'équivalence que la fonction $f(x) = x^4$, où $n = 3$?

19. Soit R la relation sur l'ensemble de toutes les URL (ou publicité Web robes) telles que xRy si et seulement si la page Web à x est le même que la page Web en y . Montrez que R est un relation d'équivalence.

20. Soit R la relation sur l'ensemble de toutes les personnes qui ont visité une page Web particulière telle que xRy si et seulement si la personne x et la personne y ont suivi le même ensemble de liens commençant par cette page Web (allant de la page Web à Page Web jusqu'à ce qu'ils cessent d'utiliser le Web). Montrez que R est une relation d'équivalence.

Dans les exercices 21 à 23, déterminez si la relation avec le le graphique dirigé montré est une relation d'équivalence.

21.

une *b*

c *ré*

22.

une *b*

ré *c*

23.

une *b*

ré *c*

24. Déterminez si les relations représentées par ces les matrices zéro à un sont des relations d'équivalence.

une) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

25. Montrer que la relation R sur l'ensemble de toutes les chaînes de bits telles

35. Quelle est la classe de congruence $[n]_5$ (c'est-à-dire l'équiva- classe de lence de n par rapport à la congruence modulo 5) quand n est

a) 2? **b)** 3? **c)** 6? **d)** -3?

36. Quelle est la classe de congruence $[4]_m$ quand m est

a) 2? **b)** 3? **c)** 6? **d)** 8?

37. Donnez une description de chacune des classes de congruence modulo 6.

38. Quelle est la classe d'équivalence de chacune de ces chaînes avec par rapport à la relation d'équivalence dans l'exercice 14?

a) *Non* **b)** *Oui* **c)** *Aide*

39. a) Quelle est la classe d'équivalence de $(1, 2)$ en ce qui concerne la relation d'équivalence dans l'exercice 15?

b) Donner une interprétation des classes d'équivalence pour la relation d'équivalence R dans l'exercice 15. [*Astuce:* Regardez à la différence $a - b$ correspondant à (a, b) .]

40. a) Quelle est la classe d'équivalence de $(1, 2)$ en ce qui concerne à la relation d'équivalence dans l'exercice 16?

b) Donner une interprétation des classes d'équivalence pour la relation d'équivalence R dans l'exercice 16. [*Astuce:* Regardez au rapport a / b correspondant à (a, b) .]

41. Laquelle de ces collections de sous-ensembles sont des partitions de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$?

a) $\{1, 2\}, \{2, 3, 4\}, \{4, 5, 6\}$ **b)** $\{1\}, \{2, 3, 6\}, \{4\}, \{5\}$

que sRt si et seulement si s et t contiennent le même nombre de 1 est une relation d'équivalence.

26. Quelles sont les classes d'équivalence des relations d'équivalence dans l'exercice 1?

27. Quelles sont les classes d'équivalence des relations d'équivalence dans l'exercice 2?

28. Quelles sont les classes d'équivalence des relations d'équivalence dans l'exercice 3?

29. Quelle est la classe d'équivalence de la chaîne de bits 011 pour le relation d'équivalence dans l'exercice 25?

30. Quelles sont les classes d'équivalence de ces chaînes de bits pour la relation d'équivalence dans l'exercice 11?

a) 010 **b)** 1011 **c)** 11111 **d)** 01010101

31. Quelles sont les classes d'équivalence des chaînes de bits dans l'exercice 30 pour la relation d'équivalence de Exercice 12?

32. Quelles sont les classes d'équivalence des chaînes de bits dans l'exercice 30 pour la relation d'équivalence de Exercice 13?

33. Quelles sont les classes d'équivalence des chaînes de bits dans Ex- exercice 30 pour la relation d'équivalence R_4 de l'examen ple 5 sur l'ensemble de toutes les chaînes de bits? (Rappelez-vous que les chaînes de bits s et t sont équivalents sous R_4 si et seulement s'ils sont égaux ou ils ont tous les deux au moins quatre bits de long et sont d'accord dans leur quatre premiers bits.)

34. Quelles sont les classes d'équivalence des chaînes de bits dans Ex- exercice 30 pour la relation d'équivalence R_5 de l'exemple 5 sur l'ensemble de toutes les chaînes de bits? (Rappelez-vous que les chaînes de bits s et t sont équivalents sous R_5 si et seulement s'ils sont égaux ou ils sont tous les deux d'au moins cinq bits et conviennent dans leur premier cinq bits.)

c) {2 , 4 , 6}, {1 , 3 , 5} **d)** {1 , 4 , 5}, {2 , 6}

42. Laquelle de ces collections de sous-ensembles sont des partitions de {−3 , −2 , −1 , 0 , 1 , 2 , 3}?

a) {−3 , −1 , 1 , 3}, {−2 , 0 , 2}
b) {−3 , −2 , −1 , 0}, {0 , 1 , 2 , 3}
c) {−3 , 3}, {−2 , 2}, {−1 , 1}, {0}
d) {−3 , −2 , 2 , 3}, {−1 , 1}

43. Laquelle de ces collections de sous-ensembles sont des partitions du ensemble de chaînes de bits de longueur 8?

a) l'ensemble de chaînes de bits commençant par 1, l'ensemble de bits chaînes commençant par 00 et l'ensemble de chaînes de bits qui commencent par 01

b) l'ensemble des chaînes de bits qui contiennent la chaîne 00, l'ensemble de chaînes de bits qui contiennent la chaîne 01, l'ensemble de bits chaînes contenant la chaîne 10 et l'ensemble de bits chaînes contenant la chaîne 11

c) l'ensemble de chaînes de bits qui se terminent par 00, l'ensemble de bits chaînes qui se terminent par 01, l'ensemble de chaînes de bits qui se terminent avec 10, et l'ensemble de chaînes de bits qui se terminent par 11

d) l'ensemble de chaînes de bits qui se terminent par 111, l'ensemble de bits chaînes qui se terminent par 011, et l'ensemble de chaînes de bits qui se termine par 00

e) l'ensemble de chaînes de bits qui contiennent $3k$ unités pour certains entier non négatif k ; l'ensemble de chaînes de bits qui tain $3k + 1$ uns pour un entier non négatif k ; et l'ensemble de chaînes de bits qui contiennent $3k + 2$ uns pour certains entier non négatif k .

44. Laquelle de ces collections de sous-ensembles sont des partitions du ensemble d'entiers?

a) l'ensemble des entiers pairs et l'ensemble des entiers impairs

b) l'ensemble des entiers positifs et l'ensemble des in- tegers

c) l'ensemble des entiers divisible par 3, l'ensemble des entiers laissant un reste de 1 lorsqu'il est divisé par 3, et le ensemble d'entiers laissant un reste de 2 lorsqu'il est divisé par 3

d) l'ensemble des entiers inférieur à -100, l'ensemble des entiers dont la valeur absolue ne dépasse pas 100, et l'ensemble des entiers supérieurs à 100

e) l'ensemble des entiers non divisible par 3, l'ensemble des pairs entiers, et l'ensemble des entiers qui laissent un reste de 3 lorsqu'il est divisé par 6

45. Laquelle de ces partitions est l'ensemble **Z** × **Z** de l'ordre paires d'entiers?

a) l'ensemble des paires (x, y) , où x ou y est impair; l'ensemble de paires (x, y) , où x est pair; et l'ensemble des paires (x, y) , où y est pair

b) l'ensemble des paires (x, y) , où x et y sont impairs; l'ensemble des paires (x, y) , où exactement l'un de x et y

b) { a }, { b }, { c, d }, { e, f }, { g }

c) { a, b, c, d }, { e, f, g }

d) { a, c, e, g }, { b, d }, { f }

Une partition P_1 est appelée **raffinement** de la partition P_2 si chaque ensemble de P_1 est un sous-ensemble de l'un des ensembles de P_2 .

49. Montrer que la partition formée de classes de congruence modulo 6 est un raffinement de la partition formée de classes de congruence modulo 3.

50. Montrer que la partition de l'ensemble des personnes vivant dans États-Unis, composé de sous-ensembles de personnes vivant dans même comté (ou paroisse) et même état est un raffinement de la partition composée de sous-ensembles de personnes vivant dans le même état.

51. Montrer que la partition de l'ensemble de chaînes de bits de longueur 16 formé par des classes d'équivalence de chaînes de bits qui conviennent est impair; et l'ensemble des paires (x, y), où x et y sont même

c) l'ensemble des paires (x, y), où x est positif; l'ensemble des paires (x, y), où y est positif; et l'ensemble des paires (x, y), où x et y sont négatifs

d) l'ensemble des paires (x, y), où $3 \mid x$ et $3 \mid y$; l'ensemble de paires (x, y), où $3 \mid x$ et $3 \mid y$; l'ensemble de paires (x, y), où $3 \mid x$ et $3 \mid y$; et l'ensemble des paires (x, y), où $3 \mid x$ et $3 \mid y$

e) l'ensemble des paires (x, y), où $x > 0$ et $y > 0$; le ensemble de paires (x, y), où $x > 0$ et $y \leq 0$; l'ensemble des paires (x, y), où $x \leq 0$ et $y > 0$; et l'ensemble de paires (x, y), où $x \leq 0$ et $y \leq 0$

f) l'ensemble des paires (x, y), où $x = 0$ et $y = 0$; l'ensemble de paires (x, y), où $x = 0$ et $y = 0$; et l'ensemble de paires (x, y), où $x = 0$ et $y = 0$

46. Lesquelles de ces partitions sont des ensembles de nombres réels?

a) les nombres réels négatifs, $\{0\}$, le réel positif Nombres

b) l'ensemble des nombres irrationnels, l'ensemble des rationnels Nombres

c) l'ensemble des intervalles $[k, k+1]$, $k = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

d) l'ensemble des intervalles $(k, k+1)$, $k = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

e) l'ensemble des intervalles $(k, k+1]$, $k = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

f) les ensembles $\{x + n \mid n \in \mathbf{Z}\}$ pour tout $x \in [0, 1)$

47. Énumérer les paires ordonnées dans le pro- par ces partitions de $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

a) $\{0\}, \{1, 2\}, \{3, 4, 5\}$

b) $\{0, 1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}$

c) $\{0, 1, 2\}, \{3, 4, 5\}$

d) $\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$

48. Énumérer les paires ordonnées dans le programme de relations d'équivalence par ces partitions de $\{a, b, c, d, e, f, g\}$.

a) $\{a, b\}, \{c, d\}, \{e, f, g\}$

les huit derniers bits sont un raffinement de la partition formée des classes d'équivalence de chaînes de bits qui conviennent les quatre derniers bits.

Dans les exercices 52 et 53, R_n fait référence à la famille d'équivalence relations définies dans l'exemple 5. Rappelons que $s \, R_n \, t$, où s et t sont deux chaînes si $s = t$ ou s et t sont des chaînes avec au moins n caractères qui correspondent à leurs n premiers caractères.

52. Montrer que la partition de l'ensemble de toutes les chaînes de bits formées par des classes d'équivalence de chaînes de bits par rapport à la la relation d'équivalence R_4 est un raffinement de la partition formé par des classes d'équivalence de chaînes de bits avec respect à la relation d'équivalence R_3.

53. Montrer que la partition de l'ensemble de tous les identifiants en C formé par les classes d'équivalence des identifiants avec des spect à la relation d'équivalence R_{31} est un raffinement de la partition formée par les classes d'équivalence d'identifiants par rapport à la relation d'équivalence R_8. (Compilateurs pour les «anciens» C, considérez les identifiants de la même manière d'accord dans leurs huit premiers caractères, tandis que les compilateurs le standard C considère les identifiants comme leurs noms d'accord dans leurs 31 premiers caractères.)

54. Supposons que R_1 et R_2 soient des relations d'équivalence sur un Série A. Soit P_1 et P_2 les partitions correspondant à R_1 et R_2, respectivement. Montrer que $R_1 \subseteq R_2$ si et seulement si P_1 est un raffinement de P_2.

55. Trouvez la plus petite relation d'équivalence sur l'ensemble $\{a, b, c, d, e\}$ contenant la relation $\{(a, b), (a, c), (d, e)\}$.

56. Supposons que R_1 et R_2 soient des relations d'équivalence sur le ensemble S. Déterminez si chacune de ces combinaisons de R_1 et R_2 doivent être une relation d'équivalence.

a) $R_1 \cup R_2$ **b)** $R_1 \cap R_2$ **c)** $R_1 \oplus R_2$

57. Considérons la relation d'équivalence de l'exemple 2, à savoir, $R = \{(x, y) \mid x - y$ est un entier$\}$.

a) Quelle est la classe d'équivalence de 1 pour cette équivalence relation?

b) Quelle est la classe d'équivalence 1/2 pour cette équivalence relation de lence?

∗ **58.** Chaque perle sur un bracelet avec trois perles est soit rouge, blanc ou bleu, comme illustré dans la figure illustrée.

Perle 1
rouge

Perle 3
Bleu

Perle 2
blanc

61. Déterminer le nombre de relations d'équivalence différentes sur un ensemble de trois éléments en les listant.

62. Déterminer le nombre de relations d'équivalence différentes sur un ensemble de quatre éléments en les listant.

∗ **63.** Avons-nous nécessairement une relation d'équivalence lorsque nous former la fermeture transitive de la fermeture symétrique de la fermeture réflexive d'une relation?

∗ **64.** Avons-nous nécessairement une relation d'équivalence lorsque nous former la fermeture symétrique de la fermeture réflexive de la

Définissez la relation R entre les bracelets comme: (B_1, B_2), où B_1 et B_2 sont des bracelets, appartient à R si et seulement si B_2 peut être obtenu à partir de B_1 en le faisant tourner ou en le faisant tourner puis le refléter.

a) Montrer que R est une relation d'équivalence.

b) Quelles sont les classes d'équivalence de R ?

* **59.** Soit R la relation sur l'ensemble de toutes les colorations du 2×2 damier où chacun des quatre carrés est coloré soit rouge ou bleu de sorte que (C_1, C_2), où C_1 et C_2 sont 2×2 damiers avec chacun de leurs quatre carrés colbleu or rouge, appartient à R si et seulement si C_2 peut être obtenu à partir de C_1 en faisant tourner le damier ou en le faisant tourner puis en le réfléchissant.

a) Montrer que R est une relation d'équivalence.

b) Quelles sont les classes d'équivalence de R ?

60. a) Soit R la relation sur l'ensemble des fonctions de $\mathbf{Z}^+$ à $\mathbf{Z}^+$ tel que (f, g) appartient à R si et seulement si f est (g) (voir la section 3.2). Montrer que R est un équivalent relation de lence.

b) Décrire la classe d'équivalence contenant $f(n) = n^2$ pour la relation d'équivalence de la partie (a).

fermeture transitive d'une relation?

65. Supposons que nous utilisons le théorème 2 pour former une partition P *à* partir de une relation d'équivalence R. Quelle est la relation d'équivalence tion R qui en résulte si nous utilisons à nouveau le théorème 2 pour former un relation d'équivalence de P ?

66. Supposons que nous utilisons le théorème 2 pour former une relation d'équivalence tion R à partir d' une partition P. Quelle est la partition P qui résultats si nous utilisons à nouveau le théorème 2 pour former une partition de R ?

67. Concevoir un algorithme pour trouver la plus petite équivalence contenant une relation donnée.

* **68.** Soit $p(n)$ le nombre d'équivalences différentes relations sur un ensemble de n éléments (et par Théorem 2 le nombre de partitions d'un ensemble avec n elements). Montrer que $p(n)$ satisfait la relation de récurrence $p(n) = \sum_{j=0}^{n-1} C(n-1, j)\, p(n-j-1)$ et l'initiale condition $p(0) = 1$. (*Remarque:* les nombres $p(n)$ sont appelés **Les chiffres de Bell** après le mathématicien américain ET Cloche.)

69. Utilisez l'exercice 68 pour trouver le nombre d'équivalents relations de référence sur un ensemble de n éléments, où n est un entier positif ne dépassant pas 10.

Ordonnances partielles

introduction

Nous utilisons souvent des relations pour ordonner tout ou partie des éléments des ensembles. Par exemple, nous commandons des mots en utilisant la relation contenant des paires de mots (x, y), où x vient avant y dans le dictionnaire. Nous planifions des projets en utilisant la relation composée de paires (x, y), où x et y sont des tâches dans un projet tel que x doit être terminé avant le début de y. On ordonne l'ensemble des entiers en utilisant la relation contenant les paires (x, y), où x est inférieur à y. Lorsque nous ajoutons toutes les paires de la forme (x, x) à ces relations, nous obtenons une relation réflexive, antisymétrique et transitif. Ce sont des propriétés qui caractérisent les relations utilisées pour classer les éléments des ensembles.

DÉFINITION 1 Une relation R sur un ensemble S est appelée *ordre partiel* ou *ordre partiel* si elle est réflexive, antisymétrique. métrique et transitive. Un ensemble S avec un ordre partiel R est appelé un *ordre partiellement ensemble*, ou *poset*, et est désigné par (S, R). Les membres de S sont appelés *éléments* du poset.

Nous donnons des exemples de posets dans les exemples 1 à 3.

EXEMPLE 1 Montrer que la relation «supérieur ou égal» ($\geq$) est un ordre partiel sur l'ensemble des entiers.

Solution: Parce que $a \geq a$ pour chaque entier a, $\geq$ est réflexif. Si $a \geq b$ et $b \geq a$, alors $a = b$. Par conséquent, $\geq$ est antisymétrique. Enfin, $\geq$ est transitif car $a \geq b$ et $b \geq c$ impliquent que $a \geq c$.

Il s'ensuit que $\geq$ est un ordre partiel sur l'ensemble des entiers et $(\mathbf{Z}, \geq)$ est un poset. ▲

EXEMPLE 2 La relation de divisibilité | est un ordre partiel sur l'ensemble des entiers positifs, car il est réflexive, antisymétrique et transitive, comme indiqué à la section 9.1. On voit que $(\mathbf{Z}^+, |)$ est un poset. Rappelez-vous que ($\mathbf{Z}^+$ désigne l'ensemble des entiers positifs.) ▲

Exemple 3 : Démontrer que la relation d'inclusion $\subseteq$ est un ordre partiel sur l'ensemble d'alimentation d'un ensemble S .

Solution: Parce que $A \subseteq A$ chaque fois que A est un sous-ensemble de S, $\subseteq$ est réflexif. Il est antisymétrique car $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$ impliquant que $A = B$. Enfin, $\subseteq$ est transitif, car $A \subseteq B$ et $B \subseteq C$ impliquent que $A \subseteq C$. Par conséquent, $\subseteq$ est un ordre partiel sur $P(S)$, et $(P(S), \subseteq)$ est un poset. ▲

L'exemple 4 illustre une relation qui n'est pas un ordre partiel.

EXEMPLE 4 Soit R la relation sur l'ensemble des personnes telle que xRy si x et y sont des personnes et x est plus ancien que y . Montrez que R n'est pas une commande partielle.

Solution: Notez que R est antisymétrique car si une personne x est plus âgée qu'une personne y , alors y n'est pas plus ancien que x . Autrement dit, si xRy , alors $y \not R x$. La relation R est transitive car si la personne x est plus âgé que la personne y et y est plus âgé que la personne z , alors x est plus âgé que z . Autrement dit, si xRy et yRz , puis xRz . Cependant, R n'est pas réflexif, car personne n'est plus âgé que lui ou se. Autrement dit, $x \not R x$ pour toutes les personnes x . Il s'ensuit que R n'est pas une commande partielle. ▲

Dans différents posets, différents symboles tels que $\leq$, $\subseteq$ et | sont utilisés pour un ordre partiel. Cependant, nous avons besoin d'un symbole que nous pouvons utiliser lorsque nous discutons de la relation d'ordre dans un poset arbitraire. Habituellement, la notation $a \preccurlyeq b$ est utilisée pour indiquer que $(a, b) \in R$ dans un arbitraire poset (S, R) . Cette notation est utilisée parce que la relation «inférieur ou égal à» sur l'ensemble des réels les nombres sont l'exemple le plus connu d'un ordre partiel et le symbole $\preccurlyeq$ est similaire au $\leq$ symbole. (Notez que le symbole $\preccurlyeq$ est utilisé pour désigner la relation dans *n'importe quel* poset, pas seulement le «moins supérieur ou égal à ”.) La notation $a \prec b$ indique que $a \preccurlyeq b$, mais $a \neq b$. Aussi, nous disons « *un* est inférieur à b "ou" b est supérieur à a "si $a \prec b$.

Lorsque a et b sont des éléments du poset $(S, \preccurlyeq)$, il n'est pas nécessaire non plus *que* $a \preccurlyeq b$ ou $b \preccurlyeq a$. Par exemple, dans $(P(\mathbf{Z}), \subseteq)$, $\{1, 2\}$ n'est pas lié à $\{1, 3\}$, et vice versa, car aucun ensemble n'est contenu dans l'autre. De même, dans $(\mathbf{Z}^+, |)$, 2 n'est pas lié à 3 et 3 n'est pas lié à 2, car $2 \nmid 3$ et $3 \nmid 2$. Cela conduit à la définition 2.

DÉFINITION 2 Les éléments a et b d'un poset $(S, \preccurlyeq)$ sont appelés *comparables* si $a \preccurlyeq b$ ou $b \preccurlyeq a$. Quand a et b sont des éléments de S tels que ni $a \preccurlyeq b$ ni $b \preccurlyeq a$, a et b *ne* sont appelés *incomparables* .

EXEMPLE 5 Dans le poset $(\mathbf{Z}^+, |)$, les entiers 3 et 9 sont-ils comparables? 5 et 7 sont-ils comparables?

Solution: les entiers 3 et 9 sont comparables, car 3 | 9. Les entiers 5 et 7 sont incomparabole, car $5 \nmid 7$ et $7 \nmid 5$. ▲

L'adjectif «partiel» est utilisé pour décrire les ordres partiels car des paires d'éléments peuvent être incomparable. Lorsque tous les deux éléments de l'ensemble sont comparables, la relation est appelée **commande totale** .

DÉFINITION 3 Si $(S, \preccurlyeq)$ est un poset et que tous les deux éléments de S sont comparables, S est appelé *totalement ordonné* ou un *ensemble ordonné linéairement* , et $\preccurlyeq$ est appelé un *ordre total* ou un *ordre linéaire.* Un ensemble totalement ordonné est également appelé une *chaîne* .

EXEMPLE 6 Le poset $(\mathbf{Z}, \leq)$ est totalement ordonné, car $a \leq b$ ou $b \leq a$ chaque fois *que* a et b sont des entiers. ▲

EXEMPLE 7 Le poset $(\mathbf{Z}^+, |)$ n'est pas totalement ordonné car il contient des éléments incomparables, tels comme 5 et 7. ▲

Au chapitre 6, nous avons noté que $(\mathbf{Z}^+, \leq)$ est bien ordonné, où $\leq$ est l'ordinaire «inférieur ou égal à "relation. Nous définissons maintenant des ensembles bien ordonnés.

DÉFINITION 4 $(S, \wedge)$ est un ensemble *bien ordonné* s'il s'agit d'un poset tel que ^ est un ordre total et chaque non vide le sous-ensemble de S a un moindre élément.

EXEMPLE 8 L'ensemble des paires ordonnées d'entiers positifs, $\mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+$, avec $(a_1, a_2) \wedge (b_1, b_2)$ si $a_1 < b_1$, ou si $a_1 = b_1$ et $a_2 \leq b_2$ (l'ordre lexicographique), est un ensemble bien ordonné. La vérification de cette est laissé comme exercice 53. L'ensemble $\mathbf{Z}$, avec l'ordre $\leq$ habituel, n'est pas bien ordonné parce que l'ensemble d'entiers négatifs, qui est un sous-ensemble de $\mathbf{Z}$, n'a pas le moindre élément. ▲

À la fin de la section 5.3, nous avons montré comment utiliser le principe d'une induction bien ordonnée (appelé là induction généralisée) pour prouver les résultats d'un ensemble bien ordonné. Nous déclarons et prouver que cette technique de preuve est valide.

THÉORÈME 1 **LE PRINCIPE D'UNE INDUCTION BIEN ORDONNÉE** Supposons que S soit un ensemble commandé. Alors $P(x)$ est vrai pour tout $x \in S$, si

ÉTAPE INDUCTIVE: Pour chaque $y \in S$, si $P(x)$ est vrai pour tout $x \in S$ avec $x \prec y$, alors $P(y)$ est vrai.

Preuve: Supposons que ce soit le cas contraire que $P(x)$ est vrai pour tout $x \in S$. Ensuite, il y a un élément $y \in S$ tel que $P(y)$ soit faux. Par conséquent, l'ensemble $A = \{x \in S \mid P(x) \text{ est faux}\}$ n'est pas vide. Parce que S est bien ordonné, A a un moindre élément a. Par le choix d' *un en* tant que moindre élément de A, nous savons que $P(x)$ est vrai pour tout $x \in S$ avec $x \prec a$. Cela implique que l'étape inductive $P(a)$ est vrai. Cette contradiction montre que $P(x)$ doit être vrai pour tout $x \in S$.

Remarque: Nous n'avons pas besoin d'une étape de base dans une preuve utilisant le principe d'une induction bien ordonnée parce que si x_0 est le moindre élément d'un ensemble bien ordonné, le pas inductif nous dit que $P(x_0)$ est vrai. Cela suit parce qu'il n'y a pas d'éléments $x \in S$ avec $x \prec x_0$, donc nous savons (en utilisant un preuve vide) que $P(x)$ est vrai pour tout $x \in S$ avec $x \prec x_0$.

Le principe d'une induction bien ordonnée est une technique polyvalente pour prouver les résultats ensembles bien ordonnés. Même lorsqu'il est possible d'utiliser l'induction mathématique pour l'ensemble des positifs entiers pour prouver un théorème, il peut être plus simple d'utiliser le principe d'une induction bien ordonnée, comme nous avons vu dans les exemples 5 et 6 dans la section 6.2, où nous avons prouvé un résultat sur le bien ordonné ensemble $(\mathbf{N} \times \mathbf{N}, \wedge)$ où ^ est ordre lexicographique sur $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$.

Ordre lexicographique

Les mots d'un dictionnaire sont classés par ordre alphabétique ou lexicographique, qui est basé sur ordre des lettres dans l'alphabet. Il s'agit d'un cas particulier d'une commande de chaînes sur un ensemble construit à partir d'une commande partielle sur l'ensemble. Nous montrerons comment cette construction fonctionne poset.

Tout d'abord, nous allons montrer comment construire un ordre partiel sur le produit cartésien de deux posets, $(A_1, \wedge_1)$ et $(A_2, \wedge_2)$. L' **ordre lexicographique** $\wedge$ sur $A_1 \times A_2$ est défini par spécifiant qu'une paire est inférieure à une deuxième paire si la première entrée de la première paire est inférieure à (dans A_1) la première entrée de la deuxième paire, ou si les premières entrées sont égales, mais la deuxième entrée de cette paire est inférieure à (en A_2) la deuxième entrée de la deuxième paire. En d'autres termes, (a_1, a_2) est moins que (b_1, b_2), c'est-à-dire

$$(a_1, a_2) \prec (b_1, b_2),$$

soit si $a_1 \prec_1 b_1$ ou si $a_1 = b_1$ et $a_2 \prec_2 b_2$.

On obtient un ordre partiel $\wedge$ en ajoutant l'égalité à l'ordre $\prec$ sur $A_1 \times A_2$. le la vérification de ceci est laissée comme exercice.

EXEMPLE 9 Déterminer si $(3, 5) \prec (4, 8)$, si $(3, 8) \prec (4, 5)$ et si $(4, 9) \prec (4, 11)$ dans le poset $(\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}, \wedge)$, où $\wedge$ est l'ordre lexicographique construit à partir de la relation $\leq$ habituelle sur $\mathbf{Z}$.

Solution: Parce que $3 < 4$, il s'ensuit que $(3, 5) \prec (4, 8)$ et que $(3, 8) \prec (4, 5)$. Nous avons $(4, 9) \prec (4, 11)$, car les premières entrées de $(4, 9)$ et $(4, 11)$ sont identiques mais $9 < 11$. ▲

Dans la figure 1, les paires ordonnées en $\mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+$ qui sont inférieurs à $(3, 4)$ sont mis en évidence.

Un ordre lexicographique peut être défini sur le produit cartésien de n posets $(A_1, \wedge_1)$, $(A_2, \wedge_2), \ldots, (A_n, \wedge_n)$. Définissez l'ordre partiel $\wedge$ sur $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ par

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \prec (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

si $a_1 \prec_1 b_1$, ou s'il y a un entier $i > 0$ tel que $a_1 = b_1, \ldots, a_i = b_i$, et $a_{i+1} \prec_{i+1} b_{i+1}$.

En d'autres termes, un n- tuple est inférieur à un deuxième n- tuple si l'entrée du premier n- tuple dans le première position où les deux n -désaccords sont inférieurs à l'entrée dans cette position dans la seconde n -tuple.

...	...	...	...	...	...	...	
(1, 7)	(2, 7)	(3, 7)	(4, 7)	(5, 7)	(6, 7)	(7, 7)	...
(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 6)	(7, 6)	...
(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 5)	(6, 5)	(7, 5)	...
(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)	(5, 4)	(6, 4)	(7, 4)	...
(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)	(5, 3)	(6, 3)	(7, 3)	...
(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)	(7, 2)	...
(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)	(7, 1)	...

FIGURE 1 Les paires ordonnées inférieures à $(3, 4)$ dans l'ordre lexicographique.

EXEMPLE 10 Notez que $(1, 2, 3, 5) \prec (1, 2, 4, 3)$, car les entrées dans les deux premières positions de ces 4-tuples d'accord, mais en troisième position, l'entrée dans le premier 4-tuple, 3, est inférieure à celle de la deuxième 4-tuple, 4. (Ici, l'ordre sur 4-tuples est l'ordre lexicographique qui provient de la relation «inférieure ou égale» habituelle sur l'ensemble des entiers.) ▲

Nous pouvons maintenant définir l'ordre lexicographique des chaînes. Considérez les cordes $a_1 a_2 \ldots a_m$ et $b_1 b_2 \ldots b_n$ sur un ensemble ordonné S. Supposons que ces chaînes ne soient pas égales. Soit t le minimum de m et n. La définition de l'ordre lexicographique est que la chaîne $a_1 a_2 \ldots a_m$ est inférieure à $b_1 b_2 \ldots b_n$ si et seulement si

$$(a_1, a_2, \ldots, a_t) \prec (b_1, b_2, \ldots, b_t), \text{ ou}$$

$$(a_1, a_2, \ldots, a_t) = (b_1, b_2, \ldots, b_t) \text{ et } m < n,$$

où $\prec$ dans cette inégalité représente l'ordre lexicographique de S^t. En d'autres termes, pour détermine l'ordre de deux chaînes différentes, la chaîne la plus longue est tronquée à la longueur du chaîne plus courte, à savoir, en termes $t = \min(m, n)$. Ensuite, les t- couples composés des t premiers termes de chaque chaîne est comparée en utilisant l'ordre lexicographique sur S^t. Une chaîne est inférieure à une autre chaîne si le t- tuple correspondant à la première chaîne est inférieur au t- tuple de la deuxième chaîne, ou si ces deux t- couples sont identiques, mais la deuxième chaîne est plus longue. La vérification que c'est un ordre partiel est laissé comme exercice 38 pour le lecteur.

EXEMPLE 11 Considérons l'ensemble de chaînes de lettres anglaises en minuscules. Utilisation de l'ordre des lettres dans le alphabet, un ordre lexicographique sur l'ensemble des chaînes peut être construit. Une chaîne est inférieure à une deuxième chaîne si la lettre dans la première chaîne dans la première position où les chaînes diffèrent vient avant la lettre dans la deuxième chaîne à cette position, ou si la première chaîne et la deuxième chaîne d'accord dans toutes les positions, mais la deuxième chaîne a plus de lettres. Cette commande est la même que celle utilisé dans les dictionnaires. Par exemple,

discret $\prec$ *discret,*

parce que ces chaînes diffèrent d'abord en septième position, et $e \prec t$. Aussi,

discret $\prec$ *discreetness,*

parce que les huit premières lettres sont d'accord, mais la deuxième chaîne est plus longue. En outre,

discret $\prec$ *discrétion,*

car

discret $\prec$ *discreti.* ▲

Diagrammes de Hasse

De nombreuses arêtes du graphe orienté pour un poset fini ne doivent pas être affichées car elles doivent être présent. Par exemple, considérons le graphe orienté pour l'ordre partiel $\{(a, b) \mid a \leq b\}$ sur le set $\{1, 2, 3, 4\}$, illustré à la figure 2 (a). Parce que cette relation est un ordre partiel, elle est réflexive, et son graphe orienté a des boucles à tous les sommets. Par conséquent, nous n'avons pas à montrer ces boucles car ils doivent être présents; sur la figure 2 (b), les boucles ne sont pas représentées. Parce qu'une commande partielle est transitive, nous n'avons pas à montrer les bords qui doivent être présents à cause de la transitivité. Pour Par exemple, dans la figure 2 (c), les bords $(1, 3)$, $(1, 4)$ et $(2, 4)$ ne sont pas représentés car ils doivent être présent. Si nous supposons que toutes les arêtes sont pointées «vers le haut» (comme elles sont dessinées sur la figure), nous ne pas avoir à montrer les directions des bords; La figure 2 (c) ne montre pas les directions.

En général, nous pouvons représenter un poset fini $(S, ^)$ *en* utilisant cette procédure: Commencez par le graphique orienté pour cette relation. Parce qu'un ordre partiel est réflexif, une boucle (a, a) est présente à chaque sommet a. Retirez ces boucles. Ensuite, supprimez tous les bords qui doivent être dans l'ordre partiel en raison de la présence d'autres bords et de la transitivité. Autrement dit, supprimez tous les bords (x, y) pour dont il existe un élément $z \in S$ tel que $x \prec z$ et $z \prec x$. Enfin, arrangez chaque bord de sorte que

4 4 4

3 3 3

2 2 2

1 1 1

(une) b) (c)

FIGURE 2 Construction du diagramme de Hasse pour $(\{1, 2, 3, 4\}, \leq)$.

son sommet initial est en dessous de son sommet terminal (tel qu'il est dessiné sur papier)Retirez toutes les flèches les arêtes dirigées, car toutes les arêtes pointent «vers le haut» vers leur sommet terminal.

Ces étapes sont bien définies, et seul un nombre fini d'étapes doit être effectué pour un poset fini. Lorsque toutes les étapes ont été prises, le diagramme résultant contient suffisamment informations pour trouver la commande partielle, comme nous l'expliquerons plus loin. Le diagramme résultant est appelé le **diagramme** de **Hasse** de $(S, \wedge)$, nommé d'après le mathématicien allemand Helmut du XXe siècle Hasse qui les a largement utilisés.

Soit $(S, \wedge)$ un poset. On dit qu'un élément $y \in S$ **recouvre** un élément $x \in S$ si $x \prec y$ et il n'y a pas d'élément $z \in S$ tel que $x \prec z \prec y$. L'ensemble des paires (x, y) telles que y couvre x est appelé la **relation** de **couverture** de $(S, \wedge)$. D'après la description du diagramme de Hasse de un poset, nous voyons que les arêtes du diagramme de Hasse de $(S, \wedge)$ sont des arêtes pointant vers le haut répondant aux paires dans la relation de couverture de $(S, \wedge)$. De plus, nous pouvons récupérer un poset de sa relation de couverture, car c'est la fermeture transitive réflexive de sa relation de couverture. (L'exercice 31 demande une preuve de ce fait.) Cela nous dit que nous pouvons construire un ordre partiel à partir de son diagramme de Hasse.

EXEMPLE 12 Dessinez le diagramme de Hasse représentant l'ordre partiel $\{(a, b) \mid a \text{ divise } b\}$ sur $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$.

Solution: Commencez par le digraphe pour cet ordre partiel, comme le montre la figure 3 (a).Enlever tout boucles, comme le montre la figure 3 (b).Supprimez ensuite toutes les arêtes impliquées par la propriété transitive. Ce sont $(1, 4)$, $(1, 6)$, $(1, 8)$, $(1, 12)$, $(2, 8)$, $(2, 12)$ et $(3, 12)$. Organiser tous les bords pour pointer vers le haut et supprimez toutes les flèches pour obtenir le diagramme de HasseLe diagramme de Hasse résultant est montré dans la figure 3 (c). ▲

EXEMPLE 13 Dessinez le diagramme de Hasse pour l'ordre partiel $\{(A, B) \mid A \subseteq B\}$ sur l'ensemble de puissance $P(S)$ où $S = \{a, b, c\}$.

HELMUT HASSE (1898–1979) Helmut Hasse est né à Kassel, en Allemagne. Il a servi dans l'allemand marine après le lycée. Il a commencé ses études universitaires à l'Université de Göttingen en 1918, se déplaçant en 1920 à Université de Marburg pour étudier avec le théoricien des nombres Kurt Hensel. Pendant ce temps, Hasse a rendu fondamental contributions à la théorie des nombres algébriques. Il est devenu le successeur de Hensel à Marburg, devenant plus tard directeur du célèbre institut de mathématiques de Göttingen en 1934, et a pris un poste à l'Université de Hambourg en 1950. Hasse a été pendant 50 ans rédacteur en chef du *Crelle's Journal* , un célèbre périodique allemand de mathématiques, le poste de rédacteur en chef en 1936 lorsque les nazis ont forcé Hensel à démissionner. Pendant la Seconde Guerre mondiale, Hasse a travaillé sur recherche en mathématiques appliquées pour la marine allemande. Il a été noté pour la clarté et le style personnel de ses conférences et était consacré à la fois à la théorie des nombres et à ses étudiants. (Hasse a été controversé pour ses liens avec le parti nazi. Les enquêtes ont montré qu'il était un fort nationaliste allemand, mais pas un ardent nazi.)

8 12

4 6

2 3

1

(une)

8 12

4 6

2 3

1

b)

8 12

4 6

2 3

1

(c)

FIGURE 3 **Construction du diagramme de Hasse de** $(\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}, |)$ **.**

Solution: Le diagramme de Hasse pour cette commande partielle est obtenu à partir du digraphe associé par supprimer toutes les boucles et tous les bords qui se produisent de la transitivité, à savoir, $(\emptyset, \{a, b\})$, $(\emptyset, \{a, c\})$, $(\emptyset, \{b, c\})$, $(\emptyset, \{a, b, c\})$, $(\{a\}, \{a, b, c\})$, $(\{b\}, \{a, b, c\})$, et $(\{c\}, \{a, b, c\})$. Enfin tous les bords pointez vers le haut et les flèches sont supprimées.Le diagramme de Hasse résultant est illustré à la figure 4.▲

Éléments maximaux et minimaux

Les éléments de posets qui ont certaines propriétés extrêmes sont importants pour de nombreuses applications. Un élément d'un poset est appelé maximal s'il n'est pas inférieur à n'importe quel élément du poset.Autrement dit, *un* est **maximal** dans le poset $(S, \wedge)$ s'il n'y a pas de $b \in S$ tel que $a \prec b$. De même, un élément d'un le poset est appelé minimal s'il n'est supérieur à aucun élément du poset.Autrement dit, *un* est **minime** s'il n'y a pas d'élément $b \in S$ tel que $b \prec a$. Les éléments maximaux et minimaux sont faciles à repérer en utilisant un diagramme de Hasse.Ce sont les éléments «haut» et «bas» du diagramme.

EXEMPLE 14 Quels éléments du poset $(\{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}, |)$ sont maximaux et lesquels sont minimes?

Solution: Le diagramme de Hasse de la figure 5 pour ce poset montre que les éléments maximaux sont 12, 20 et 25, et les éléments minimaux sont 2 et 5. Comme le montre cet exemple, un poset peut avoir plusieurs éléments maximaux et plusieurs éléments minimaux. ▲

Parfois, il y a un élément dans un poset qui est plus grand que tous les autres éléments.Un tel L'élément est appelé le plus grand élément. Autrement dit, *a* est le **plus grand élément** du poset $(S, \wedge)$

$\{a, b, c\}$

$\{a, c\}$ $\{a, b\}$ $\{b, c\}$

$\{a\}$ $\{c\}$ $\{b\}$

$\emptyset$

FIGURE 4 **Le diagramme de Hasse de** $(P(\{a, b, c\}), \subseteq)$ **.**

12 20

4 dix 25

2 5

FIGURE 5 **La Hasse Schéma d'un Poset.**

b *c* *ré* *ré* *e* *ré* *ré*

c *c* *b* *c*

une *une* *b* *une* *b* *une*

(une) b) (c) (ré)

FIGURE 6 Diagrammes de Hasse de quatre Posets.

si $b \wedge a$ pour tout $b \in S$. L'élément le plus important est unique lorsqu'il existe [voir l'exercice 40 (a)]. De même, un élément est appelé le moindre élément s'il est inférieur à tous les autres éléments du poset. Autrement dit, *un* est le **plus petit élément** de $(S, \wedge)$ si $un \wedge b$ pour tout $b \in S$. Le moindre élément est unique quand il existe [voir l'exercice 40 (b)].

EXEMPLE 15 Déterminer si les posets représentés par chacun des diagrammes de Hasse de la figure 6 ont un le plus grand élément et le moindre élément.

Solution: le moindre élément du poset avec diagramme de Hasse (a) est *a* . Ce poset n'a pas le plus grand élément. Le poset avec le diagramme de Hasse (b) n'a ni le moindre ni le plus grand élément. Le poset avec le diagramme de Hasse (c) n'a pas le moindre élément. Son plus grand élément est *d* . Le poset avec Hasse le diagramme (d) a le plus petit élément *a* et le plus grand élément *d* . ▲

EXEMPLE 16 Soit *S* un ensemble. Déterminer s'il y a un plus grand élément et un moindre élément dans le poset $(P(S), \subseteq)$.

Solution: Le plus petit élément est l'ensemble vide, parce que $\emptyset \subseteq T$ pour chaque sous - ensemble *T* de *S* . L'ensemble *S* est le plus grand élément dans ce poset, parce que $T \subseteq S$ quand *T* est un sous - ensemble de *S* . ▲

EXEMPLE 17 Y a-t-il un plus grand élément et un moindre élément dans le poset $(\mathbf{Z}^{+}, |)$?

Solution: l'entier 1 est le plus petit élément car $1 \mid n$ chaque fois que *n* est un entier positif. Car il n'y a pas d'entier divisible par tous les entiers positifs, il n'y a pas d'élément le plus grand. ▲

Parfois, il est possible de trouver un élément supérieur ou égal à tous les éléments dans un sous-ensemble *A* d'un poset $(S, \wedge)$. Si *u* est un élément de *S* tel que $a \wedge u$ pour tous les éléments $a \in A$, alors *u* est appelé une **borne supérieure** de *A* . De même, il peut y avoir un élément inférieur ou égal à tous les éléments *A* . Si *l* est un élément de *S* tel que $l \wedge a$ pour tous les éléments $a \in A$, alors *l* est appelé une **borne inférieure** de *A* .

EXEMPLE 18 Trouver les bornes inférieure et supérieure des sous-ensembles $\{a, b, c\}$, $\{j, h\}$ et $\{a, c, d, f\}$ dans le poset avec le diagramme de Hasse illustré à la figure 7.

h *j*

g *F*

ré *e*

b *c*

une

FIGURE 7 Le Diagramme de Hasse de un Poset.

Solution: les limites supérieures de $\{a, b, c\}$ sont *e, f, j* et *h* , et sa seule limite inférieure est *a* . Là ne sont pas des bornes supérieures de $\{j, h\}$, et ses bornes inférieures sont *a, b, c, d, e* et *f* . Les limites supérieures de $\{a, c, d, f\}$ sont *f* , *h* et *j* , et sa borne inférieure est *a* . ▲

L'élément *x* est appelé la **plus petite borne supérieure** du sous-ensemble *A* si *x* est une borne supérieure qui est inférieur à tout autre borne supérieure de *A* . Parce qu'il n'y a qu'un seul de ces éléments, s'il existe, il est logique d'appeler cet élément *la* borne *la* moins haute [voir l'exercice 42 (a)]. Autrement dit, *x* est le limite supérieure de *A* si $a \wedge x$ chaque fois *que* $\in A$, et $x \wedge z$ chaque fois que *z* est une limite supérieure de *A* . De même, l'élément *y* est appelé la **plus grande borne inférieure** de *A* si *y* est une borne inférieure de *A* et $z \wedge y$ chaque fois que *z* est une borne inférieure de *A* . La plus grande limite inférieure de *A* est unique si elle existe [voir exercice 42 (b)]. La plus grande borne inférieure et la borne la moins haute d'un sous-ensemble *A* sont désignées respectivement par glb *(A)* et lub *(A)* .

EXEMPLE 19 Trouver la plus grande borne inférieure et la plus petite borne supérieure de $\{b, d, g\}$, si elles existent, dans le poset illustré à la figure 7.

Solution: les limites supérieures de $\{b, d, g\}$ sont g et h . Parce que $g \prec h$, g est la plus petite borne supérieure. Les bornes inférieures de $\{b, d, g\}$ sont a et b . Parce *que* $a \prec b$, b est la plus grande borne inférieure. ▲

EXEMPLE 20 Trouver la plus grande borne inférieure et la plus petite borne supérieure des ensembles $\{3, 9, 12\}$ et $\{1, 2, 4, 5, 10\}$, s'ils existent, dans le poset $(\mathbf{Z}^+, |)$.

Solution: un entier est une borne inférieure de $\{3, 9, 12\}$ si 3, 9 et 12 sont divisibles par cet entier. Les seuls entiers de ce type sont 1 et 3. Parce que $1 \mid 3$, 3 est la plus grande borne inférieure de $\{3, 9, 12\}$. La seule borne inférieure de l'ensemble $\{1, 2, 4, 5, 10\}$ par rapport à | est l'élément 1. Par conséquent, 1 est la borne inférieure la plus grande pour $\{1, 2, 4, 5, 10\}$.

Un entier est une borne supérieure pour $\{3, 9, 12\}$ si et seulement s'il est divisible par 3, 9 et 12. Les entiers avec cette propriété sont ceux divisibles par le plus petit commun multiple de 3, 9 et 12, qui est 36. Par conséquent, 36 est la plus petite borne supérieure de $\{3, 9, 12\}$. Un entier positif est un supérieur lié à l'ensemble $\{1, 2, 4, 5, 10\}$ si et seulement s'il est divisible par 1, 2, 4, 5 et 10. Les entiers avec cette propriété sont les nombres entiers divisibles par le plus petit commun multiple de ces nombres entiers, qui est 20. Par conséquent, 20 est la plus petite borne supérieure de $\{1, 2, 4, 5, 10\}$. ▲

Treillis

Un ensemble partiellement ordonné dans lequel chaque paire d'éléments a à la fois une limite supérieure et un la plus grande borne inférieure est appelée un **réseau** . Les treillis ont de nombreuses propriétés spéciales. En outre, réseaux sont utilisés dans de nombreuses applications différentes telles que les modèles de flux d'information et jouent un rôle important dans l'algèbre de Boole.

EXEMPLE 21 Déterminez si les posets représentés par chacun des diagrammes de Hasse de la figure 8 sont des réseaux.

Solution: les posets représentés par les diagrammes de Hasse en (a) et (c) sont tous deux des réseaux car dans chaque poset, chaque paire d'éléments a à la fois une limite supérieure minimale et une limite inférieure maximale, comme le lecteur devrait vérifier. Par contre, le poset avec le diagramme de Hasse montré en (b) n'est pas un réseau, car les éléments b et c n'ont pas de limite supérieure. Pour voir cela, notez que chacun des éléments d , e et f est une limite supérieure, mais aucun de ces trois éléments ne précède les deux autres en ce qui concerne la commande de ce poset. ▲

F *F* *h*

e *ré* *e* *e* *g* *g*

c *ré*

b b c b ré ré

une une une

(une) b) (c)

FIGURE 8 **Diagrammes de Hasse de trois posets.**

EXEMPLE 22 Est le poset *(* $\mathbf{Z}^{+}$, | *)* un réseau?

Solution: Soit *a* et *b* deux entiers positifs. La borne inférieure la plus basse et la borne inférieure la plus grande de ces deux nombres entiers sont le plus petit commun multiple et le plus grand diviseur commun de ceux-ci des entiers, respectivement, comme le lecteur devrait le vérifier.Il s'ensuit que ce poset est un réseau. ▲

EXEMPLE 23 Déterminez si les posets $(\{1, 2, 3, 4, 5\}, |)$ et $(\{1, 2, 4, 8, 16\}, |)$ sont des réseaux.

Solution: comme 2 et 3 n'ont pas de bornes supérieures dans $(\{1, 2, 3, 4, 5\}, |)$, ils n'ont certainement pas une limite au moins supérieure. Par conséquent, le premier poset n'est pas un réseau.

Tous les deux éléments du deuxième poset ont à la fois une limite supérieure minimale et une limite inférieure maximale lié. La limite la moins haute de deux éléments de ce poset est la plus grande des éléments et la la limite inférieure la plus élevée de deux éléments est la plus petite des éléments, comme le lecteur devrait le vérifier. Par conséquent, ce deuxième poset est un réseau. ▲

EXEMPLE 24 Déterminer si $(P(S), \subseteq)$ est un réseau où S est un ensemble.

Solution: Soit A et B deux sous - ensembles de S. La borne inférieure la plus basse et la borne inférieure la plus grande de A et B sont respectivement $A \cup B$ et $A \cap B$, comme le lecteur peut le montrer. Par conséquent, $(P(S), \subseteq)$ est un treillis. ▲

EXEMPLE 25 **Le modèle en treillis du flux d'information** Dans de nombreux contextes, le flux d'informations d'un personne ou programme informatique à un autre est limité par des autorisations de sécurité.On peut utiliser un treillis modèle pour représenter différentes politiques de flux d'information. Par exemple, une information commune La politique de flux est la *politique de sécurité à plusieurs niveaux* utilisée dans les systèmes gouvernementaux et militaires.Chaque élément d'information est affecté à une classe de sécurité, et chaque classe de sécurité est représentée par un paire (A, C) où A est un *niveau d'autorité* et C est une *catégorie.* Personnes et programmes informatiques sont ensuite autorisés à accéder aux informations d'un ensemble restreint spécifique de classes de sécurité.

Les niveaux d'autorité typiques utilisés au sein du gouvernement américain sont non classés (0), confidentiels (1), secret (2) et top secret (3).(Les informations sont dites classées si elles sont confidentielles, secrètes, ou top secret.) Les catégories utilisées dans les classes de sécurité sont les sous-ensembles d'un ensemble de tous les *compartiments* pertinentes pour un domaine d'intérêt particulier. Chaque compartiment représente un sujet particulier. Par exemple, si l'ensemble des compartiments est {*espions, taupes, agents doubles*}, alors il y a huit différentes catégories, une pour chacun des huit sous-ensembles de l'ensemble de compartiments, comme { *espions, taupes* }.

Il y a des milliards de pages d'US classifiés documents gouvernementaux.

On peut ordonner des classes de sécurité en précisant que $(A_1, C_1) \wedge (A_2, C_2)$ si et seulement si $A_1 \leq A_2$ et $C_1 \subseteq C_2$. Les informations peuvent circuler de la classe de sécurité (A_1, C_1) vers classe de sécurité (A_2, C_2) si et seulement si $(A_1, C_1) \wedge (A_2, C_2)$. Par exemple, les informations sont autorisé à passer de la classe de sécurité *(secret,* { *espions, taupes* } *)* à la classe de sécurité

(top secret, { *espions, grains de beauté, agents doubles* } *)* , alors que les informations ne
la classe de sécurité *(top secret,* { *espions, taupes* } *)* dans l'une des classes de sécurité *(secret,* { *espions, taupes, agents doubles* } *)* ou *(top secret,* { *espions* } *)* .

Nous laissons au lecteur (voir exercice 48) le soin de montrer que l'ensemble de toutes les classes de sécurité avec l'ordre défini dans cet exemple forme un réseau. ▲

Tri topologique

Supposons qu'un projet se compose de 20 tâches différentes.Certaines tâches ne peuvent être terminées qu'après d'autres sont terminés. Comment trouver une commande pour ces tâches? Pour modéliser ce problème nous établissons un ordre partiel sur l'ensemble des tâches de sorte que $a \prec b$ si et seulement si a et b sont des tâches où b

ne peut pas être démarré tant *qu'un* n'est pas terminé. Pour produire un calendrier pour le projet, nous devons produire une commande pour les 20 tâches compatible avec cette commande partielle. Nous montrerons comment Ceci peut être fait.

Nous commençons par une définition. Une commande totale ^ serait **compatible** avec le ordonner R si a ^ b chaque fois que aRb . Construire une commande totale compatible à partir d'un partiel l'ordre est appelé **tri topologique** . * Nous devrons utiliser le lemme 1.

LEMMA 1 Chaque poset fini non vide *(S, ^)* a au moins un élément minimal.

Preuve: Choisissez un élément un_0 de S . Si un_0 n'est pas minimal, alors il y a un élément a_1 avec $un_1 \prec a_0$. Si un_1 n'est pas minimal, il y a un élément a_2 avec $un_2 \prec a_1$. Continuez ce processus, de sorte que si un_n est pas minime, il y a un élément a_{n+1} avec $un_{n+1} \prec a_n$. Parce qu'il n'y a qu'un nombre fini d'éléments dans le poset, ce processus doit se terminer par un élément minimal a_n .

L'algorithme de tri topologique que nous décrirons fonctionne pour tout poset fini non vide. Pour définir un ordre total sur le poset *(A, ^)* , choisissez d'abord un élément minimal a_1 ; un tel élément existe par le lemme 1. Ensuite, notez que *(A -* { a_1 } *, ^)* est également un poset, comme le lecteur Vérifier. (Ici, par ^, nous entendons la restriction de la relation d'origine ^ sur A à A - { a_1 }.) Si elle est non vide, choisissez un élément minimal a_2 de ce poset. Ensuite, retirez également un_2 et s'il y a éléments supplémentaires à gauche, choisissez un élément minimal a_3 dans A - { a_1 , a_2 }. Continuez ce processus en choisir un_{k+1} comme élément minimal dans A - { a_1 , a_2 , ..., a_k }, tant qu'il reste des éléments.

Parce que A est un ensemble fini, ce processus doit se terminer. Le produit final est une séquence de éléments a_1 , a_2 , ..., a_n . L'ordre total souhaité ^_t est défini par

$$a_1 \prec_t a_2 \prec_t \cdots \prec_t a_n .$$

Cette commande totale est compatible avec la commande partielle d'origine. Pour voir cela, notez que si $b \prec c$ dans l'ordre partiel d'origine, c est choisi comme élément minimal à une phase de l'algorithme où b a déjà été supprimé, sinon c ne serait pas un élément minimal. Pseudocode pour cet algorithme de tri topologique est présenté dans l'algorithme 1.

ALGORITHME 1 Tri topologique.

procédure *tri topologique* (($S, ^$) : poset fini)
$k := 1$
tandis que $S = ∅$
  $a_k :=$ un élément minimal de S {un tel élément existe par le lemme 1}
  $S := S - \{a_k\}$
  $k := k + 1$
renvoyer $a_1, a_2, ..., a_n$ { $a_1, a_2, ..., a_n$ est un ordre total compatible de S }

EXEMPLE 26 Trouver un ordre total compatible pour le poset $(\{1, 2, 4, 5, 12, 20\}, |)$.

* Le «tri topologique» est une terminologie utilisée par les informaticiens; les mathématiciens utilisent la terminologie «linéarisation commande partielle »pour la même chose. En mathématiques, la topologie est la branche de la géométrie traitant des propriétés géométriques figures qui tiennent pour toutes les figures qui peuvent être transformées les unes dans les autres par des bijections continues. En informatique, un la topologie est tout arrangement d'objets qui peut être connecté à des bords.

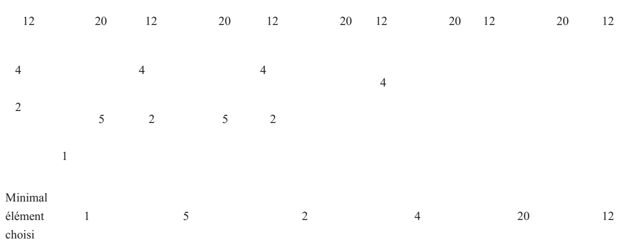


FIGURE 9 **Un tri topologique de $(\{1, 2, 4, 5, 12, 20\}, |)$.**

Solution: La première étape consiste à choisir un élément minimal. Ce doit être 1, car c'est le seul élément minimal. Ensuite, sélectionnez un élément minimal de $(\{2, 4, 5, 12, 20\}, |)$. Il y a deux minimes éléments de ce poset, à savoir 2 et 5. Nous sélectionnons 5. Les éléments restants sont $\{2, 4, 12, 20\}$. Le seul élément minimal à ce stade est 2. Ensuite, 4 est choisi parce que c'est le seul élément minimal élément de $(\{4, 12, 20\}, |)$. Parce que les deux 12 et 20 sont des éléments minimaux de $(\{12, 20\}, |)$, soit peut être choisi ensuite. Nous sélectionnons 20, ce qui laisse 12 comme dernier élément à gauche. Cela produit le commande totale

$$1 \prec 5 \prec 2 \prec 4 \prec 20 \prec 12.$$

Les étapes utilisées par cet algorithme de tri sont affichées dans la figure 9. ▲

Le tri topologique a une application à l'ordonnancement des projets.

EXEMPLE 27 Un projet de développement dans une société informatique nécessite la réalisation de sept tâches.Une partie de ces tâches ne peuvent être démarrées qu'après la fin des autres tâches.Un ordre partiel des tâches est mis en place en considérant la tâche $X \prec$ la tâche Y si la tâche Y ne peut pas être démarrée tant que la tâche X n'est pas terminée. le Le diagramme de Hasse pour les sept tâches, par rapport à cet ordre partiel, est illustré à la figure 10. Trouvez un ordre dans lequel ces tâches peuvent être effectuées pour terminer le projet.

Solution: un ordre des sept tâches peut être obtenu en effectuant une topologie sorte ical. Les étapes d'un tri sont illustrées à la figure 11. Le résultat de ce tri, $A \prec C \prec B \prec E \prec F \prec D \prec G$, donne un ordre possible pour les tâches. ▲

g
ré *F*
B
UNE *C* *E*

FIGURE 10 Le Diagramme de Hasse pour Sept tâches.

g *g* *g* *g* *g* *g* *g*
ré *F* *ré* *F* *ré* *F* *ré* *F* *ré* *F* *ré*
B *B* *B*
UNE *C* *E* *C* *E* *E* *E*

Minimal élément choisi *UNE* *C* *B* *E* *F* *ré* *g*

FIGURE 11 Un tri topologique des tâches.

Des exercices

1. Lesquelles de ces relations sur {0 , 1 , 2 , 3} sont d'ordre partiel-ings? Déterminer les propriétés d'une commande partielle qui les autres manquent.

a) $\{(0,0), (1,1), (2,2), (3,3)\}$

b) $\{(0,0), (1,1), (2,0), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3)\}$

c) $\{(0,0), (1,1), (1,2), (2,2), (3,3)\}$

d) $\{(0,0), (1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3)\}$

e) $\{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,2), (3,3)\}$

2. Lesquelles de ces relations sur {0 , 1 , 2 , 3} sont d'ordre partiel-ings? Déterminer les propriétés d'une commande partielle qui les autres manquent.

a) $\{(0,0), (2,2), (3,3)\}$

b) $\{(0,0), (1,1), (2,0), (2,2), (2,3), (3,3)\}$

c) $\{(0,0), (1,1), (1,2), (2,2), (3,1), (3,3)\}$

8. Déterminez si les relations représentées par ces les matrices zéro à un sont des ordres partiels.

une) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Dans les exercices 9 à 11, déterminez si la relation avec le le graphique dirigé montré est un ordre partiel.

9. *une* *b* **dix.** *une* *b*

d) $\{ (0, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 0), (2, 2), (2, 3), (3, 0), (3, 3) \}$

e) $\{ (0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 0), (2, 2), (3, 3) \}$

3. Est (S, R) un poset si S est l'ensemble de toutes les personnes dans le monde et $(a, b) \in R$, où a et b sont des personnes, si

a) a est plus grand que b ?

b) a n'est pas plus grand que b ?

c) $a = b$ ou a est un ancêtre de b ?

d) a et b ont-ils un ami commun?

4. Est (S, R) un poset si S est l'ensemble de toutes les personnes dans le monde et $(a, b) \in R$, où a et b sont des personnes, si

a) a n'est pas plus court que b ?

b) a pèse plus que b ?

c) $a = b$ ou a est un descendant de b ?

d) a et b n'ont pas d'ami commun?

5. Lesquels sont des posets?

a) $(\mathbf{Z}, =)$ **b)** $(\mathbf{Z}, =)$ **c)** $(\mathbf{Z}, \geq)$ **d)** $(\mathbf{Z}, |)$

6. Parmi ceux-ci, lesquels sont des posets?

a) $(\mathbf{R}, =)$ **b)** $(\mathbf{R}, <)$ **c)** $(\mathbf{R}, \leq)$ **d)** $(\mathbf{R}, =)$

7. Déterminer si les relations représentées par ces les matrices zéro à un sont des ordres partiels.

une) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c *ré* *c* *ré*

11.

une *b*

c *ré*

12. Soit (S, R) un poset. Montrez que (S, R^{-1}) est aussi un poset, où R^{-1} est l'inverse de R. Le poset (S, R^{-1}) est appelé le **dual** de (S, R).

13. Trouvez les duels de ces posets.

a) $(\{0, 1, 2\}, \leq)$ **b)** $(\mathbf{Z}, \geq)$

c) $(P(\mathbf{Z}), \supseteq)$ **d)** $(\mathbf{Z}^{+}, |)$

14. Lesquelles de ces paires d'éléments sont comparables dans poset $(\mathbf{Z}^{+}, |)$?

a) 5 , 15 **b)** 6 , 9 **c)** 8 , 16 **d)** 7 , 7

15. Trouvez deux éléments incomparables dans ces posets.

a) $(P(\{0, 1, 2\}), \subseteq)$ **b)** $(\{1, 2, 4, 6, 8\}, |)$

16. Soit $S = \{1, 2, 3, 4\}$. En ce qui concerne l'orientation lexicographique sur la base de la relation «moins de» habituelle,

a) trouver toutes les paires dans $S \times S$ inférieures à $(2, 3)$.

b) trouver toutes les paires dans $S \times S$ supérieures à $(3, 1)$.

c) trace le diagramme de Hasse du poset $(S \times S, \wedge)$.

17. Trouvez l'ordre lexicographique de ces n -tuples:

a) $(1, 1, 2), (1, 2, 1)$ **b)** $(0, 1, 2, 3), (0, 1, 3, 2)$

c) $(1, 0, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 1, 0)$

18. Trouver l'ordre lexicographique de ces chaînes de lettres anglaises:

a) *charlatan, rapide, vif-argent, sable mouvant, charlatan*

b) *ouvert, ouvreur, opéra, opérande, ouvert*

c) *zoo, zéro, zoom, zoologie, zoologique*

19. Trouver l'ordre lexicographique des chaînes de bits 0, 01, 11, 001, 010, 011, 0001 et 0101 en fonction de la commande $0 < 1$.

20. Tracez le diagramme de Hasse pour le «supérieur ou égal à» relation sur $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

21. Tracez le diagramme de Hasse pour le «inférieur ou égal à» relation sur $\{0, 2, 5, 10, 11, 15\}$.

22. Dessinez le diagramme de Hasse pour la divisibilité sur l'ensemble

a) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. **b)** $\{3, 5, 7, 11, 13, 16, 17\}$.

c) $\{2, 3, 5, 10, 11, 15, 25\}$. **d)** $\{1, 3, 9, 27, 81, 243\}$.

23. Dessinez le diagramme de Hasse pour la divisibilité sur l'ensemble

a) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. **b)** $\{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13\}$.

c) $\{1, 2, 3, 6, 12, 24, 36, 48\}$.

d) $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$.

24. Dessinez le diagramme de Hasse pour l'inclure sur l'ensemble $P(S)$, où $S = \{ a, b, c, d \}$.

d) Y a-t-il un moindre élément?

e) Trouvez toutes les limites supérieures de $\{ a, b, c \}$.

f) Trouvez la borne supérieure la moins haute de $\{ a, b, c \}$, si elle existe.

g) Trouvez toutes les bornes inférieures de $\{ f, g, h \}$.

h) Trouvez la plus grande borne inférieure de $\{ f, g, h \}$, si elle existe.

33. Répondez à ces questions pour le poset $(\{3, 5, 9, 15, 24, 45\}, |)$.

a) Trouvez les éléments maximaux.

b) Trouvez les éléments minimaux.

c) Y a-t-il un élément majeur?

d) Y a-t-il un moindre élément?

Dans les exercices 25 à 27, répertoriez toutes les paires ordonnées dans l'ordre partiel avec le diagramme de Hasse qui l'accompagne.

25.

c *ré*

b

une

26.

e *ré*

b *c*

une

27.

ré *e* *F*

g

b *une* *c*

28. Quelle est la relation de couverture de la commande partielle $\{ (a, b) \mid a$ divise $b \}$ sur $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$?

29. Quelle est la relation de couverture de l'ordonnance partielle-ing $\{ (A, B) \mid A \subseteq B \}$ sur l'ensemble de puissance de S, où $S = \{ a, b, c \}$?

30. Quelle est la relation de couverture de la commande partielle de le poset de classes de sécurité défini dans l'exemple 25?

31. Montrer qu'un poset fini peut être reconstruit à partir de sa relation ering. [*Astuce:* montrer que le poset est le réflexe fermeture transitive de sa relation de couverture.]

32. Répondez à ces questions pour la commande partielle représentée par ce diagramme de Hasse.

l *m*

j *k*

je *h* *g*

ré *e* *F*

une *b* *c*

a) Trouvez les éléments maximaux.

b) Trouvez les éléments minimaux.

c) Y a-t-il un élément majeur?

e) Trouvez toutes les limites supérieures de $\{3, 5\}$.

f) Trouvez la borne supérieure la moins élevée de $\{3, 5\}$, si elle existe.

g) Trouvez toutes les bornes inférieures de $\{15, 45\}$.

h) Trouvez la plus grande borne inférieure de $\{15, 45\}$, si elle existe.

34. Répondez à ces questions pour le poset $(\{2, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 48, 60, 72\}, \mid)$.

a) Trouvez les éléments maximaux.

b) Trouvez les éléments minimaux.

c) Y a-t-il un élément majeur?

d) Y a-t-il un moindre élément?

e) Trouvez toutes les limites supérieures de $\{2, 9\}$.

f) Trouvez la borne supérieure la moins haute de $\{2, 9\}$, si elle existe.

g) Trouvez toutes les bornes inférieures de $\{60, 72\}$.

h) Trouvez la plus grande borne inférieure de $\{60, 72\}$, si elle existe.

35. Répondez à ces questions pour le poset $(\{\{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}, \subseteq)$.

a) Trouvez les éléments maximaux.

b) Trouvez les éléments minimaux.

c) Y a-t-il un élément majeur?

d) Y a-t-il un moindre élément?

e) Trouvez toutes les limites supérieures de $\{\{2\}, \{4\}\}$.

f) Trouvez la borne supérieure la moins élevée de $\{\{2\}, \{4\}\}$, si elle existe.

g) Trouvez toutes les limites inférieures de $\{\{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$.

h) Trouver la plus grande borne inférieure de $\{\{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$, s'il existe.

36. Donnez un poset qui a

a) un élément minimal mais pas d'élément maximal.

b) un élément maximal mais pas d'élément minimal.

c) ni un élément maximal ni un élément minimal.

37. Montrer que l'ordre lexicographique est un ordre partiel sur la Produit cartésien de deux posets.

38. Montrer que l'ordre lexicographique est un ordre partiel sur la ensemble de chaînes d'un poset.

39. Supposons que $(S, \wedge_1)$ et $(T, \wedge_2)$ soient des posets. Montre CA $(S \times T, \wedge)$ est un poset où $(s, t) \wedge (u, v)$ si et seulement si $s \wedge_1 u$ et $t \wedge_2 v$.

40. a) Montrer qu'il existe exactement un des plus grands éléments d'un poset, si un tel élément existe.

b) Montrer qu'il existe exactement un élément au moins d'un poset, si un tel élément existe.

41. a) Montrer qu'il y a exactement un élément maximal dans un

∗ **49.** Montrer que l'ensemble de toutes les partitions d'un ensemble S avec le lation $P_1 \wedge P_2$ si la partition P_1 est un raffinement de la la partition P_2 est un réseau. (Voir le préambule de l'exercice 49 de la section 9.5.)

50. Montrez que chaque ensemble totalement ordonné est un réseau.

poset avec un plus grand élément.

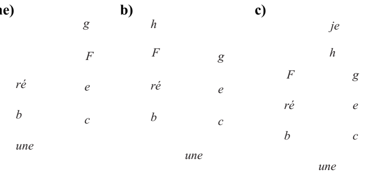
b) Montrer qu'il y a exactement un élément minimal dans un poset avec un moindre élément.

42. a) Montrer que la plus petite borne supérieure d'un ensemble dans un poset est unique s'il existe.

b) Montrer que la plus grande borne inférieure d'un ensemble dans un poset est unique s'il existe.

43. Déterminer si les posets avec ces diagrammes de Hasse sont des réseaux.

une) **b)** **c)**



44. Déterminez si ces posets sont des réseaux.

a) $(\{1, 3, 6, 9, 12\}, |)$ **b)** $(\{1, 5, 25, 125\}, |)$

c) $(\mathbf{Z}, \geq)$

d) $(P(S), \supseteq)$, où $P(S)$ est l'ensemble de puissance d'un ensemble S

45. Montrez que chaque sous-ensemble fini non vide d'un réseau a un la borne inférieure la plus basse et la borne inférieure la plus grande.

46. Montrer que si le poset (S, R) est un réseau, alors le dual le poset (S, R^{-1}) est également un réseau.

47. Dans une entreprise, le modèle de réseau de flux d'information est utilisé contrôler les informations sensibles avec des classes de sécurité ressentis par des paires ordonnées (A, C). Ici A est une autorité niveau, qui peut être non propriétaire (0), propriétaire (1), restreint (2) ou enregistré (3). Une catégorie C est un sous-ensemble de l'ensemble de tous les projets { *Cheetah, Impala, Puma* }. (Des noms des animaux sont souvent utilisés comme noms de code pour les projets entreprises.)

a) Les informations peuvent-elles découler de (*Propriétaire* , { *Cheetah, Puma* }) dans (*Restreint* , { *Puma* })?

b) Les informations peuvent-elles découler de (*restreintes* , { *Cheetah* }) dans (*Enregistré* , { *Cheetah, Impala* })?

c) Dans quelles classes les informations proviennent-elles (*propriétaire* , { *Cheetah, Puma* }) autorisé à couler?

d) De quelles classes les informations peuvent-elles découler dans la classe de sécurité (*Restreint* , { *Impala, Puma* })?

48. Montrer que l'ensemble S des classes de sécurité (A, C) est un réseau, où A est un entier positif représentant une autorité la classe et C est un sous-ensemble d'un ensemble fini de compartiments, avec $(A_1, C_1) \wedge (A_2, C_2)$ si et seulement si $A_1 \leq A_2$ et $C_1 \subseteq C_2$. [*Indice:* montrez d'abord que $(S, \wedge)$ est un poset puis montrent que la borne la moins haute et la borne inférieure la plus grande de (A_1, C_1) et (A_2, C_2) sont $(\max(A_1, A_2), C_1 \cup C_2)$ et $(\min(A_1, A_2), C_1 \cap C_2)$, respectivement.]

51. Montrer que chaque réseau fini a un moindre élément et un le plus grand élément.

52. Donnez un exemple de réseau infini avec

a) ni le moindre ni le plus grand élément.

b) un élément le moins important mais pas le plus important.

c) un élément le plus important mais non le moindre.

d) à la fois le moins et le plus grand élément.

53. Vérifiez que $(\mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+, \wedge)$ est un ensemble bien ordonné, où ^ est un ordre lexicographique, tel que revendiqué dans l'exemple 8.

54. Déterminez si chacun de ces posets est bien ordonné.

a) $(S, \leq)$, où $S = \{10, 11, 12, \ldots\}$

b) $(\mathbf{Q} \cap [0, 1], \leq)$ (l'ensemble des nombres rationnels entre 0 et 1 inclus)

c) $(S, \leq)$, où S est l'ensemble des nombres rationnels positifs avec des dénominateurs n'excédant pas 3

d) $(\mathbf{Z}^-, \geq)$, où $\mathbf{Z}^-$ est l'ensemble des entiers négatifs

Un poset $(R, \wedge)$ est **bien fondé** s'il n'y a pas de décroissante des éléments dans le poset, c'est-à-dire des éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tels que $\cdots \prec x_n \prec \cdots \prec x_2 \prec x_1$. Un poset $(R, \wedge)$ est **dense** si pour tout $x \in S$ et $y \in S$ avec $x \prec y$, il y a est un élément $z \in R$ tel que $x \prec z \prec y$.

55. Montrer que le poset $(\mathbf{Z}, \wedge)$, où $x \prec y$ si et seulement si $|x| < |y|$ est bien fondé mais n'est pas un ensemble totalement ordonné.

56. Montrer qu'un poset dense avec au moins deux éléments qui sont comparables n'est pas bien fondée.

57. Montrer que le poset de nombres rationnels avec l'habituel La relation «inférieur ou égal à» $(\mathbf{Q}, \leq)$ est un poset dense.

∗ **58.** Montrez que l'ensemble des chaînes de lettres anglaises en minuscules teurs à ordre lexicographique ne sont ni fondés ni dense.

59. Montrer qu'un poset est bien ordonné si et seulement s'il est totalement ordonné et bien fondé.

60. Montrer qu'un poset fini non vide a un élément maximal.

61. Trouver une commande totale compatible pour le poset avec le Hasse schéma illustré dans l'exercice 32.

62. Trouver un ordre total compatible pour la relation de divisibilité sur le plateau $\{1, 2, 3, 6, 8, 12, 24, 36\}$.

63. Trouver toutes les commandes totales compatibles pour le poset $(\{1, 2, 4, 5, 12, 20\}, |)$ de l'exemple 26.

64. Trouver toutes les commandes totales compatibles pour le poset avec le Diagramme de Hasse dans l'exercice 27.

65. Trouvez toutes les commandes possibles pour terminer les tâches dans le projet de développement dans l'exemple 27.

66. Planifiez les tâches nécessaires à la construction d'une maison en spécifiant leur ordre, si le diagramme de Hasse représentant ces tâches est comme indiqué sur la figure.

Achèvement
Agencements intérieurs
Luminaires extérieurs
Moquette
Peinture intérieure
Sol
Peinture d'extérieur
Panneau mural
Plomberie
Câblage
Revêtement extérieur
Toit
Encadrement
Fondation

67. Trouver un ordre des tâches d'un projet logiciel si le diagramme de Hasse pour les tâches du projet est comme indiqué.

Achèvement
test
test
Développer le module A
Intégrer des modules
Développer le module B
Écrire Documentation
Développer le module C
Développer un système exigences
Installer sites de test
Écrire les exigences fonctionnelles
Déterminer les besoins des utilisateurs

Termes et résultats clés

TERMES

relation binaire de A à B : un sous-ensemble de $A \times B$

relation sur A : une relation binaire de A à lui-même (c'est-à-dire un sous-ensemble de $A \times A$)

$S \circ R$: composite de R et S

R^{-1} : relation inverse de R

R^n : n ème puissance de R

réflexive: une relation R sur A est réflexive si $(a, a) \in R$ pour tout $a \in A$

symétrique: une relation R sur A est symétrique si $(b, a) \in R$ quand-toujours $(a, b) \in R$

antisymétrique: une relation R sur A est antisymétrique si $a = b$ chaque fois que $(a, b) \in R$ et $(b, a) \in R$

transitive: une relation R sur A est transitive si $(a, b) \in R$ et $(b, c) \in R$ implique que $(a, c) \in R$

Relation n -aire sur $A_1, A_2, ..., A_n$: un sous-ensemble de $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$

modèle de données relationnelles: un modèle de représentation des bases de tion n relations -aire

clé primaire: domaine d'une relation n -aire tel qu'un n -le tuple est uniquement déterminé par sa valeur pour ce domaine

clé composite: le produit cartésien des domaines d'un n -aire relation telle qu'un n- tuple est uniquement déterminé par son valeurs dans ces domaines

opérateur de sélection: une fonction qui sélectionne les n -tuples dans un relation n -aire qui satisfait une condition spécifiée

projection: une fonction qui produit des relations de plus petite partir d'une relation n -aire en supprimant des champs

rejoindre: une fonction qui combine des relations n -aires qui s'accordent sur certains domaines

graphe ou digraphe dirigé: un ensemble d'éléments appelés sommets et des paires ordonnées de ces éléments, appelées arêtes

boucle: un bord de la forme (a, a)

fermeture d'une relation R par rapport à un bien P: la lation S (si elle existe) qui contient R , a la propriété **P** , et est contenue dans toute relation qui contient R et a propriété **P**

chemin dans un digraphe: une suite d'arêtes $(a, x_1), (x_1, x_2), ..., (x_{n-2}, x_{n-1}), (x_{n-1}, b)$ de telle sorte que le sommet terminal de chaque arête est le sommet initial de l'arête suivante dans la séquence séquence

circuit (ou cycle) dans un digraphe: un chemin qui commence et se termine à le même sommet

R^* (relation de connectivité): la relation composée de ceux paires ordonnées (a, b) telles qu'il existe un chemin de a à b

relation d'équivalence: une réflexion, symétrique et transitive relation

équivalent: si R est une relation d'équivalence, a est équivalent à b si aRb

$[a]_R$ (classe d'équivalence de a par rapport à R): l'ensemble de tous éléments de A équivalents à un

$[a]_m$ (classe de congruence modulo m): l'ensemble des entiers con-gruent à un modulo m

partition d'un ensemble S : une collection de paires non vides disjointes sous-ensembles qui ont S comme union

ordre partiel: relation réflexive, antisymétrique, et transitive

poset (S, R): un ensemble S et un ordre partiel R sur cet ensemble

comparables: les éléments a et b du poset $(A, \wedge)$ sont comparable si $a \wedge b$ ou $b \wedge a$

incomparable: éléments d'un poset qui ne sont pas comparables

ordre total (ou linéaire): un ordre partiel pour lequel chaque paire d'éléments sont comparables

ensemble ordonné totalement (ou linéairement): un poset avec un total (ou linéaire) commande

ensemble bien ordonné: un poset $(S, \wedge)$, où $\wedge$ est un ordre total et chaque sous-ensemble non vide de S a un moindre élément

ordre lexicographique: un ordre partiel des produits cartésiens ou cordes

Diagramme de Hasse: une représentation graphique d'un poset où boucles et toutes les arêtes résultant de la propriété transitive ne sont pas représentés et la direction des bords est indiquée par la position des sommets

élément maximal: un élément d'un poset qui n'est pas inférieur à tout autre élément du poset

élément minimal: élément d'un poset qui n'est pas supérieur à tout autre élément du poset

plus grand élément: un élément d'un poset plus grand que tous les autres éléments de cet ensemble

moindre élément: un élément d'un poset moins que tous les autres éléments dans cet ensemble

limite supérieure d'un ensemble: un élément dans un poset supérieur à tous d'autres éléments de l'ensemble

borne inférieure d'un ensemble: un élément dans un poset moins que tous les autres éléments de l'ensemble

moins la limite supérieure d'un ensemble: une limite supérieure de l'ensemble qui est moins que toutes les autres limites supérieures

plus grande limite inférieure d'un ensemble: une limite inférieure de l'ensemble qui est supérieur à toutes les autres bornes inférieures

treillis: un ensemble partiellement ordonné dans lequel tous les deux éléments ont une plus grande limite inférieure et une moins haute limite

commande totale compatible pour une commande partielle: une dering qui contient l'ordre partiel donné

tri topologique: la construction d'une compatibilité de commande ible avec une commande partielle donnée

RÉSULTATS

La fermeture réflexive d'une relation R sur l'ensemble A est égale à R ∪, où = { (a, a) | $a \in A$ }.

La fermeture symétrique d'une relation R sur l'ensemble A est égale à $R \cup R^{-1}$, où R^{-1} = { (b, a) | $(a, b) \in R$ }.

La fermeture transitive d'une relation est égale à la connectivité lation formée à partir de cette relation.

L'algorithme de Warshall pour trouver la fermeture transitive d'un lation

Soit R une relation d'équivalence. Puis les trois suivants les instructions sont équivalentes: (1) aRb ; (2) $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$; (3) $[a]_R = [b]_R$.

Les classes d'équivalence d'une relation d'équivalence sur un ensemble A former une cloison de A . Inversement, une relation d'équivalence peut être construit à partir de n'importe quelle partition de sorte que l'équivalence les classes sont les sous-ensembles de la partition.

Le principe d'une induction bien ordonnée

L'algorithme de tri topologique

Questions de révision

1. a) Qu'est-ce qu'une relation sur un ensemble?

b) Combien de relations y a-t-il sur un ensemble avec n éléments?

2. a) Qu'est-ce qu'une relation réflexive?

b) Qu'est-ce qu'une relation symétrique?

c) Qu'est-ce qu'une relation antisymétrique?

d) Qu'est-ce qu'une relation transitive?

3. Donnez un exemple de relation sur l'ensemble {1 , 2 , 3 , 4} qui est

a) réflexif, symétrique et non transitif.

b) non réflexif, symétrique et transitif.

c) réflexive, antisymétrique et non transitive.

d) réflexif, symétrique et transitif.

e) réflexive, antisymétrique et transitive.

4. a) Combien y a-t-il de relations réflexives sur un ensemble avec n éléments?

b) Combien de relations symétriques y a-t-il sur un ensemble avec n éléments?

c) Combien de relations antisymétriques y a-t-il sur un ensemble avec n éléments?

5. a) Expliquez comment une relation n -aire peut être utilisée pour représenter informations sur les étudiants d'une université.

b) Comment la relation 5-aire contenant les noms des élèves dentistes, leurs adresses, numéros de téléphone, majors et utiliser des moyennes ponctuelles pour former une relation à 3 aires contenant les noms des étudiants, de leurs majors et leurs moyennes pondérées?

c) Comment la relation à 4 aires contenant les noms des élèves dents, leurs adresses, numéros de téléphone et majors et la relation à 4 aires contenant les noms des élèves, leur nombre d'étudiants, les majors et les numéros de crédit heures soient combinées en une seule relation n -aire?

6. a) Expliquez comment utiliser une matrice zéro-un pour représenter un relation sur un ensemble fini.

b) Expliquez comment utiliser la matrice zéro-un représentant un relation pour déterminer si la relation est réflexive, symétrique et / ou antisymétrique.

7. a) Expliquez comment utiliser un graphique dirigé pour représenter un lation sur un ensemble fini.

b) Expliquez comment utiliser le graphique dirigé représentant un relation pour déterminer si une relation est réflexive, symétrique et / ou antisymétrique.

8. a) Définir la fermeture réflexive et la fermeture symétrique d'une relation.

b) Comment construire la fermeture réflexive d'une relation tion?

c) Comment pouvez-vous construire la fermeture symétrique d'un lation?

d) Trouver la fermeture réflexive et la fermeture symétrique de la relation { (1 , 2), (2 , 3), (2 , 4), (3 , 1) } sur l'ensemble {1 , 2 , 3 , 4}.

9. a) Définissez la fermeture transitive d'une relation.

b) La fermeture transitive d'une relation peut-elle être obtenue par y compris toutes les paires (a, c) telles que (a, b) et (b, c) soient longtemps à la relation?

c) Décrire deux algorithmes pour trouver le clot transitif sûr d'une relation.

d) Trouver la fermeture transitive de la relation {(1,1) , (1,3) , (2,1) , (2,3) , (2,4) , (3,2) , (3,4) , (4,1)}.

10. a) Définissez une relation d'équivalence.

b) Quelles relations sur l'ensemble { *a, b, c, d* } sont équivalentes relations et contiennent (*a, b*) et (*b, d*)?

11. a) Montrer que la congruence modulo *m* est une équivalence chaque fois que *m* est un entier positif.

b) Montrer que la relation $\{ (a, b) \mid a \equiv \pm b \ (\bmod 7) \}$ est un relation d'équivalence sur l'ensemble des entiers.

12. a) Quelles sont les classes d'équivalence d'un équivalent lation?

b) Quelles sont les classes d'équivalence des «congruents relation modulo 5 ”?

c) Quelles sont les classes d'équivalence de l'équivalence relation à la question 11 b)?

13. Expliquer la relation entre les relations d'équivalence sur un ensemble et des partitions de cet ensemble.

14. a) Définissez une commande partielle.

b) Montrer que la relation de divisibilité sur l'ensemble des positifs entiers est un ordre partiel.

15. Expliquez comment les commandes partielles sur les ensembles A_1 et A_2 peuvent être utilisé pour définir un ordre partiel sur l'ensemble $A_1 \times A_2$.

16. a) Expliquez comment construire le diagramme de Hasse d'un commander sur un ensemble fini.

b) Tracer le diagramme de Hasse de la relation de divisibilité sur l'ensemble {2 , 3 , 5 , 9 , 12 , 15 , 18}.

17. a) Définir un élément maximal d'un poset et le plus grand élément d'un poset.

b) Donnez un exemple de poset qui a trois valeurs maximales éléments.

c) Donnez un exemple de poset avec le plus grand élément.

18. a) Définissez un réseau.

b) Donnez un exemple de poset à cinq éléments qui est un réseau et un exemple de poset à cinq éléments ce n'est pas un réseau.

19. a) Montrer que chaque sous-ensemble fini d'un réseau a le plus grand borne inférieure et au moins borne supérieure.

b) Montrer que chaque réseau avec un nombre fini d'éléments a un moindre élément et un plus grand élément.

20. a) Définissez un ensemble bien ordonné.

b) Décrire un algorithme pour produire un totalement ordonné ensemble compatible avec un ensemble donné partiellement ordonné.

c) Expliquez comment l'algorithme de (b) peut être utilisé pour-der les tâches dans un projet si les tâches sont effectuées une à la fois et chaque tâche ne peut être effectuée qu'après un ou plusieurs les autres tâches sont terminées.

Exercices supplémentaires

1. Soit *S* l'ensemble de toutes les chaînes de lettres anglaises. Déterminer si ces relations sont réflexives, irréflexives, symétriques, rique, antisymétrique et / ou transitive.

a) $R_1 = \{ (a, b) \mid a$ et b n'ont pas de lettres en commun}

b) $R_2 = \{ (a, b) \mid a$ et b n'ont pas la même longueur}

c) $R_3 = \{ (a, b) \mid a$ est plus long que b }

2. Construire une relation sur l'ensemble { *a, b, c, d* } qui est

a) réflexif, symétrique, mais non transitif.

b) irréflexif, symétrique et transitif.

c) irréflexif, antisymétrique et non transitif.

d) réflexif, ni symétrique ni antisymétrique, et transitif.

e) ni réflexif, ni réfléchi, ni symétrique, ni antisymétrique rique, ni transitif.

3. Montrer que la relation *R* sur **Z** × **Z** définie par $(a, b)\ R\ (c, d)$ si et seulement si $a + d = b + c$ est un équivalent relation de lence.

4. Montrer qu'un sous-ensemble d'une relation antisymétrique est également antisymétrique.

5. Soit *R* soit une relation réflexive sur un ensemble *A* . Montrez que $R \subseteq R_2$.

6. Supposons que R_1 et R_2 sont des relations réflexives sur un ensemble *A* . Montrer que $R_1 \oplus R_2$ est irréflexif.

7. Supposons que R_1 et R_2 sont des relations réflexives sur un ensemble *A* . Est - $R_1 \cap R_2$ a également réfléchi? Est - $R_1 \cup R_2$ a également réfléchi?

8. Supposons que *R* est une relation symétrique sur un ensemble *A* . Est *R* aussi symétrique?

9. Soit R_1 et R_2 des relations symétriques. Est-ce que $R_1 \cap R_2$ est également symétrique? Est - $R_1 \cup R_2$ aussi symétrique?

10. Une relation *R* est appelée **circulaire** si *aRb* et *bRc* impliquent que *cRa* . Montrer que *R* est réflexif et circulaire si et seulement si c'est une relation d'équivalence.

11. Montrer qu'une clé primaire dans une relation *n* -ary est une clé primaire clé dans toute projection de cette relation qui contient cette clé comme l'un de ses domaines.

12. La clé primaire d'une relation *n* -aire est-elle aussi une clé dans une relation plus large obtenue en prenant la jointure de cette relation avec une seconde relation?

13. Montrer que la fermeture réflexive de la fermeture symétrique d'une relation est la même que la fermeture symétrique de son fermeture réfléchissante.

14. Soit *R* la relation sur l'ensemble de tous les mathématiciens qui contient la paire ordonnée *(a, b)* si et seulement si *a* et *b* ont écrit ensemble un article mathématique publié.

a) Décris la relation R_2 .

b) Décrivez la relation R_* .

c) Le **nombre Erd˝os** d'un mathématicien est 1 si cela mathématicien a écrit un article avec le prolifique mathématicien garian Paul Erd˝os, il est 2 si ce math-ematician n'a pas écrit un document conjoint avec Erd˝os mais a écrit un document conjoint avec quelqu'un qui a écrit un document conjoint papier avec Erd˝os, et ainsi de suite (sauf que les Erd˝os Erd˝os lui-même est de 0). Donnez une définition du Nombre Erd˝os en termes de chemins dans *R* .

15. a) Donnez un exemple pour montrer que la fermeture transitive de la fermeture symétrique d'une relation n'est pas néces- tout comme la fermeture symétrique du transitif clôture de cette relation.

b) Montrer, cependant, que la fermeture transitive du sym- la fermeture métrique d'une relation doit contenir la symétrie fermeture de la fermeture transitive de cette relation.

16. a) Soit S l'ensemble des sous-programmes d'un programme informatique gramme. Définir la relation R par **P** R **Q** si le sous-programme **P** appelle le sous-programme **Q** lors de son exécution. Décrire le fermeture transitive de R .

b) Pour ce qui subroutines **P** fait (**P** , **P**) appartiennent à la fermeture transitive de R ?

c) Décrire la fermeture réflexive de la fermeture transitive de R .

17. Supposons que R et S soient des relations sur un ensemble A avec $R \subseteq S$ de sorte que les fermetures de R et S *en ce* qui concerne un La propriété **P** existe tous les deux. Montrer que la fermeture de R avec respect à **P** est un sous - ensemble de la fermeture de S par rapport à **P** .

18. Montrer que la fermeture symétrique de l'union de deux représentants lations est l'union de leurs fermetures symétriques.

∗ **19.** Concevoir un algorithme, basé sur le concept de ver- qui trouve la longueur du plus long chemin entre deux sommets dans un graphique dirigé, ou détermine qu'il y a chemins arbitrairement longs entre ces sommets.

20. Laquelle de ces relations d'équivalence sur l'ensemble de tous gens?

a) { (x, y) | x et y ont le même signe du zodiaque}

b) { (x, y) | x et y sont nés la même année}

c) { (x, y) | x et y étaient dans la même ville}

∗ **21.** Combien de relations d'équivalence différentes avec exactement trois classes d'équivalence différentes sont là sur un ensemble avec Cinq éléments?

22. Montrez que { $(x, y) \mid x - y \in \mathbf{Q}$ } est une relation d'équivalence sur l'ensemble des nombres réels, où **Q** désigne l'ensemble des nombres rationnels. Que sont [1], [$\frac{1}{2}$], et [π]?

23. Supposons que $P_1 = \{ A_1, A_2, ..., A_m \}$ et $P_2 = \{ B_1, B_2, ..., B_n \}$ sont les deux partitions de l'ensemble S . Spectacle que la collection de sous-ensembles non vides du formulaire $A_i \cap B_j$ est une partition de S qui est un raffinement des deux P_1 et P_2 (voir le préambule de l'exercice 49 de la section 9.5).

∗ **24.** Montrer que la fermeture transitive de la fermeture symétrique de la fermeture réflexive d'une relation R est la plus petite relation d'équivalence qui contient R .

25. Soit **R** (S) l'ensemble de tous les rapports sur un ensemble S . Définir les relation ^ sur **R** (S) par R_1 ^ R_2 si $R_1 \subseteq R_2$, où R_1 et R_2 sont des relations sur S . Montrez que (**R** (S), ^) est un poset.

26. Soit **P** (S) l'ensemble de toutes les partitions de l'ensemble S . Définir les relation ^ sur **P** (S) par P_1 ^ P_2 si P_1 est un raffinement de P_2 (voir l'exercice 49 de la section 9.5). Montrez que (**P** (S), ^) est un poset.

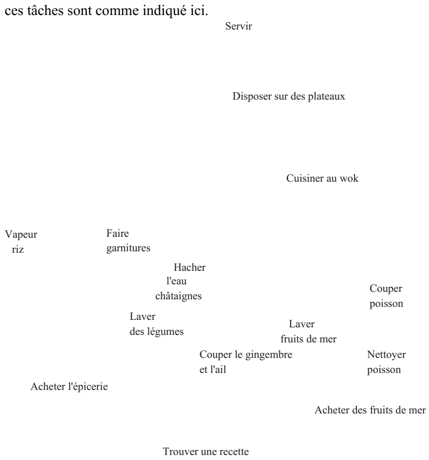
PAUL ERD˝OS (1913–1996) Paul Erd˝os, né à Budapest, en Hongrie, était le fils de deux élèves de lycée. professeurs de matiques. C'était un enfant prodige; à 3 ans, il pouvait multiplier les nombres à trois chiffres dans sa tête et à 4 ans il découvert des nombres négatifs par lui-même. Parce que sa mère ne voulait pas l'exposer à des maladies contagieuses, il était principalement scolarisé à domicile. À 17 ans, Erd˝os entra à l'Université d'E˝otv˝os, où il obtint un doctorat quatre ans plus tard. en mathématiques. Après avoir obtenu son diplôme, il a passé quatre ans à Manchester, en Angleterre, dans le cadre d'une bourse postdoctorale. Dans 1938, il se rend aux États-Unis en raison de la situation politique difficile en Hongrie, en particulier pour les Juifs. Il a passé une grande partie de son temps aux États-Unis, sauf de 1954 à 1962, où il a été interdit dans le cadre du paranoïa de l'ère McCarthy. Il a également passé un temps considérable en Israël.

Erd˝os a apporté de nombreuses contributions importantes à la combinatoire et à la théorie des nombres. Une des découvertes dont il était le plus fier est sa preuve élémentaire (en ce sens qu'elle n'utilise aucune analyse complexe) du nombre premier théorème, qui fournit une estimation du nombre de nombres premiers ne dépassant pas un entier positif fixe. Il a également participé à la développement moderne de la théorie de Ramsey.

Erd˝os a beaucoup voyagé à travers le monde pour travailler avec d'autres mathématiciens, visiter des conférences, des universités et laboratoires de recherche. Il n'avait pas de domicile permanent. Il se consacre presque entièrement aux mathématiques, voyageant d'une maticien à l'autre, proclamant «Mon cerveau est ouvert». Erd˝os était l'auteur ou le co-auteur de plus de 1500 articles et avait plus de 500 coauteurs. Des copies de ses articles sont conservées par Ron Graham, un célèbre mathématicien discret avec qui il a collaboré. largement et qui a pris soin de beaucoup de ses besoins matériels.

Erd˝os a offert des récompenses, allant de 10 $ à 10 000 $, pour la solution de problèmes qu'il a trouvés particulièrement intéressants, avec taille de la récompense en fonction de la difficulté du problème. Il a payé près de 4000 $. Erd˝os avait sa propre langue spéciale, en utilisant des termes tels que «epsilon» (enfant), «patron» (femme), «esclave» (homme), «capturé» (marié), «libéré» (divorcé), «Fasciste suprême» (Dieu), «Sam» (États-Unis) et «Joe» (Union soviétique). Bien qu'il soit curieux de beaucoup de choses, il a concentré presque tout son énergie sur la recherche mathématique. Il n'avait aucun passe-temps et aucun emploi à temps plein. Il ne s'est jamais marié et est apparemment resté célibataire. Erd˝os était extrêmement généreux, donnant une grande partie de l'argent qu'il a collecté à partir de prix, récompenses et allocations pour des bourses et à causes valables. Il voyageait extrêmement légèrement et n'aimait pas avoir beaucoup de biens matériels.

27. Planifiez les tâches nécessaires pour cuisiner un repas chinois en précisant leur ordre, si le diagramme de Hasse représentant ces tâches sont comme indiqué ici.



Un sous-ensemble d'un poset tel que tous les deux éléments de ce sous-ensemble sont comparables est appelé une **chaîne** . Un sous-ensemble d'un poset est appelé une **antichaine** si tous les deux éléments de ce sous-ensemble sont incomparable.

28. Trouver toutes les chaînes dans les posets avec les diagrammes de Hasse illustré dans les exercices 25 à 27 de la section 9.6.

29. Trouver toutes les antichaines dans les posets avec les diagrammes de Hasse illustré dans les exercices 25 à 27 de la section 9.6.

30. Trouver une antichaine avec le plus grand nombre d'éléments dans le poset avec le diagramme de Hasse de l'exercice 32 Section 9.6.

31. Montrer que chaque chaîne maximale dans un poset fini $(S, \preccurlyeq)$ contient un élément minimal de S . (Une chaîne maximale est un chaîne qui n'est pas un sous-ensemble d'une chaîne plus grande.)

∗∗ **32.** Montrer que chaque poset fini peut être partitionné en k chaînes, où k est le plus grand nombre d'éléments dans un antichain dans ce poset.

∗ **33.** Montrez que dans tout groupe de $mn + 1$ personnes il y a soit un liste de $m + 1$ personnes où une personne dans la liste (sauf pour la première personne répertoriée) est un descendant de la personne précédente sur la liste, ou il y a $n + 1$ personnes de sorte qu'aucun des ces personnes sont des descendants de l'une des n autres personnes. [*Astuce:* utilisez l'exercice 32.]

Supposons que $(S, \preccurlyeq)$ est un ensemble partiellement ordonné bien fondé. Le *principe d'une induction bien fondée* stipule que $P(x)$ est vrai pour tout $x \in S$ si $\forall x\, (\forall y\, (y \prec x \rightarrow P(y)) \rightarrow P(x))$.

34. Montrer qu'aucun cas de base distinct n'est nécessaire pour le principe principe d'une induction bien fondée. Autrement dit, $P(u)$ est vrai pour tous les éléments minimaux u dans S si $\forall x\, (\forall y\, (y \prec x \rightarrow P(y)) \rightarrow P(x))$.

∗ **35.** Montrer que le principe d'une induction bien fondée est valable.

Une relation R sur un ensemble A est un **quasi-ordre** sur A si R est réflexive et transitive.

36. Soit R la relation sur l'ensemble de toutes les fonctions de $\mathbf{Z}^+$ à $\mathbf{Z}^+$ tel que (f, g) appartient à R si et seulement si f est $O(g)$. Montrez que R est un quasi-ordre.

37. Soit R soit un quasi-commande sur un ensemble A . Montrer que $R \cap R^{-1}$ est une relation d'équivalence.

∗ **38.** Soit R un quasi-ordre et S soit la relation sur le ensemble de classes d'équivalence de $R \cap R^{-1}$ tel que (C, D) appartient à S , où C et D sont des classes d'équivalence de R , si et seulement s'il y a des éléments c de C et d de D de telle sorte que (c, d) appartient à R . Montrer que S est un partiel commande.

Soit L un treillis. Définir les opérations de **rencontre** (∧) et de **jointure** (∨) par $x \wedge y = \mathrm{glb}\,(x, y)$ et $x \vee y = \mathrm{lub}\,(x, y)$.

39. Montrer que les propriétés suivantes valent pour tous les éléments x , y et z d'un réseau L .

a) $x \wedge y = y \wedge x$ et $x \vee y = y \vee x$ **(commutatif lois)**

b) $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$ et $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ **(lois associatives)**

c) $x \wedge (x \vee y) = x$ et $x \vee (x \wedge y) = x$ **(absorption lois)**

d) $x \wedge x = x$ et $x \vee x = x$ **(lois idempotentes)**

40. Montrer que si x et y sont des éléments d'un réseau L , alors $x \vee y = y$ si et seulement si $x \wedge y = x$.

Un réseau L est **borné** s'il a à la fois une **limite supérieure** , dénotée par 1, telle que $x \preccurlyeq 1$ pour tout $x \in L$ et une **borne inférieure** , notée 0, tel que $0 \preccurlyeq x$ pour tout $x \in L$.

41. Montrer que si L est un réseau borné avec une borne supérieure 1 et borne inférieure 0 alors ces propriétés valent pour tous éléments $x \in L$.

a) $x \vee 1 = 1$ **b)** $x \wedge 1 = x$

c) $x \vee 0 = x$ **d)** $x \wedge 0 = 0$

42. Montrez que chaque réseau fini est borné.

Un réseau est appelé **distributif** si $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ et $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ pour tous les x , y et z dans L .

∗ **43.** Donnez un exemple d'un réseau qui n'est pas distributif.

44. Montrer que le réseau $(P(S), \subseteq)$ où $P(S)$ est la puissance l'ensemble d'un ensemble fini S est distributif.

45. Le réseau $(\mathbf{Z}^+, |)$ distributif?

Le **complément** d'un élément a d'un réseau borné L avec borne supérieure 1 et borne inférieure 0 est un élément b tel que $a \vee b = 1$ et $a \wedge b = 0$. Un tel réseau est **complété** si chaque élément du réseau a un complément.

46. Donnez un exemple de réseau fini où au moins un élément a plus d'un complément et au moins un complément l'élément n'a pas de complément.

47. Montrer que le réseau $(P(S), \subseteq)$ où $P(S)$ est la puissance l'ensemble d'un ensemble fini S est complété.

∗ **48.** Montrer que si L est un réseau distributif fini, alors un élément ment de L a au plus un complément.

Le jeu de Chomp, présenté dans l'exemple 12 de la section 1.8, peut être généralisé pour jouer sur n'importe quel ensemble fini partiellement ordonné $(S, \preceq)$ avec un moindre élément a . Dans ce jeu, un coup consiste à sélectionner un élément x dans S et supprimer x et tous les éléments plus grand que ce à partir de S . Le perdant est le joueur qui est obligé de sélectionnez le moindre élément a .

49. Montrez que le jeu de Chomp avec cookies organisé en une grille rectangulaire $m \times n$, décrite à l'exemple 12 dans Section 1.8, est le même que le jeu de Chomp sur le poset $(S, |)$, où S est l'ensemble de tous les entiers positifs qui diviser $p^{m-1} q^{n-1}$, où p et q sont des nombres premiers distincts.

50. Montrer que si $(S, \preceq)$ a un plus grand élément b , alors un win- Il existe une stratégie de programmation pour Chomp sur ce poset. [*Indice:* Generalize l'argument de l'exemple 12 de la section 1.8.]

Projets informatiques

Écrivez des programmes avec ces entrées et sorties.

1. Étant donné la matrice représentant une relation sur un ensemble fini, déterminer si la relation est réflexive et / ou irréflexive.

2. Étant donné la matrice représentant une relation sur un ensemble fini, déterminer si la relation est symétrique et / ou anti-symétrique.

3. Étant donné la matrice représentant une relation sur un ensemble fini, déterminer si la relation est transitive.

4. Étant donné un entier positif n , afficher toutes les relations sur un ensemble avec n éléments.

∗ **5.** Étant donné un entier positif n , déterminez le nombre de relations positives sur un ensemble de n éléments.

∗ **6.** Étant donné un entier positif n , déterminez le nombre d'équivalents relations de référence sur un ensemble de n éléments.

∗ **7.** Étant donné un entier positif n , afficher toutes les équivalences sur l'ensemble des n plus petits entiers positifs.

8. Étant donné une relation n -aire, trouver la projection de cette relation lorsque les champs spécifiés sont supprimés.

9. Étant donné une relation m -ary et une relation n -ary, et un ensemble de domaines communs, trouver la jonction de ces relations dans le respect à ces domaines communs.

10. Étant donné la matrice représentant une relation sur un ensemble fini, trouver la matrice représentant la fermeture réflexive de cette relation.

11. Étant donné la matrice représentant une relation sur un ensemble fini, trouver la matrice représentant la fermeture symétrique de cette relation.

12. Étant donné la matrice représentant une relation sur un ensemble fini, trouver la matrice représentant la fermeture transitive de cette relation en calculant la jointure des puissances booléennes de la matrice représentant la relation.

13. Étant donné la matrice représentant une relation sur un ensemble fini, trouver la matrice représentant la fermeture transitive de cette relation utilisant l'algorithme de Warshall.

14. Étant donné la matrice représentant une relation sur un ensemble fini, trouver la matrice représentant la plus petite relation d'équivalence contenant cette relation.

15. Étant donné une commande partielle sur un ensemble fini, trouver une commande totale compatible avec le tri topologique.

Calculs et explorations

Utilisez un ou plusieurs programmes informatiques que vous avez écrits pour effectuer ces exercices.

1. Affichez toutes les différentes relations sur un ensemble de quatre éléments ments.

2. Affichez toutes les différentes relations réflexives et symétriques sur un ensemble à six éléments.

3. Afficher toutes les relations réflexives et transitives sur un ensemble avec cinq éléments.

∗ **4.** Déterminer le nombre de relations transitives sur un ensemble avec n éléments pour tous les entiers positifs n avec $n \leq 7$.

5. Trouvez la clôture transitive d'une relation de votre choix sur un ensemble d'au moins 20 éléments. Soit utiliser une relation qui correspond à des liaisons directes dans un transport particulier ou réseau de communication ou utiliser un généré de façon aléatoire relation.

6. Calculez le nombre de relations d'équivalence différentes sur un ensemble avec n éléments pour tous les entiers positifs n ne dépassant pas 20.

7. Affichez toutes les relations d'équivalence sur un ensemble de sept éléments.

∗ **8.** Affichez toutes les commandes partielles sur un ensemble à cinq éléments.

∗ **9.** Affichez tous les réseaux sur un ensemble de cinq éléments.

Projets d'écriture

Répondez à ces questions par des essais en utilisant des sources extérieures.

1. Discutez du concept d'une relation floue. Comment sont flous relations utilisées?

2. Décrire les principes de base des bases de données relationnelles, allant au-delà de ce qui était couvert dans la section 9.2. Combien largement utilisées sont des bases de données relationnelles par rapport à d'autres types de bases de données?

3. Recherchez les documents originaux de Warshall et de Roy (en Français) dans lequel ils développent des algorithmes pour trouver fermetures positives. Discutez de leurs approches. Pourquoi tu supposons que ce que nous appelons l'algorithme de Warshall était couvert indépendamment par plus d'une personne?

4. Décrire comment les classes d'équivalence peuvent être utilisées pour définir les nombres rationnels en tant que classes de paires d'entiers et comment les opérations arithmétiques de base sur les nombres rationnels peut être défini en suivant cette approche. (Voir exercice 40 dans la section 9.5.)

5. Expliquez comment Helmut Hasse a utilisé ce que nous appelons maintenant Hasse diagrammes.

6. Décrivez certains des mécanismes utilisés pour faire respecter politiques de flux d'informations dans les systèmes d'exploitation informatiques.

7. Discuter de l'utilisation de l'évaluation et de l'examen du programme Technique (PERT) pour planifier les tâches d'un grand projet complexe. Dans quelle mesure le PERT est-il utilisé?

8. Discutez de l'utilisation de la méthode du chemin critique (CPM) pour trouver le délai le plus court pour l'achèvement d'un projet. Comment le CPM est-il largement utilisé?

9. Discutez du concept de *dualité* dans un réseau. Expliquer comment la dualité peut être utilisée pour établir de nouveaux résultats.

10. Expliquez ce que l'on entend par *réseau modulaire* . Décris certaines des propriétés des réseaux modulaires et décrire comment les réseaux modulaires apparaissent dans l'étude des ométrie.

CHAPITRE

Graphiques

10.1 Graphiques et Modèles graphiques

10.2 Graphique Terminologie et spécial Types de Graphiques

10.3 Représenter Graphiques et Graphique Isomorphisme

10.4 Connectivité

10.5 Euler et Hamilton Chemins

10.6 Chemin le plus court Problèmes

10.7 Graphes planaires

10.8 Graphique Coloration

Les raphs sont des structures discrètes constituées de sommets et d'arêtes qui relient ces sommets. Il existe différents types de graphiques, selon que les bords ont des directions, plusieurs arêtes peuvent connecter la même paire de sommets et déterminer si les boucles sont autorisées.Problèmes dans presque toutes les disciplines imaginables peuvent être résolus à l'aide de modèles graphiques.Nous donnerons des exemples pour illustrer comment les graphiques sont utilisés comme modèles dans divers domaines.Par exemple, nous montrerons comment graphiques sont utilisés pour représenter la concurrence de différentes espèces dans une niche écologique, les graphiques sont utilisés pour représenter qui influence qui dans une organisation et comment les graphiques sont utilisés pour représenter les résultats des tournois à tour de rôle.Nous décrirons comment les graphiques peuvent être utilisés pour modéliser les relations entre les gens, la collaboration entre les chercheurs, les appels téléphoniques entre les numéros de téléphone et les liens entre les sites Web.Nous montrerons comment les graphiques peuvent être utilisés pour modéliser des feuilles de route et l'attribution d'emplois aux employés d'une organisation.

En utilisant des modèles graphiques, nous pouvons déterminer s'il est possible de marcher dans toutes les rues dans une ville sans descendre deux fois dans une rue, et on peut trouver le nombre de couleurs nécessaires pour colorie les régions d'une carte. Des graphiques peuvent être utilisés pour déterminer si un circuit peut être sur un circuit imprimé planaire. On peut distinguer deux composés chimiques avec le même formule moléculaire mais structures différentes à l'aide de graphiques. Nous pouvons déterminer si deux les ordinateurs sont connectés par une liaison de communication à l'aide de modèles graphiques de réseaux informatiques. Les graphiques avec des poids attribués à leurs bords peuvent être utilisés pour résoudre des problèmes tels que la recherche du chemin le plus court entre deux villes d'un réseau de transport.Nous pouvons également utiliser des graphiques pour planifier examens et attribuer des chaînes aux stations de télévision.Ce chapitre présentera les concepts de base de la théorie des graphes et présentent de nombreux modèles de graphes différentsPour résoudre la grande variété de problèmes qui peuvent être étudiés à l'aide de graphes, nous introduirons de nombreux algorithmes de graphes différents.Nous allons étudient également la complexité de ces algorithmes.

Graphes et modèles de graphiques

Nous commençons par la définition d'un graphe.

DÉFINITION 1 Un *graphe* $G = (V, E)$ *se* compose de V, un ensemble non vide de *sommets* (ou *nœuds*) et E, un ensemble de *bords* . Chaque arête est associée à un ou deux sommets, appelés ses *extrémités* . Un On dit que le bord *connecte* ses extrémités.

Remarque: L'ensemble des sommets V d'un graphe G peut être infini. Un graphique avec un sommet infini ensemble ou un nombre infini d'arêtes est appelé un **graphique infini** , et en comparaison, un graphique avec un ensemble de sommets finis et un ensemble d'arêtes finies sont appelés un **graphe fini** . Dans ce livre, nous allons généralement ne considérez que les graphes finis.

Supposons maintenant qu'un réseau soit composé de centres de données et de liens de communication entre des ordinateurs. Nous pouvons représenter l'emplacement de chaque centre de données par un point et chaque communication lien par un segment de ligne, comme le montre la figure 1.

Ce réseau informatique peut être modélisé à l'aide d'un graphe dans lequel les sommets du graphe représentent les centres de données et les bords représentent les liens de communication. En général, nous visualisons

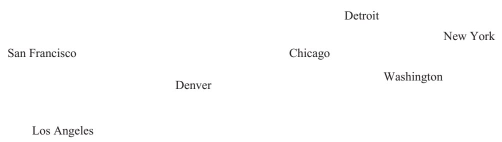
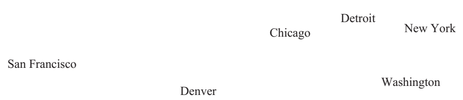


FIGURE 1 Un réseau informatique.

des graphiques en utilisant des points pour représenter des sommets et des segments de ligne, éventuellement courbes, pour représenter arêtes, où les extrémités d'un segment de ligne représentant une arête sont les points représentant les extrémités du bord. Lorsque nous dessinons un graphique, nous essayons généralement de dessiner des bords pour qu'ils pas traverser. Cependant, cela n'est pas nécessaire car toute représentation utilisant des points pour représenter des sommets et toute forme de connexion entre les sommets peut être utilisée. En effet, il y a des graphiques qui ne peut pas être dessiné dans le plan sans croisement des bords (voir Section 10.7) Le point clé est que la façon dont nous dessinons un graphique est arbitraire, tant que les connexions correctes entre les sommets sont représenté.

Notez que chaque bord du graphique représentant ce réseau informatique relie deux différents sommets. Autrement dit, aucune arête ne relie un sommet à lui-même. De plus, aucun bord différent ne se connecte la même paire de sommets. Un graphique dans lequel chaque arête relie deux sommets différents et où pas deux arêtes relient la même paire de sommets est appelé un **simple graphe** . Notez que dans un simple graphique, chaque arête est associée à une paire de sommets non ordonnée, et aucune autre arête n'est associée à ce même bord. Par conséquent, quand il y a un bord d'un graphe simple associé à $\{u, v\}$, on peut aussi dire, sans confusion possible, que $\{u, v\}$ est un bord du graphe.

Un réseau informatique peut contenir plusieurs liaisons entre les centres de données, comme le montre la figure 2. Pour modéliser de tels réseaux, nous avons besoin de graphiques qui ont plus d'un bord reliant le même paire de sommets. Les graphiques qui peuvent avoir **plusieurs arêtes** reliant les mêmes sommets sont appelés **multigraphes** . Lorsqu'il y a m arêtes différentes associées à la même paire de sommets non ordonnée $\{u, v\}$, on dit aussi que $\{u, v\}$ est une arête de multiplicité m . Autrement dit, nous pouvons penser à cet ensemble de bords comme m différentes copies d'un bord $\{u, v\}$.



Los Angeles

FIGURE 2 **Un réseau informatique avec plusieurs liaisons entre les centres de données.**

Parfois, un lien de communication relie un centre de données à lui-même, peut-être un retour boucle à des fins de diagnostic. Un tel réseau est illustré à la figure 3. Pour modéliser ce réseau, nous

Detroit
Chicago
New York

San Francisco

Denver
Washington

Los Angeles

FIGURE 3 **Un réseau informatique avec des liens de diagnostic.**

Detroit
Chicago
New York

San Francisco

Washington
Denver

Los Angeles

FIGURE 4 **Un réseau de communication avec des liaisons de communication unidirectionnelles.**

doivent inclure des arêtes qui relient un sommet à lui-même. De tels bords sont appelés **boucles** , et parfois nous pouvons même avoir plus d'une boucle à un sommet. Graphes pouvant inclure des boucles, et éventuellement plusieurs arêtes reliant la même paire de sommets ou un sommet à lui-même, sont parfois appelées **pseudographes** .

Jusqu'à présent, les graphiques que nous avons introduits sont des **graphiques non orientés** . Leurs bords sont également dit à ne pas **diriger** . Cependant, pour construire un modèle de graphe, nous pouvons trouver nécessaire d'attribuer directions vers les bords d'un graphique. Par exemple, dans un réseau informatique, certaines liaisons peuvent fonctionner dans une seule direction (ces liaisons sont appelées lignes duplex simples). Cela peut être le cas s'il y a une grande quantité de trafic envoyée vers certains centres de données, avec peu ou pas de trafic allant à l'opposé direction. Un tel réseau est illustré à la figure 4.

Pour modéliser un tel réseau informatique, nous utilisons un graphe orienté. Chaque bord d'un graphique dirigé est associé à une paire ordonnée. La définition du graphe orienté que nous donnons ici est plus générale que celui que nous avons utilisé au chapitre 9, où nous avons utilisé des graphiques dirigés pour représenter les relations.

DÉFINITION 2 Un *graphe orienté* (ou *digraphe*) *(V, E) se* compose d'un ensemble non vide de sommets *V* et d'un ensemble de *bords dirigés* (ou *arcs*) *E* . Chaque arête dirigée est associée à une paire ordonnée de sommets. On dit que le bord dirigé associé à la paire ordonnée (*u, v*) *commence* à *u* et se *termine* à *v* .

Lorsque nous représentons un graphique dirigé avec un dessin au trait, nous utilisons une flèche pointant de *u* à *v* vers indiquer la direction d'un bord qui commence à *u* et se termine à *v* . Un graphe orienté peut contenir des boucles et il peut contenir plusieurs arêtes dirigées qui commencent et se terminent aux mêmes sommets. Un graphique orienté peut également contenir des arêtes dirigées qui relient les sommets *u* et *v* dans les deux directions; c'est-à-dire lorsqu'un le digraphe contient une arête de *u* à *v* , il peut également contenir une ou plusieurs arêtes de *v* à *u* . Notez que nous obtenons un graphe orienté lorsque nous attribuons une direction à chaque arête dans un graphe non orienté. Quand un graphe orienté n'a pas de boucles et n'a pas de bords dirigés multiples, il est appelé un **simple orienté graphique** . Parce qu'un simple graphique dirigé a au plus un bord associé à chaque paire ordonnée des sommets *(u, v)* , on appelle *(u, v)* une arête s'il y a une arête qui lui est associée dans le graphe.

Dans certains réseaux informatiques, plusieurs liaisons de communication entre deux centres de données peuvent être présent, comme illustré à la figure 5. Graphes dirigés pouvant avoir **plusieurs bords dirigés** d'un sommet à un deuxième sommet (éventuellement le même) sont utilisés pour modéliser de tels réseaux. Nous avons appelé ces graphiques **dirigent des multigraphes** . Lorsqu'il y a *m* arêtes dirigées, chacune associée à un paire de sommets ordonnés *(u, v)* , on dit que *(u, v)* est une arête de **multiplicité** *m* .

Detroit
Chicago
New York
San Francisco
Washington
Denver
Los Angeles

FIGURE 5 **Un réseau informatique avec plusieurs liaisons unidirectionnelles.**

TABLEAU 1 **Terminologie des graphes.**

Type	*Bords*	*Plusieurs bords autorisés?*	*Boucles autorisées?*
Graphique simple	Indirect	Non	Non
Multigraph	Indirect	Oui	Non
Pseudographe	Indirect	Oui	Oui
Graphique dirigé simple	Réalisé	Non	Non
Multigraphie dirigée	Réalisé	Oui	Oui
Graphique mixte	Dirigé et non dirigé	Oui	Oui

Pour certains modèles, nous pouvons avoir besoin d'un graphique où certaines arêtes ne sont pas orientées, tandis que d'autres sont dirigé. Un graphique avec des bords orientés et non orientés est appelé **graphique mixte** . Par exemple, un graphique mixte peut être utilisé pour modéliser un réseau informatique contenant des liens qui fonctionnent dans les deux directions et autres liaisons qui ne fonctionnent que dans une seule direction.

Cette terminologie pour les différents types de graphiques est résumée dans le tableau 1. Nous allons utilisent parfois le terme **graphique** comme un terme général pour décrire des graphiques avec des bords dirigés ou non dirigés (ou les deux), avec ou sans boucles, et avec ou sans arêtes multiples. À d'autres moments, lorsque le le contexte est clair, nous utiliserons le terme graphique pour ne faire référence qu'aux graphiques non orientés.

En raison de l'intérêt relativement moderne de la théorie des graphes et de son application à un une grande variété de disciplines, de nombreuses terminologies différentes de la théorie des graphes ont été introduites. Le lecteur doit déterminer comment ces termes sont utilisés chaque fois qu'ils sont rencontrés.

La terminologie utilisée par les mathématiciens pour décrire les graphiques est de plus en plus standardisée, mais la terminologie utilisée pour discuter des graphiques lorsqu'ils sont utilisés dans d'autres disciplines est encore assez varié. Bien que la terminologie utilisée pour décrire les graphiques puisse varier, trois questions clés peuvent aidez-nous à comprendre la structure d'un graphique:

- Les bords du graphique sont-ils non orientés ou dirigés (ou les deux)?
- Si le graphique n'est pas orienté, plusieurs arêtes sont-elles présentes qui relient la même paire de sommets? Si le graphique est orienté, plusieurs arêtes orientées sont-elles présentes?
- Des boucles sont-elles présentes?

Répondre à de telles questions nous aide à comprendre les graphiques. Il est moins important de se rappeler terminologie particulière utilisée.

Modèles graphiques

Les graphiques sont utilisés dans une grande variété de modèles. Nous avons commencé cette section en décrivant comment construire modèles graphiques de réseaux de communication reliant les centres de données. Nous compléterons cette section en décrivant divers modèles de graphes pour certaines applications intéressantes. Nous reviendrons à bon nombre de ces applications plus loin dans ce chapitre et au chapitre 11. Nous présenterons des modèles de graphiques dans les sections suivantes de ce chapitre et des suivants. Rappelez-vous également que le graphique dirigé modèles pour certaines applications ont été présentés au chapitre 9. Lorsque nous construisons un modèle de graphe, nous nous devons nous assurer que nous avons correctement répondu aux trois questions clés que nous avons posées structure d'un graphe.

Pouvez-vous trouver un sujet quelle théorie des graphes a pas été appliqué?

RÉSEAUX SOCIAUX Les graphiques sont largement utilisés pour modéliser les structures sociales en différents types de relations entre des personnes ou des groupes de personnes. Ces structures sociales et Les graphiques qui les représentent sont connus sous le nom **de réseaux sociaux** . Dans ces modèles graphiques, les individus ou les organisations sont représentées par des sommets; relations entre individus ou organisations sont représentés par des arêtes. L'étude des réseaux sociaux est une discipline multidisciplinaire extrêmement active et de nombreux types de relations entre les personnes ont été étudiés en les utilisant.

Page 267

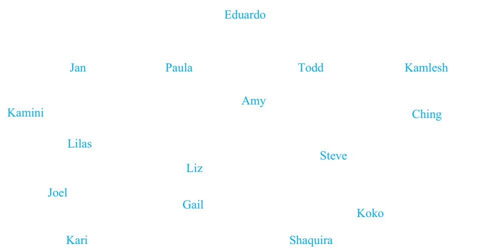


FIGURE 6 **Un graphique de connaissances.**

FIGURE 7 **Un graphique d'influence.**

Nous présenterons ici certains des réseaux sociaux les plus étudiés. Plus d'information sur les réseaux sociaux se trouvent dans [Ne10] et [EaKl10].

EXEMPLE 1 **Graphiques de connaissance et d'amitié** Nous pouvons utiliser un graphique simple pour deux personnes se connaissent, c'est-à-dire si elles se connaissent ou si elles sont amies (soit dans le monde réel dans le monde virtuel via un site de réseautage social tel que Facebook). Chaque personne d'un groupe particulier de personnes est représentée par un sommet. Un bord non orienté est utilisé pour connecter deux personnes lorsque ces personnes se connaissent, quand nous ne sommes concernés avec connaissance, ou s'ils sont amis. Pas de bords multiples et généralement pas de boucles utilisé. (Si nous voulons inclure la notion de connaissance de soi, nous inclurions des boucles.) Un petit graphique de connaissance est illustré à la figure 6. Le graphique de connaissance de toutes les personnes le monde compte plus de six milliards de sommets et probablement plus d'un billion d'arêtes. Nous allons discutez ce graphique plus en détail à la section 10.4. ▲

EXEMPLE 2: **Graphes d'influence** Dans les études de comportement de groupe, on observe que certaines personnes peuvent influencer la pensée des autres. Un graphe orienté appelé graphe d'**influence** peut être utilisé pour modéliser ce comportement. Chaque personne du groupe est représentée par un sommet. Il y a un bord dirigé de sommet *a* à sommet *b* lorsque la personne représentée par le sommet *a* peut influencer la personne représentée par le sommet *b* . Ce graphique ne contient pas de boucles et ne contient pas de plusieurs arêtes dirigées. Un exemple de graphique d'influence pour les membres d'un groupe est illustré à la figure 7. Dans le groupe modélisée par ce graphique d'influence, Deborah ne peut pas être influencée, mais elle peut influencer Brian, Fred et Linda. Yvonne et Brian peuvent également s'influencer mutuellement. ▲

EXEMPLE 3 **Graphiques de collaboration** Un **graphique de collaboration** est utilisé pour modéliser les réseaux sociaux où deux les gens sont liés en travaillant ensemble d'une manière particulière. Les graphiques de collaboration sont simples graphiques, car les bords de ces graphiques ne sont pas orientés et il n'y a pas de bords ou de boucles multiples Sommets dans ces graphiques représentent des personnes; deux personnes sont reliées par un bord non orienté lorsque le les gens ont collaboré. Il n'y a pas de boucles ni de bords multiples dans ces graphiques. Le **Hollywood graphe** est un graphe collaborateur qui représente les acteurs par des sommets et relie deux acteurs avec un avantage s'ils ont travaillé ensemble sur un film ou une émission de télévision. Le graphe hollywoodien est un énorme graphique avec plus de 1,5 million de sommets (début 2011). Nous discuterons de certains aspects du graphique Hollywood plus loin dans la section 10.4.

Dans un **graphique de collaboration académique** , les sommets représentent des personnes (peut-être membres d'une certaine communauté universitaire), et les bords relient deux personnes s'ils ont publié conjointement un document. Le graphique de collaboration pour les personnes qui ont publié des articles de recherche en mathématiques a été trouvé en 2004 pour avoir plus de 400 000 sommets et 675 000 arêtes, et ces chiffres ont considérablement augmenté depuis lors. Nous aurons plus à dire sur ce graphique dans la section 10.4. Des graphiques de collaboration ont également été utilisés dans le sport, où deux athlètes professionnels sont avoir collaboré s'ils ont déjà joué dans la même équipe au cours d'une saison régulière de leur sport. ▲

RÉSEAUX DE COMMUNICATION Nous pouvons modéliser différents réseaux de communication en utilisant sommets pour représenter les périphériques et bords pour représenter le type particulier de liaisons de communication d'intérêt. Nous avons déjà modélisé un réseau de données dans la première partie de cette section.

EXEMPLE 4 **Graphes d'appels Les graphiques** peuvent être utilisés pour modéliser les appels téléphoniques passés dans un réseau, comme réseau téléphonique à distance. En particulier, un multigraph dirigé peut être utilisé pour modéliser les appels où chaque numéro de téléphone est représenté par un sommet et chaque appel téléphonique est représenté par un bord dirigé. Le bord représentant un appel commence au numéro de téléphone à partir duquel l'appel a été effectué et se termine au numéro de téléphone auquel l'appel a été effectué. Nous avons besoin de bords dirigés parce que la direction dans laquelle l'appel est fait est importante.Nous avons besoin de plusieurs bords dirigés car nous voulons représenter chaque appel effectué à partir d'un numéro de téléphone particulier vers un deuxième numéro.

Un petit graphique des appels téléphoniques est affiché sur la figure 8 (a), représentant sept Nombres. Ce graphique montre, par exemple, que trois appels ont été effectués depuis le 732-555-1234 au 732-555-9876 et deux dans l'autre sens, mais aucun appel n'a été fait du 732-555-4444 à l'un des six autres numéros sauf le 732-555-0011. Lorsque nous nous soucions seulement de savoir s'il y a eu un appel reliant deux numéros de téléphone, nous utilisons un graphique non orienté avec une connexion de bord numéros de téléphone lorsqu'il y a eu un appel entre ces numéros. Cette version de l'appel graphique est affiché dans la figure 8 (b).

Les graphiques d'appel qui modélisent les activités d'appel réelles peuvent être énormes.Par exemple, un graphique d'appel étudié chez AT&T, qui modélise les appels pendant 20 jours, compte environ 290 millions de sommets et 4 milliards bords. Nous discuterons des graphiques d'appel plus loin dans la section 10.4. ▲

RÉSEAUX D'INFORMATION Les graphiques peuvent être utilisés pour modéliser divers réseaux qui relient certains types d'informations. Ici, nous allons décrire comment modéliser le World Wide Web en utilisant un graphique. Nous décrirons également comment utiliser un graphique pour modéliser les citations dans différents types de documents.

EXEMPLE 5 **Le graphique Web** Le World Wide Web peut être modélisé comme un graphique dirigé où chaque site Web la page est représentée par un sommet et où un bord commence à la page Web *a* et se termine à la Page Web *b* s'il y a un lien sur *un* pointant vers *b* . Parce que de nouvelles pages Web sont créées et d'autres supprimé quelque part sur le Web presque toutes les secondes, le graphique Web change presque base continue. Beaucoup de gens étudient les propriétés du graphique Web pour mieux comprendre la nature du Web. Nous reviendrons aux graphiques Web dans la section 10.4, et dans le chapitre 11 nous expliquer comment le graphique Web est utilisé par les robots d'indexation Web que les moteurs de recherche utilisent pour créer des index de pages Web. ▲

EXEMPLE 6 **Graphes de citation Les graphiques** peuvent être utilisés pour représenter des citations dans différents types de documents, y compris les articles universitaires, les brevets et les avis juridiques.Dans ces graphiques, chaque document est ressenti par un sommet, et il y a un bord d'un document à un deuxième document si le

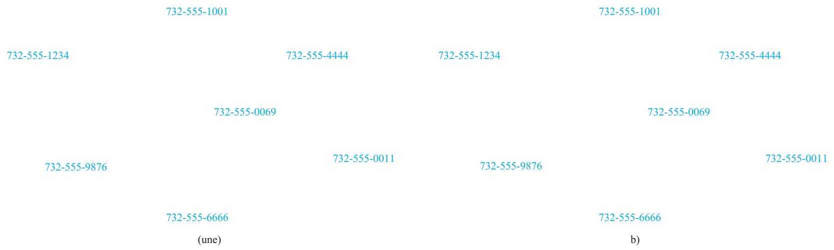


FIGURE 8 **Un graphique d'appel.**

le premier document cite le second dans sa liste de citations.(Dans un article académique, la liste des citations est le bibliographie ou liste de références; dans un brevet, c'est la liste des brevets antérieurs qui est citée; et dans un avis juridique, c'est la liste des avis précédents cités.) Un graphique de citation est un graphique dirigé sans boucles ni arêtes multiples. ▲

APPLICATIONS DE CONCEPTION DE LOGICIELS Les modèles de graphiques sont des outils utiles dans la conception de Logiciel. Nous allons décrire brièvement deux de ces modèles ici.

EXEMPLE 7 **Graphiques de dépendance de module** L'une des tâches les plus importantes dans la conception d'un logiciel est de savoir comment structurer un programme en différentes parties ou modules. Comprendre comment les différents modules de l'interaction d'un programme est essentielle non seulement pour la conception du programme, mais aussi pour les tests et la maintenance du logiciel résultant. Un **graphique de dépendance de module** fournit un outil utile pour comprendre comment les différents modules d'un programme interagissent. Dans un graphique de dépendance de programme, chaque module est représenté par un sommet. Il y a un bord dirigé d'un module vers un deuxième module si le deuxième module dépend du premier. Un exemple de graphique de dépendance de programme pour un navigateur Web est illustré à la figure 9. ▲

EXEMPLE 8 **Graphes de priorité et traitement simultané** Les programmes informatiques peuvent être exécutés plus rapidement en exécutant certaines instructions simultanément. Il est important de ne pas exécuter une instruction cela nécessite des résultats d'instructions non encore exécutées. La dépendance des déclarations par rapport aux précédentes les instructions peuvent être représentées par un graphique dirigé. Chaque instruction est représentée par un sommet, et il y a un bord d'une instruction à une deuxième instruction si la deuxième instruction ne peut pas être exécuté avant la première instruction. Ce graphe résultant est appelé **graphe de priorité** . UNE programme informatique et son graphique sont affichés dans la figure 10. Par exemple, le graphique montre que l'instruction S_5 ne peut pas être exécutée avant l'exécution des instructions S_1 , S_2 et S_4 . ▲

RÉSEAUX DE TRANSPORT Nous pouvons utiliser des graphiques pour modéliser de nombreux types les réseaux de transport, y compris les réseaux routier, aérien et ferroviaire, ainsi que les réseaux de navigation.

EXEMPLE 9 **Itinéraires des compagnies aériennes** Nous pouvons modéliser les réseaux des compagnies aériennes en représentant chaque aéroport par un sommetDans en particulier, nous pouvons modéliser tous les vols par une compagnie aérienne particulière chaque jour en utilisant un bord dirigé représenter chaque vol, du sommet représentant l'aéroport de départ au sommet représentant l'aéroport de destination. Le graphique résultant sera généralement un multigraph dirigé, car il peut y avoir plusieurs vols d'un aéroport à un autre aéroport au cours de la même journée. ▲

EXEMPLE 10 **Réseaux de routes Les** graphiques peuvent être utilisés pour modéliser des réseaux routiers. Dans ces modèles, les sommets représentent les intersections et les arêtes envoyées représentent les routes. Lorsque toutes les routes sont à double sens et qu'il y a tout au plus une route reliant deux intersections, nous pouvons utiliser un simple graphique non orienté pour modéliser la route réseau. Cependant, nous voudrons souvent modéliser les réseaux routiers lorsque certaines routes sont à sens unique et lorsqu'il peut y avoir plus d'une route entre deux intersections. Pour construire de tels modèles, nous utilisons des bords non orientés pour représenter les routes à double sens et nous utilisons des bords orientés pour représenter

principale
afficher
analyseur
protocole
abstrait arbre de syntaxe
page
réseau

FIGURE 9 **Un graphique de dépendance de module.**

S_1 $a := 0$
S_2 $b := 1$
S_3 $c := a + 1$
S_4 $d := b + a$
S_5 $e := d + 1$
S_6 $e := c + d$

S_6 S_5 S_3 S_4 S_1 S_2

FIGURE 10 **Un graphique de priorité.**

routes à sens unique. Plusieurs bords non orientés représentent plusieurs routes à double sens reliant mêmes deux intersections. Les bords dirigés multiples représentent plusieurs routes à sens unique qui commencent à une intersection et se terminent à une deuxième intersection. Les boucles représentent des routes en boucle. Les graphiques mixtes sont nécessaires pour modéliser des réseaux routiers comprenant des routes à sens unique et à double sens. ▲

RÉSEAUX BIOLOGIQUES De nombreux aspects des sciences biologiques peuvent être modélisés en utilisant graphiques.

EXEMPLE 11: Graphes de chevauchement de niche en écologie Les graphiques sont utilisés dans de nombreux modèles impliquant l'interaction de différentes espèces d'animaux. Par exemple, la compétition entre les espèces dans un écosystème peut être modélisé à l'aide d'un **graphique de chevauchement de niche** . Chaque espèce est représentée par un sommet. Un bord non dirigé relie deux sommets si les deux espèces représentées par ces sommets sont en concurrence (c'est-à-dire que certaines des ressources alimentaires qu'ils utilisent sont les mêmes). Un graphique de chevauchement de niche est un simple car aucune boucle ou plusieurs arêtes ne sont nécessaires dans ce modèle. Le graphique de la figure 11 modélise l'écosystème d'une forêt. Nous voyons sur ce graphique que les écureuils et les ratons laveurs rivalisent mais que les corbeaux et les musaraignes ne le font pas. ▲

EXEMPLE 12: Graphes d' interaction protéique Une interaction protéique dans une cellule vivante se produit lorsque deux ou plusieurs les protéines de cette cellule se lient pour remplir une fonction biologique. Parce que les interactions protéiques sont crucial pour la plupart des fonctions biologiques, de nombreux scientifiques travaillent à la découverte de nouvelles comprendre les interactions entre les protéines. Les interactions protéiques au sein d'une cellule peuvent être modélisées en utilisant un **graphique d'interaction protéique** (également appelé **réseau d'interaction protéine-protéine**), un graphique non orienté dans lequel chaque protéine est représentée par un sommet, avec un bord reliant le sommets représentant chaque paire de protéines qui interagissent. C'est un problème difficile à déterminer de véritables interactions protéiques dans une cellule, car les expériences produisent souvent de faux positifs, concluent que deux protéines interagissent alors qu'elles ne le font vraiment pas. Des graphiques d'interaction des protéines peuvent être utilisés pour déduire des informations biologiques importantes, par exemple en identifiant les protéines les plus importantes pour diverses fonctions et la fonctionnalité des protéines nouvellement découvertes.

Parce qu'il y a des milliers de protéines différentes dans une cellule typique, l'interaction des protéines Le graphe d'une cellule est extrêmement grand et complexe. Par exemple, les cellules de levure ont plus de 6 000 protéines, et plus de 80 000 interactions entre elles sont connues, et les cellules humaines ont plus de 100 000 protéines, avec peut-être jusqu'à 1 000 000 d'interactions entre elles. Des sommets et des bords supplémentaires sont ajoutés à un graphique d'interaction des protéines lorsque de nouvelles protéines et des interactions entre protéines sont découvertes. En raison de la complexité des interactions graphiques, ils sont souvent divisés en graphiques plus petits appelés modules qui représentent des protéines impliquées dans une fonction particulière d'une cellule. La figure 12 illustre un module de le graphique d'interaction des protéines décrit dans [Bo04], comprenant le complexe de protéines qui dé-ARN de qualité dans les cellules humaines. Pour en savoir plus sur les graphiques d'interaction des protéines, voir [Bo04], [Ne10], et [Hu07]. ▲

Raton laveur faucon Hibou
Opossum Écureuil corbeau
Musaraigne Souris Pivert

FIGURE 11 **Un graphique de chevauchement de niche.**

Q9Y3A5
RRP43 RRP42
RRP4 RRP41
RRP44 RRP40
PM / Sci2 RRP46

FIGURE 12 **Un module d'un graphique d'interaction des protéines.**

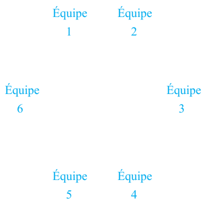


FIGURE 13 Un graphique Maquette d'un Round-Robin Tournoi.

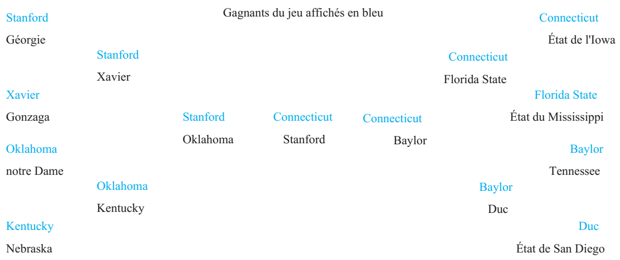


FIGURE 14 Un tournoi à élimination directe.

TOURNOIS Nous donnons maintenant quelques exemples qui montrent comment les graphiques peuvent également être modélisez différents types de tournois.

EXEMPLE 13 Tournois Round-Robin Tournoi où chaque équipe affronte exactement toutes les autres équipes une fois et aucune égalité n'est autorisée est appelé un**tournoi à la ronde** . Ces tournois peuvent être modélisé à l'aide de graphiques dirigés où chaque équipe est représentée par un sommet.Notez que *(a, b)* est un avantage si l'équipe *a* bat l'équipe *b* . Ce graphique est un graphique dirigé simple, ne contenant aucune boucle ou plusieurs bords dirigés (car il n'y a pas deux équipes qui se jouent plus d'une fois).Une telle direction le modèle graphique est présenté dans la figure 13. Nous voyons que l'équipe 1 est invaincue dans ce tournoi, et l'équipe 3 est sans victoire. ▲

EXEMPLE 14: Tournois à **élimination simple** Tournoi où chaque compétiteur est éliminé après un la perte est appelée un **tournoi à élimination directe** . Les tournois à élimination simple sont souvent utilisés dans les sports, y compris les championnats de tennis et le championnat annuel de basket-ball de la NCAAnous peut modéliser un tel tournoi en utilisant un sommet pour représenter chaque jeu et un bord dirigé pour se connecter un jeu au jeu suivant, le gagnant de ce jeu a joué. Le graphique de la figure 14 représente les matchs joués par les 16 dernières équipes du tournoi de basket-ball féminin de la NCAA en 2010.▲

Des exercices

1. Dessinez des modèles de graphique, en indiquant le type de graphique (de Table 1) utilisé, pour représenter les routes aériennes où chaque jour il y a quatre vols de Boston à Newark, deux vols de Newark à Boston, trois vols de Newark à Miami, deux vols de Miami à Newark, un vol de Newark à Detroit, deux vols de Detroit à Newark, trois vols de Newark à Washington, deux vols de Washington à Newark et un vol de Washington à Miami, avec

a) une arête entre les sommets représentant des villes qui ont un vol entre eux (dans les deux sens).

b) une arête entre les sommets représentant les villes pour chacun vol qui opère entre eux (dans les deux sens).

c) une arête entre les sommets représentant les villes pour chacun vol qui opère entre eux (dans les deux sens), plus une boucle pour un voyage touristique spécial qui décolle et atterrit à Miami.

d) un bord d'un sommet représentant une ville où un vol commence au sommet représentant la ville où elle se termine.

e) un bord pour chaque vol à partir d'un sommet représentant un ville où le vol commence au sommet représentant la ville où le vol se termine.

2. Quel type de graphique (du tableau 1) peut être utilisé pour modéliser un réseau routier entre les grandes villes où

a) il y a une arête entre les sommets représentant villes s'il y a une autoroute interétatique entre elles?

b) il y a une arête entre les sommets représentant villes pour chaque autoroute interétatique entre eux?

c) il y a une arête entre les sommets représentant villes pour chaque autoroute interétatique entre eux, et il y a une boucle au sommet représentant une ville s'il y a est une autoroute interétatique qui fait le tour de cette ville?

Pour les exercices 3 à 9, déterminez si le graphique illustré a bords dirigés ou non dirigés, qu'ils aient plusieurs bords, et s'il a une ou plusieurs boucles. Utilisez vos réponses pour déterminer le type de graphique dans le tableau 1 de ce graphique.

3. *a* *b* *c* *ré*

4. *a* *b* *c* *ré*

5. *une* *b* *c* *ré*

6. *a* *b* *e* *c* *ré*

sept. *b* *c* *une* *e* *ré*

8. *a* *e* *ré* *b* *c*

9. *une* *b* *c* *F* *e* *ré*

10. Pour chaque graphique non orienté des exercices 3 à 9 qui n'est pas simple, trouvez un ensemble de bords à retirer pour le rendre simple.

11. Soit G un simple graphe. Montrer que la relation R sur le ensemble de sommets de G tels que uRv si et seulement s'il y a est un bord associé à $\{u, v\}$ est un symétrique, irréflexif rapport sur G .

12. Soit G un graphe non orienté avec une boucle à chaque sommet. Montrer que la relation R sur l'ensemble des sommets de G tels que uRv si et seulement s'il y a un bord associé à $\{u, v\}$ est une relation symétrique, réfléchi sur G .

13. Le **graphe d'intersection** d'une collection d'ensembles A_1, A_2, ..., A_n est le graphique qui a un sommet pour chacun de ces définit et a un bord reliant les sommets représentant deux ensembles si ces ensembles ont une intersection non vide. Construct le graphe d'intersection de ces collections d'ensembles.

a) $A_1 = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $A_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $A_3 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $A_4 = \{5, 6, 7, 8, 9\}$, $A_5 = \{0, 1, 8, 9\}$

b) $A_1 = \{..., -4, -3, -2, -1, 0\}$, $A_2 = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$, $A_3 = \{..., -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, ...\}$, $A_4 = \{..., -5, -3, -1, 1, 3, 5, ...\}$, $A_5 = \{..., -6, -3, 0, 3, 6, ...\}$

c) $A_1 = \{x \mid x < 0\}$, $A_2 = \{x \mid -1 < x < 0\}$, $A_3 = \{x \mid 0 < x < 1\}$, $A_4 = \{x \mid -1 < x < 1\}$, $A_5 = \{x \mid x > -1\}$, $A_6 = \mathbf{R}$

14. Utilisez le graphique de chevauchement de niche de la figure 11 pour déterminer espèces qui rivalisent avec les faucons.

15. Construire un graphique de chevauchement de niche pour six espèces d'oiseaux, où le muguet ermite rivalise avec le merle et avec le geai bleu, le merle est également en concurrence avec le moqueur, le moqueur rivalise également avec le geai bleu, et la sittelle rivalise avec le bois velu quéquette.

16. Dessinez le graphique de connaissance qui représente que Tom et Patricia, Tom et Hope, Tom et Sandy, Tom et Amy, Tom et Marika, Jeff et Patricia, Jeff et Mary, Patricia et Hope, Amy et Hope, et Amy et Marika se connaissent, mais aucune des autres paires de personnes énumérés se connaissent.

17. Nous pouvons utiliser un graphique pour représenter si deux personnes vivant en même temps. Dessinez un tel graphique pour représenter si chaque paire de mathématiciens et d'ordinateur scientifiques avec des biographies dans les cinq premiers chapitres de ce livre mort avant 1900 était contemporain. (Supposons que deux personnes vivent en même temps si elles sont vivant au cours de la même année.)

18. Qui peut influencer Fred et qui peut influencer Fred dans le graphique d'influence dans l'exemple 2?

19. Construisez un graphique d'influence pour les membres du conseil société si le président peut influencer le directeur de la recherche et développement, le directeur du marketing et le directeur des opérations; le directeur de la recherche et Le développement peut influencer le directeur des opérations; le directeur du marketing peut influencer le directeur de Opérations; et personne ne peut influencer ou être influencé par le directeur financier.

20. Quelles autres équipes l'équipe 4 a-t-elle battues et quelles équipes ont battu L'équipe 4 du tournoi à la ronde représentée par le graphique de la figure 13?

21. Dans un tournoi à la ronde, les Tigers ont battu les Blue Jays, les Tigres ont battu les Cardinaux, les Tigres ont battu les Orioles, les Blue Jays ont battu les Cardinals, les Blue Jays ont battu les Les Orioles et les cardinaux ont battu les Orioles. Modélisez ceci résultat avec un graphique dirigé.

22. Construire le graphique des appels pour un ensemble de sept téléphones numéros 555-0011, 555-1221, 555-1333, 555-8888, 555-2222, 555-0091 et 555-1200 s'il y en avait trois appels du 555-0011 au 555-8888 et deux appels de 555-8888 au 555-0011, deux appels du 555-2222 au 555-0091, deux appels du 555-1221 à chacun des autres numéros et un appel du 555-1333 à chacun des 555-0011, 555-1221 et 555-1200.

23. Expliquez comment les deux graphiques des appels téléphoniques pour les appels effectués pendant le mois de janvier et les appels passés pendant la mois de février peut être utilisé pour déterminer la nouvelle numéros de téléphone des personnes qui ont changé de les numéros de téléphone.

24. a) Expliquez comment les graphiques peuvent être utilisés pour modéliser messages électroniques dans un réseau. Les bords doivent-ils être di- rectifié ou non dirigé? Si plusieurs bords doivent être abaissé? Les boucles devraient-elles être autorisées?

b) Décrivez un graphique qui modélise le courrier électronique envoyé dans un réseau au cours d'une semaine particulière.

25. Comment un graphique modélisant des messages électroniques envoyés réseau être utilisé pour trouver des personnes qui ont récemment changé leur adresse e-mail principale?

26. Comment un graphique qui modélise les e-mails envoyés utiliser un réseau pour trouver des listes de diffusion de courrier électronique utilisé pour envoyer le même message à de nombreux e-mails différents adresses?

27. Décrivez un modèle graphique qui représente si chaque per- fils lors d'une fête connaît le nom de chaque autre personne au fête. Les bords doivent-ils être orientés ou non orientés? Devrait plusieurs bords autorisés? Les boucles devraient-elles être autorisées?

28. Décrire un modèle graphique qui représente un système de métro dans une grande ville. Les bords doivent-ils être orientés ou non orientés? Faut-il autoriser plusieurs bords? Les boucles doivent-elles être abaissé?

29. Pour chaque cours dans une université, il peut y avoir un ou plusieurs d'autres cours qui sont ses prérequis. Comment un graphique être utilisé pour modéliser ces cours et quels cours sont pré- conditions requises pour quels cours? Les bords doivent-ils être dirigés ou non dirigé? En regardant le modèle graphique, comment pouvons-nous trouver des cours qui n'ont pas de prérequis et comment nous trouvons des cours qui ne sont la condition préalable à aucun autre cours?

30. Décrivez un modèle de graphique qui représente la recom- recommandations des critiques de cinéma, en utilisant des sommets pour envoyé à la fois ces critiques et tous les films qui sont actuellement étant montré.

31. Décrire un modèle graphique qui représente le marché traditionnel les violences entre hommes et femmes. Ce graphique a-t-il des propriétés spéciales?

32. Quelles déclarations doivent être exécutées avant que S_6 est exécuté dans le programme de l'exemple 8? (Utilisez le graphique de priorité dans la figure 10.)

33. Construisez un graphique de priorité pour le programme suivant:

$S_1 : x := 0$

$S_2 : x := x + 1$

$S_3 : y := 2$

$S_4 : z := y$

$S_5 : x := x + 2$

$S_6 : y := x + z$

$S_7 : z := 4$

34. Décrire une structure discrète basée sur un graphique qui peut être utilisé pour modéliser les itinéraires des compagnies aériennes et leurs temps de vol. [*Astuce:* Ajoutez une structure à un graphique dirigé.]

35. Décrire une structure discrète basée sur un graphique qui peut être utilisé pour modéliser les relations entre des paires d'individus dans un groupe, où chaque individu peut soit aimer, détester, ou être neutre sur un autre individu, et l'inverse la relation peut être différente. [*Astuce:* ajouter une structure à un Graphique dirigé. Traitez séparément les bords en diagonale opposée rections entre sommets représentant deux individus.]

36. Décrivez un modèle de graphique qui peut être utilisé pour représenter formes de communication électronique entre deux personnes dans un seul graphique. Quel type de graphique est nécessaire?

Terminologie des graphes et types spéciaux de graphes

introduction

Nous introduisons une partie du vocabulaire de base de la théorie des graphes dans cette section.Nous utiliserons ce vo- cabulary plus loin dans ce chapitre lorsque nous résolvons de nombreux types de problèmes différents.Un de ces problèmes consiste à déterminer si un graphique peut être dessiné dans le plan de sorte que deux de ses arêtes ne se croisent pas. Un autre exemple consiste à décider s'il existe une correspondance biunivoque entre les sommets de deux graphiques qui produit une correspondance biunivoque entre les bords des graphiques.nous présentera également plusieurs familles importantes de graphiques souvent utilisés comme exemples et dans les modèles. Plusieurs applications importantes seront décrites où ces types spéciaux de graphiques se présentent.

Terminologie de base

Tout d'abord, nous donnons une terminologie qui décrit les sommets et les bords des graphiques non orientés.

DÉFINITION 1 Deux sommets u et v dans un graphe non orienté G sont appelés *adjacents* (ou *voisins*) dans G si u et v sont des points d'extrémité d'une arête e de G . Une telle arête e est appelée *incidente avec* les sommets u et v et e sont censés *connecter* u et v .

Nous trouverons également une terminologie utile décrivant l'ensemble des sommets adjacents à un sommet particulier d'un graphique.

DÉFINITION 2 L'ensemble de tous les voisins d'un sommet v de $G = (V, E)$, noté $N(v)$, est appelé le *voisin. arrondissement* de v . Si A est un sous-ensemble de V , nous notons $N(A)$ l'ensemble de tous les sommets de G qui sont adjacente à au moins un sommet en A . Donc, $N(A) = \bigcup_{v \in A} N(v)$.

Pour garder une trace du nombre d'arêtes incidentes à un sommet, nous faisons la définition suivante.

DÉFINITION 3 Le *degré d'un sommet dans un graphe non orienté* est le nombre d'arêtes qui lui sont associées, sauf qu'une boucle à un sommet contribue deux fois au degré de ce sommet. Le degré de le sommet v est désigné par deg (v) .

EXEMPLE 1 Quels sont les degrés et quels sont les voisinages des sommets dans les graphes G et H affiché dans la figure 1?

Solution: dans G , deg $(a) = 2$, deg (b) = deg (c) = deg $(f) = 4$, deg $(d) = 1$, deg $(e) = 3$, et deg $(g) = 0$. Les voisinages de ces sommets sont $N(a) = \{b, f\}$, $N(b) = \{a, c, e, f\}$, $N(c) = \{b, d, e, f\}$, $N(d) = \{c\}$, $N(e) = \{b, c, f\}$, $N(f) = \{a, b, c, e\}$, et $N(g) = \emptyset$. Dans H , deg $(a) = 4$, deg (b) = deg $(e) = 6$, deg $(c) = 1$ et deg $(d) = 5$. Les quartiers de ces sommets sont $N(a) = \{b, d, e\}$, $N(b) = \{a, b, c, d, e\}$, $N(c) = \{b\}$, $N(d) = \{a, b, e\}$ et $N(e) = \{a, b, d\}$. ▲

b *c* *ré* *une* *b* *c*

une *F* *e* *g* *e* *ré*

g *H*

FIGURE 1 Les graphes non dirigé G et H .

Un sommet de degré zéro est appelé **isolé** . Il s'ensuit qu'un sommet isolé n'est pas adjacent à n'importe quel sommet. Le sommet g du graphique G de l'exemple 1 est isolé. Un sommet est **pendant** si et seulement s'il a le degré un. Par conséquent, un sommet pendant est adjacent à exactement un autre sommet. Le sommet d du graphique G de l'exemple 1 est pendant.

L'examen des degrés de sommets dans un modèle graphique peut fournir des informations utiles sur le modèle, comme le montre l'exemple 2.

EXEMPLE 2 Que signifie le degré d'un sommet dans un graphe de chevauchement de niche (introduit dans l'exemple 11 10.1) représentent? Quels sommets de ce graphique sont pendants et lesquels sont isolés? Utilisez le graphique de chevauchement de créneaux illustré à la figure 11 de la section 10.1 pour interpréter vos réponses.

Solution: Il existe une arête entre deux sommets dans un graphe de chevauchement de niche si et seulement si les deux les espèces représentées par ces sommets sont en compétition. Par conséquent, le degré d'un sommet dans un chevauchement de niche graphique est le nombre d'espèces dans l'écosystème qui rivalisent avec les espèces représentées par ce sommet. Un sommet est pendant si l'espèce est en concurrence avec exactement une autre espèce dans le écosystème. Enfin, le sommet représentant une espèce est isolé si cette espèce n'est pas en compétition avec toute autre espèce de l'écosystème.

Par exemple, le degré du sommet représentant l'écureuil dans le graphique de chevauchement de niche dans la figure 11 de la section 10.1 est quatre, car l'écureuil est en compétition avec quatre autres espèces: le corbeau, l'opossum, le raton laveur et le pic.Dans ce graphique de chevauchement de niche, la souris est la seule espèce représentée par un sommet pendant, car la souris ne fait concurrence qu'à la la musaraigne et toutes les autres espèces rivalisent avec au moins deux autres espèces.Il n'y a pas de sommets isolés dans le graphique dans ce graphique de chevauchement de niche, car toutes les espèces de cet écosystème sont en concurrence avec au moins une autre espèce. ▲

Qu'obtient-on en additionnant les degrés de tous les sommets d'un graphe $G = (V, E)$? Chaque arête contribue à deux à la somme des degrés des sommets car une arête est incidente avec exactement deux sommets (éventuellement égaux). Cela signifie que la somme des degrés des sommets est le double du nombre d'arêtes.Nous avons le résultat dans le théorème 1, qui est parfois appelé le théorème de prise de contact (et est également souvent connu comme le lemme de prise de contact), en raison de la analogie entre un bord ayant deux points d'extrémité et une poignée de main impliquant deux mains.

THÉORÈME 1 **LE THÉORÈME DE LA PRISE DE MAIN** Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté avec m bords. alors

$$2m = \sum_{v \in V} \deg(v).$$

(Notez que cela s'applique même si plusieurs arêtes et boucles sont présentes.)

EXEMPLE 3 Combien d'arêtes y a-t-il dans un graphique avec 10 sommets de degré six chacun?

Solution: la somme des degrés des sommets étant de $6 \cdot 10 = 60$, il s'ensuit que $2m = 60$ où m est le nombre d'arêtes. Par conséquent, $m = 30$. ▲

Le théorème 1 montre que la somme des degrés des sommets d'un graphe non orienté est paire. Ce simple fait a de nombreuses conséquences, dont l'une est donnée comme Théorème 2.

THÉORÈME 2 Un graphique non orienté a un nombre pair de sommets de degré impair.

Preuve: Soit V_1 et V_2 l'ensemble des sommets de degré pair et l'ensemble des sommets de degré impair, respectivement, dans un graphe non orienté $G = (V, E)$ avec m arêtes. alors

$$2m = \sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in V_1} \deg(v) + \sum_{v \in V_2} \deg(v).$$

Puisque deg (v) est pair pour $v \in V_1$, le premier terme dans le côté droit de la dernière égalité est même. De plus, la somme des deux termes à droite de la dernière égalité est égale, car cette somme est de $2m$. Par conséquent, le deuxième terme de la somme est également pair.Parce que tous les termes cette somme est impaire, il doit y avoir un nombre pair de tels termes. Ainsi, il existe un nombre pair de sommets de degré impair.

La terminologie des graphiques à bords dirigés reflète le fait que les bords des graphiques dirigés avoir des directions.

DÉFINITION 4 Lorsque (u, v) est un bord du graphe G à bords dirigés, u est dit *adjacent à* v et v est dit *adjacent à* u . Le sommet u est appelé le *sommet initial* de (u, v) , et v est appelé le *sommet terminal* ou *terminal* de (u, v) . Le sommet initial et le sommet terminal d'une boucle sont les même.

Étant donné que les arêtes des graphiques à arêtes dirigées sont des paires ordonnées, la définition du degré d'un sommet peut être affiné pour refléter le nombre d'arêtes avec ce sommet comme sommet initial et comme sommet terminal.

DÉFINITION 5 Dans un graphique avec des bords dirigés, le *degré d'un sommet* v , noté $\deg^-(v)$, est le nombre des arêtes avec v comme sommet terminal. Le *degré extérieur de* v , noté $\deg^+(v)$, est le nombre d'arêtes avec v comme sommet initial. (Notez qu'une boucle au sommet contribue 1 à à la fois le degré interne et le degré externe de ce sommet.)

EXEMPLE 4 Trouvez le degré en et le degré en dehors de chaque sommet dans le graphique G avec les bords dirigés montrés dans Figure 2.

une *c*

b

e *ré* *F*

g

FIGURE 2 Le graphe orienté *G* .

Solution: les degrés en G sont $\deg^-(a) = 2$, $\deg^-(b) = 2$, $\deg^-(c) = 3$, $\deg^-(d) = 2$, $\deg^-(e) = 3$ et $\deg^-(f) = 0$. Les degrés extérieurs sont $\deg^+(a) = 4$, $\deg^+(b) = 1$, $\deg^+(c) = 2$, $\deg^+(d) = 2$, $\deg^+(e) = 3$ et $\deg^+(f) = 0$. ▲

Parce que chaque arête a un sommet initial et un sommet terminal, la somme des degrés et la somme des degrés extérieurs de tous les sommets d'un graphe à arêtes dirigées est identique. Les deux ces sommes sont le nombre d'arêtes dans le graphique. Ce résultat est indiqué comme Théorème 3.

THÉORÈME 3 Soit $G = (V, E)$ un graphe à arêtes dirigées. alors

$$\sum_{v \in V} \deg^-(v) = \sum_{v \in V} \deg^+(v) = |E| .$$

Il existe de nombreuses propriétés d'un graphique avec des bords dirigés qui ne dépendent pas de la direction de ses bords. Par conséquent, il est souvent utile d'ignorer ces directions. Le graphique non orienté qui les résultats de l'ignorance des directions des bords sont appelés le **graphique sous - jacent non orienté** . Un graphique avec des arêtes dirigées et son graphique sous-jacent non orienté ont le même nombre d'arêtes.

Quelques graphiques simples spéciaux

Nous allons maintenant introduire plusieurs classes de graphes simples.Ces graphiques sont souvent utilisés comme exemples et se posent dans de nombreuses applications.

EXEMPLE 5 **Graphes complets** Un **graphique complet sur *n* sommets** , noté K_n , est un graphique simple qui contient exactement une arête entre chaque paire de sommets distincts. Les graphes K_n , pour $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, sont affichés dans la figure 3. Un graphique simple pour lequel il y a au moins un une paire de sommets distincts non reliés par une arête est appelée **non complète** .

K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_6

FIGURE 3 **Les graphiques K_n pour $1 \leq n \leq 6$.**

EXEMPLE 6 **Cycles** Un **cycle C_n** , $n \geq 3$, se compose de n sommets $v_1, v_2, \ldots, v_n$ et arêtes $\{v_1, v_2\}$, $\{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}$ et $\{v_n, v_1\}$. Les cycles C_3 , C_4 , C_5 et C_6 sont affichés dans Figure 4.

C_3 C_4 C_5 C_6

FIGURE 4 **Les cycles C_3, C_4, C_5 et C_6.**

EXEMPLE 7 **Roues** On obtient une **roue W_n** lorsque l'on ajoute un sommet supplémentaire à un cycle C_n , pour $n \geq 3$, et connectez ce nouveau sommet à chacun des n sommets de C_n , par de nouvelles arêtes. Les roues W_3 , W_4 , W_5 et W_6 sont affichés dans la figure 5.

W_3 W_4 W_5 W_6

FIGURE 5 **Les roues W_3, W_4, W_5 et W_6.**

EXEMPLE 8 ***n* -Cubes** Un **hypercube à *n* dimensions** , ou ***n* -cube** , noté Q_n , est un graphe qui a des sommets représentant le 2^n chaînes de bits de longueur n . Deux sommets sont adjacents si et seulement si les chaînes de bits qu'ils représentent diffèrent dans exactement une position de bit. Nous affichons Q_1 , Q_2 et Q_3 dans la figure 6.

Notez que vous pouvez construire le $(n + 1)$ -cube Q_{n+1} à partir du n -cube Q_n en faisant deux copies de Q_n , faisant précéder les étiquettes sur les sommets d'un 0 dans un exemplaire de Q_n et d'un 1 dans le autre copie de Q_n , et en ajoutant des arêtes reliant deux sommets qui ont des étiquettes ne différant que par le premier morceau. Dans la figure 6, Q_3 est construit à partir de Q_2 en dessinant deux copies de Q_2 en haut et faces inférieures de Q_3 , en ajoutant 0 au début de l'étiquette de chaque sommet de la face inférieure et 1 au début de l'étiquette de chaque sommet de la face supérieure.(Ici, par *visage,* nous entendons un visage de un cube dans un espace tridimensionnel. Pensez à dessiner le graphe Q_3 dans un espace tridimensionnel avec des copies de Q_2 comme faces supérieure et inférieure d'un cube, puis dessinant la projection du représentation résultante dans l'avion.) ▲

110 111

dix 11 100 101

010 011

0 1

00 01 000 001

Q_1 Q_2 Q_3

FIGURE 6 **Le *n*- cube Q_n, $n = 1, 2, 3$.**

Graphes bipartites

Parfois, un graphe a la propriété que son ensemble de sommets peut être divisé en deux sous-ensembles disjoints de telle sorte que chaque arête connecte un sommet dans l'un de ces sous-ensembles à un sommet dans l'autre sous-ensemble. Par exemple, considérons le graphique représentant les mariages entre hommes et femmes dans un village, où chaque personne est représentée par un sommet et un mariage est représenté par un bord.Dans ce graphique, chaque arête relie un sommet dans le sous-ensemble de sommets représentant les hommes et un sommet dans le sous-ensemble de sommets représentant les femmes.Cela nous amène à la définition 5.

DÉFINITION 6 Un graphe simple G est appelé *biparti* si son ensemble de sommets V peut être partitionné en deux disjoints fixe V_1 et V_2 de telle sorte que chaque arête du graphique relie un sommet dans V_1 et un sommet dans V_2 (de sorte qu'aucune arête en G *ne* relie deux sommets en V_1 ou deux sommets en V_2). Quand cela condition est vérifiée, que nous appelons la paire (V_1, V_2) une *bipartition* de l'ensemble des sommets V de G .

Dans l'exemple 9, nous montrerons que C_6 est bipartite, et dans l'exemple 10, nous montrerons que K_3 est pas bipartite.

EXEMPLE 9 C_6 est bipartite, comme le montre la figure 7, car son ensemble de sommets peut être partitionné en deux ensembles $V_1 = \{v_1, v_3, v_5\}$ et $V_2 = \{v_2, v_4, v_6\}$, et chaque arête de C_6 relie un sommet dans V_1 et un sommet en V_2 . ▲

EXEMPLE 10 K_3 n'est pas bipartite. Pour vérifier cela, notons que si nous divisons l'ensemble de sommets de K_3 en deux disjoints ensembles, l'un des deux ensembles doit contenir deux sommets. Si le graphe était biparti, ces deux sommets ne pouvait pas être connecté par une arête, mais en K_3, chaque sommet est connecté à tous les autres sommets par un bord. ▲

EXEMPLE 11 Les graphiques *G* et *H sont-ils* affichés sur la figure 8 bipartite?

V_1 V_2
v_1 v_2
v_3 v_4
v_5 v_6

FIGURE 7 montrant que C_6 est Bipartite.

une *b* *une* *b*
g *c*
F *c*
F
e *ré* *e* *ré*
g *H*

FIGURE 8 La non dirigé graphes *G* et *H* .

Solution: le graphe *G* est biparti car son ensemble de sommets est l'union de deux ensembles disjoints, {*a, b, d* } et { *c, e, f, g* }, et chaque arête relie un sommet dans l'un de ces sous-ensembles à un sommet dans l'autre sous-ensemble. (Notez que pour que *G* soit bipartite, il n'est pas nécessaire que chaque sommet de {*a, b, d* } soit adjacent à chaque sommet de { *c, e, f, g* }. Par exemple, *b* et *g* ne sont pas adjacents.)

Le graphique *H* n'est pas bipartite car son ensemble de sommets ne peut pas être partitionné en deux sous-ensembles, donc que les arêtes ne relient pas deux sommets du même sous-ensemble. (Le lecteur doit vérifier cela en considérant les sommets *a* , *b* et *f* .) ▲

Le théorème 4 fournit un critère utile pour déterminer si un graphique est bipartite.

THÉORÈME 4 Un graphique simple est bipartite si et seulement s'il est possible d'attribuer une des deux couleurs chaque sommet du graphique de sorte que deux sommets adjacents ne soient pas affectés de la même couleur.

Preuve: Tout d'abord, supposons que $G = (V, E)$ est un graphe bipartite simple. Alors $V = V_1 \cup V_2$, où V_1 et V_2 sont des ensembles disjoints et chaque arête dans *E* relie un sommet dans V_1 et un sommet dans V_2. Si nous attribuer une couleur à chaque sommet de V_1 et une deuxième couleur à chaque sommet de V_2, puis pas deux les sommets adjacents ont la même couleur.

Supposons maintenant qu'il soit possible d'assigner des couleurs aux sommets du graphique en utilisant seulement deux couleurs de sorte que deux sommets adjacents ne soient pas affectés de la même couleur. Soit V_1 l'ensemble des sommets attribué une couleur et V_2 l'ensemble des sommets affectés à l'autre couleur. Ensuite, V_1 et V_2 sont disjoints et $V = V_1 \cup V_2$. De plus, chaque arête relie un sommet en V_1 et un sommet dans V_2 car il n'y a pas deux sommets adjacents qui sont tous les deux en V_1 ou les deux en V_2. Par conséquent, *G* est bipartite.

Nous illustrons comment le théorème 4 peut être utilisé pour déterminer si un graphe est bipartite dans Exemple 12.

EXEMPLE 12 Utilisez le théorème 4 pour déterminer si les graphiques de l'exemple 11 sont bipartis.

Solution: Nous examinons d' abord le graphique G . Nous allons essayer d'attribuer l'une des deux couleurs, disons rouge et bleu, à chaque sommet de G *de* sorte qu'aucune arête de G *ne* relie un sommet rouge et un sommet bleu. Sans pour autant perte de généralité on commence par assigner arbitrairement du rouge à a . Ensuite, nous devons affecter le bleu à c , e , f et g , car chacun de ces sommets est adjacent à a . Pour éviter d'avoir un bord avec deux bleus points de terminaison, nous devons attribuer du rouge à tous les sommets adjacents à c , e , f ou g . Cela signifie que nous devons assigner du rouge à la fois à b et à d (et signifie que a doit être assigné au rouge, qu'il a déjà été). Nous avons maintenant assigné des couleurs à tous les sommets, avec a , b et d rouge et c , e , f et g bleu. En vérifiant toutes les arêtes, nous voyons que chaque arête relie un sommet rouge et un sommet bleu. Par conséquent, en Théorème 4, le graphe G est bipartite.

Ensuite, nous essaierons d'attribuer du rouge ou du bleu à chaque sommet de H afin qu'aucune arête de H relie un sommet rouge et un sommet bleu. Sans perte de généralité, nous attribuons arbitrairement le rouge à a . Ensuite, nous devons attribuer du bleu à b , e et f , car chacun est adjacent à a . Mais ce n'est pas possible parce que e et f sont adjacents, les deux ne peuvent donc pas être affectés en bleu. Cet argument montre que nous ne peut pas attribuer l'une des deux couleurs à chacun des sommets de H afin qu'aucun sommet adjacent ne soit assigné la même couleur. Il en résulte par le théorème 4 que H n'est pas bipartite. ▲

Le théorème 4 est un exemple de résultat dans la partie de la théorie des graphes connue sous le nom de colorations de graphes. La coloration des graphes est une partie importante de la théorie des graphes avec des applications importantes. Nous étudierons la coloration des graphiques plus loin dans la section 10.8.

Un autre critère utile pour déterminer si un graphe est bipartite est basé sur la notion d'un chemin, un sujet que nous étudions dans la section 10.4. Un graphe est bipartite si et seulement s'il n'est pas possible commencer à un sommet et revenir à ce sommet en parcourant un nombre impair d'arêtes distinctes. nous rendra cette notion plus précise lorsque nous discuterons des chemins et des circuits dans les graphiques de la section 10.4 (voir l'exercice 63 dans cette section).

EXEMPLE 13 **Graphes bipartites complets** Un **graphe bipartite complet** $K_{m,n}$ est un graphe qui a son sommet ensemble partitionné en deux sous-ensembles de m et n sommets, respectivement avec une arête entre deux sommets si et seulement si un sommet est dans le premier sous-ensemble et l'autre sommet est dans le deuxième sous-ensemble. Les graphiques bipartites complets $K_{2,3}$, $K_{3,3}$, $K_{3,5}$ et $K_{2,6}$ sont présentés sur la figure 9. ▲

$K_{2,3}$ $K_{3,3}$

$K_{3,5}$ $K_{2,6}$

FIGURE 9 Quelques graphiques bipartites complets.

Graphes et correspondances bipartites

Les graphiques bipartites peuvent être utilisés pour modéliser de nombreux types d'applications qui impliquent des éléments d'un ensemble aux éléments d'un autre, comme l'illustre l'exemple 14.

EXEMPLE 14 Affectations de travail Supposons qu'il y ait m employés dans un groupe et n emplois différents qui doivent être faites, où $m \geq n$. Chaque employé est formé pour effectuer un ou plusieurs de ces n emplois. nous souhaite affecter un employé à chaque poste. Pour vous aider dans cette tâche, nous pouvons utiliser un graphique pour modéliser capacités des employés. Nous représentons chaque employé par un sommet et chaque emploi par un sommet. Pour chaque employé, nous incluons un avantage de cet employé à tous les emplois que l'employé a été formés pour faire. Notez que l'ensemble de sommets de ce graphique peut être partitionné en deux ensembles disjoints, le ensemble d'employés et l'ensemble des travaux, et chaque bord connecte un employé à un travail. Par conséquent, ce graphique est bipartite, où la bipartition est (E, J) où E est l'ensemble des employés et J est l'ensemble des emplois. Nous considérons maintenant deux scénarios différents.

Supposons d'abord qu'un groupe compte quatre employés: Alvarez, Berkowitz, Chen et Davis; et supposons que quatre tâches doivent être effectuées pour terminer le projet 1: exigences, architecture, mise en œuvre et tests. Supposons qu'Alvarez ait été formé pour répondre aux exigences et essai; Berkowitz a été formé pour faire l'architecture, l'implémentation et les tests; Chen a été formé pour faire les exigences, l'architecture et la mise en œuvre; et Davis n'a été formés pour répondre aux exigences. Nous modélisons ces capacités des employés en utilisant le graphique bipartite dans Figure 10 (a).

Deuxièmement, supposons qu'un groupe possède un deuxième groupe qui compte également quatre employés: Washington, Xuan, Ybarra et Ziegler; et supposons que les quatre mêmes travaux doivent être effectués pour terminer le projet 2 sont nécessaires pour achever le projet 1. Supposons que Washington ait été formé pour faire de l'architecture; Xuan a été formé pour faire les exigences, la mise en œuvre et les tests; Ybarra a été formé faire de l'architecture; et Ziegler a été formé pour faire les exigences, l'architecture et les tests. nous modélisez ces capacités des employés à l'aide du graphique bipartite de la figure 10 (b).

Pour terminer le projet 1, nous devons affecter un employé à chaque emploi afin que chaque emploi ait un salarié qui lui est affecté, de sorte qu'aucun employé ne se voit attribuer plus d'un emploi. Nous pouvons le faire en assignant Alvarez aux tests, Berkowitz à l'implémentation, Chen à l'architecture et Davis aux exigences, comme le montre la figure 10 (a) (où les lignes bleues indiquent cette affectation des tâches).

Pour terminer le projet 2, nous devons également affecter un employé à chaque emploi afin que chaque emploi un employé qui lui est affecté et aucun employé ne se voit attribuer plus d'un emploi. Cependant, c'est

Page 281

Alvarez Berkowitz Chen Davis

test d'implémentation de l'architecture des exigences

(une)

Washington Xuan Ybarra Ziegler

test d'implémentation de l'architecture des exigences

b)

FIGURE 10 Modélisation des travaux pour lesquels les employés ont été formés.

impossible car il n'y a que deux employés, Xuan et Ziegler, qui ont été formés pour au moins un des trois travaux d'exigences, d'implémentation et de test.Par conséquent, n'est pas un moyen d'affecter trois employés différents à ces trois emplois afin que chaque emploi employé avec la formation appropriée. ▲

La recherche d'une affectation d'emplois à des employés peut être considérée comme une modèle de graphe, où un M **correspondant** dans un graphe simple $G = (V, E)$ est un sous-ensemble de l'ensemble E de arêtes du graphe telles qu'aucune arête ne soit incidente avec le même sommet.En d'autres termes, un l'appariement est un sous-ensemble d'arêtes tel que si $\{s, t\}$ et $\{u, v\}$ sont des arêtes distinctes de l'appariement, alors s, t, u et v sont distincts. Un sommet qui est le point d'extrémité d'un bord d'un M correspondant est dit être **apparié** en M ; sinon, il est dit **inégalé** . Une **correspondance maximale** est une correspondance avec le plus grand nombre d'arêtes. On dit qu'un M correspondant dans un graphe biparti $G = (V, E)$ avec bipartition (V_1, V_2) est une **correspondance complète de** V_1 **à** V_2 si chaque sommet de V_1 est le extrémité d'une arête dans la correspondance, ou de manière équivalente, si $|M| = |V_1|$. Par exemple, pour affecter des tâches aux salariés pour que le plus grand nombre d'emplois soient affectés, nous recherchons un maximum correspondance dans le graphique qui modélise les capacités des employés. Pour affecter des employés à tous les emplois, nous rechercher une correspondance complète de l'ensemble des emplois à l'ensemble des employés. Dans l'exemple 14, nous avons trouvé une correspondance complète de l'ensemble des emplois à l'ensemble des employés pour le projet 1, et cette correspondance est une correspondance maximale, et nous avons montré qu'aucune correspondance complète n'existe dans l'ensemble des travaux aux employés du projet 2.

Nous donnons maintenant un exemple de la façon dont les appariements peuvent être utilisés pour modéliser les mariages.

EXEMPLE 15 Mariages sur une île Supposons qu'il y ait m hommes et n femmes sur une île. Chaque personne a une liste de membres du sexe opposé acceptables en tant que conjoint. Nous construisons un bipartite graphe $G = (V_1, V_2)$ où V_1 est l'ensemble des hommes et V_2 est l'ensemble des femmes de sorte qu'il existe un entre un homme et une femme s'ils se trouvent acceptables en tant que conjoint.Une correspondance en ce graphique se compose d'un ensemble de bords, où chaque paire de points de terminaison d'un bord est un mari-femme paire. Un appariement maximum est un ensemble de couples mariés le plus large possible, et un appariement complet de V_1 est un ensemble de couples mariés où chaque homme est marié, mais peut-être pas toutes les femmes. ▲

CONDITIONS NÉCESSAIRES ET SUFFISANTES POUR DES MATCHS COMPLETS Nous tournons maintenant notre attention vers la question de déterminer si une correspondance complète de V_1 à V_2 existe lorsque (V_1, V_2) est une bipartition d'un graphe biparti $G = (V, E)$. Nous allons introduire un théorème qui fournit un ensemble de conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'un correspondant à. Ce théorème a été prouvé par Philip Hall en 1935.

Théorème du mariage de Hall est un exemple de théorème où évident les conditions nécessaires sont suffisant aussi.

THÉORÈME 5 **THÉORÈME DU MARIAGE DE LA SALLE** Le graphe biparti $G = (V, E)$ avec bipartition (V_1, V_2) a une correspondance complète de V_1 à V_2 si et seulement si $|N(A)| \geq |A|$ pour tous les sous-ensembles A de V_1 .

Preuve: Nous prouvons d'abord la *seule* partie du théorème. Pour ce faire, supposons qu'il existe un faire correspondre M de V_1 à V_2 . Alors, si $A \subseteq V_1$, pour chaque sommet $v \in A$, il y a une arête dans M reliant v à un sommet dans V_2 . Par conséquent, il y a au moins autant de sommets dans V_2 qui sont voisins des sommets dans V_1 car il y a des sommets dans V_1 . Il s'ensuit que $|N(A)| \geq |A|$.

Pour prouver la partie *if* du théorème, la partie la plus difficile, nous devons montrer que si

$|N(A)| \geq |A|$ pour tout $A \subseteq V_1$, il existe alors une correspondance M complète de V_1 à V_2. Nous allons utiliser une forte induction sur $|V_1|$ pour le prouver.

Étape de base: Si $|V_1| = 1$, alors V_1 contient un seul sommet v_0. Parce que $|N(\{v_0\})| \geq |\{v_0\}| = 1$, il y a au moins une arête reliant v_0 et un sommet $w_0 \in V_2$. Un tel bord forme un correspondance de V_1 à V_2.

Étape inductive: Nous *énonçons d'* abord l'hypothèse inductive.

Hypothèse inductive: Soit k un entier positif. Si $G = (V, E)$ est un graphe bipartite avec bipartition (V_1, V_2), et $|V_1| = j \leq k$, alors il y a une correspondance M complète de V_1 à V_2 chaque fois la condition que $|N(A)| \geq |A|$ pour tout $A \subseteq V_1$ est respecté.

Supposons maintenant que $H = (W, F)$ est un graphe bipartite avec bipartition (W_1, W_2) et $|W_1| = k + 1$. Nous prouverons que l'inductive tient en utilisant une preuve par cas, en utilisant deux cas. Cas *(i)* s'applique lorsque pour tous les entiers j avec $1 \leq j \leq k$, les sommets de chaque ensemble de j éléments de W_1 sont adjacent à au moins $j + 1$ éléments de W_2. Le cas *(ii)* s'applique lorsque pour certains j avec $1 \leq j \leq k$ il est un sous-ensemble de j sommets tels qu'il existe exactement j voisins de ces sommets dans W_2. Car que le cas *(i)* ou le cas *(ii) soit* valable, il suffit de considérer ces cas pour terminer l'étape inductive.

Cas (i) : Supposons que pour tous les entiers j avec $1 \leq j \leq k$, les sommets de chaque sous-ensemble de j éléments de W_1 sont adjacentes à au moins $j + 1$ éléments de W_2. Ensuite, nous sélectionnons un sommet $v \in W_1$ et un élément $w \in N(\{v\})$, qui doit exister selon notre hypothèse que $|N(\{v\}| \geq |\{v\}| = 1$. Nous supprimons v et w et tous les bords pour les incidents de H. Cela produit un graphe bipartite H avec bipartition $(W_1 - \{v\}, W_2 - \{w\})$. Parce que $|W_1 - \{v\}| = k$, l'hypothèse inductive nous dit il existe une correspondance complète de $W_1 - \{v\}$ à $W_2 - \{w\}$. Ajout du bord de v à w à ceci l'appariement complet produit un appariement complet de W_1 à W_2.

Cas (ii) : Supposons que pour certains j avec $1 \leq j \leq k$, il existe un sous-ensemble W_1 de j sommets tels que il y a exactement j voisins de ces sommets dans W_2. Soit W_2 être l'ensemble de ces voisins. Alors, par l'hypothèse inductive, il y a une correspondance complète de W_1 à W_2. Retirez ces $2j$ sommets de W_1 et W_2 et de toutes les arêtes incidentes pour produire un graphe biparti K avec bipartition $(W_1 - W_1, W_2 - W_2)$.

Nous montrerons que le graphe K satisfait la condition $|N(A)| \geq |A|$ pour tous les sous-ensembles A de $W_1 - W_1$. Sinon, il y aurait un sous-ensemble de t sommets de $W_1 - W_1$ où $1 \leq t \leq k + 1 - j$ de telle sorte que les sommets de ce sous-ensemble ont moins de t sommets de $W_2 - W_2$ comme voisins. Alors, l'ensemble des $j + t$ sommets de W_1 composé de ces t sommets avec les j sommets we retiré de W_1 a moins de $j + t$ voisins dans W_2, contredisant l'hypothèse que $|N(A)| \geq |A|$ pour tout $A \subseteq W_1$.

PHILIP HALL (1904–1982) Philip Hall a grandi à Londres, où sa mère était couturière. Il a remporté un bourse pour un conseil scolaire réservée aux enfants dans le besoin, et plus tard une bourse pour le King's College de Cambridge Université. Il a obtenu son baccalauréat en 1925. En 1926, incertain de ses objectifs de carrière, il a pris une fonction publique examen, mais a décidé de poursuivre ses études à Cambridge après avoir échoué.

En 1927, Hall est élu membre du King's College; peu de temps après, il a fait sa première découverte importante dans la théorie des groupes. Les résultats qu'il a prouvés sont maintenant connus sous le nom de théorèmes de Hall. En 1933, il est nommé chargé de cours à Cambridge, où il est resté jusqu'en 1941. Pendant la Seconde Guerre mondiale, il a travaillé comme cryptographe à Bletchley Parc brisant les codes italiens et japonais. À la fin de la guerre, Hall retourna au King's College et fut bientôt promu. En 1953, il a été nommé président Sadleirian. Son travail dans les années 50 s'est révélé extrêmement influent sur le développement rapide de la théorie des groupes au cours des années 1960.

Hall aimait la poésie et la récitait magnifiquement en italien et en japonais, ainsi qu'en anglais. Il était intéressé par l'art, la musique et botanique. Il était assez timide et n'aimait pas les grands groupes de personnes. Hall avait une connaissance incroyablement large et variée et était respectée pour son intégrité, ses normes intellectuelles et son jugement. Il était aimé de ses élèves.

Par conséquent, par l'hypothèse inductive, le graphe K a une correspondance complète. Combiner cela correspondance complète avec la correspondance complète de W_1 à W_2 , nous obtenons une correspondance complète de W_1 à W_2 .

Nous avons montré que dans les deux cas, il existe une correspondance complète deW_1 à W_2 . Cette termine l'étape inductive et complète la preuve.

Nous avons utilisé une forte induction pour prouver le théorème du mariage de Hall.Bien que notre preuve soit élégant, il présente quelques inconvénients. En particulier, nous ne pouvons pas construire un algorithme basé sur cette preuve qui trouve une correspondance complète dans un graphe bipartite. Pour une preuve constructive qui peut être utilisé comme base d'un algorithme, voir [Gi85].

Quelques applications de types spéciaux de graphiques

Nous concluons cette section en introduisant quelques modèles de graphiques supplémentaires qui impliquent la types de graphiques dont nous avons discuté dans cette section.

EXEMPLE 16 **Réseaux locaux** Les différents ordinateurs d'un bâtiment, tels que les mini-ordinateurs et les des ordinateurs personnels, ainsi que des périphériques tels que des imprimantes et des traceurs, peuvent être connectés en utilisant un *réseau local* . Certains de ces réseaux sont basés sur une *topologie en étoile* , où tous les appareils sont connectés à un appareil de commande central. Un réseau local peut être représenté en utilisant un graphique bipartite complet $K_{1,n}$, comme le montre la figure 11 (a).Les messages sont envoyés de l'appareil à via le dispositif de commande central.

(une) b) (c)

FIGURE 11 **Topologies en étoile, en anneau et hybrides pour les réseaux locaux.**

D'autres réseaux locaux sont basés sur une *topologie en anneau* , où chaque appareil est connecté à exactement deux autres. Les réseaux locaux avec une topologie en anneau sont modélisés à l'aide de n cycles, C_n , comme le montre la figure 11 (b).Les messages sont envoyés d'un appareil à l'autre tout au long du cycle jusqu'à ce que le destinataire prévu d'un message est atteint.

Enfin, certains réseaux locaux utilisent un hybride de ces deux topologies.Les messages peuvent être envoyé autour de l'anneau, ou via un appareil central. Cette redondance rend le réseau plus fiable. Les réseaux locaux avec cette redondance peuvent être modélisés à l'aide des roues W_n , comme illustré dans la figure 11 (c). ▲

EXEMPLE 17 **Réseaux d'interconnexion pour le calcul parallèle** Pendant de nombreuses années, les ordinateurs exécutés programme une opération à la fois. Par conséquent, les algorithmes écrits pour résoudre les problèmes ont été conçu pour effectuer une étape à la fois;ces algorithmes sont appelés **série** . (Presque tous les algorithmes décrits dans ce livre sont en série.) Cependant, de nombreux problèmes de calcul intense, tels que les simulations météorologiques, l'imagerie médicale et la cryptanalyse ne peuvent être résolues de manière durée d'utilisation des opérations en série, même sur un supercalculateur.En outre, il existe un limiter la vitesse à laquelle un ordinateur peut effectuer des opérations de base, il y aura donc toujours des problèmes qui ne peut pas être résolu dans un délai raisonnable en utilisant des opérations en série.

Traitement parallèle , qui utilise des ordinateurs composés de nombreux processeurs distincts, chacun avec sa propre mémoire, permet de surmonter les limitations des ordinateurs avec un seul processeur. **Algorithmes parallèles** , qui décomposent un problème en un certain nombre de sous-problèmes qui peuvent être résolus

P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6

FIGURE 12 **A Linéaire Tableau pour six processeurs.**

$P(0, 0)$ $P(0, 1)$ $P(0, 2)$ $P(0, 3)$

$P(1, 0)$ $P(1, 1)$ $P(1, 2)$ $P(1, 3)$

$P(2, 0)$ $P(2, 1)$ $P(2, 2)$ $P(2, 3)$

$P(3, 0)$ $P(3, 1)$ $P(3, 2)$ $P(3, 3)$

FIGURE 13 **Un réseau maillé pour 16 processeurs.**

simultanément, peut être conçu pour résoudre rapidement les problèmes en utilisant un ordinateur avec plusieurs processeurs. Dans un algorithme parallèle, un seul flux d'instructions contrôle l'exécution du algorithme, l'envoi de sous-problèmes à différents processeurs, et dirige l'entrée et la sortie de ces sous-problèmes aux processeurs appropriés.

Lorsqu'un traitement parallèle est utilisé, un processeur peut nécessiter une sortie générée par un autre processeur. Par conséquent, ces processeurs doivent être interconnectés. Nous pouvons utiliser les type de graphique pour représenter le réseau d'interconnexion des processeurs dans un ordinateur avec plusieurs processeurs. Dans la discussion suivante, nous décrirons les plus couramment utilisés types de réseaux d'interconnexion pour processeurs parallèles. Le type de réseau d'interconnexion utilisé pour mettre en œuvre un algorithme parallèle particulier dépend des exigences pour l'échange de les données entre les processeurs, la vitesse souhaitée et, bien sûr, le matériel disponible.

Les processeurs d'interconnexion réseau les plus simples, mais les plus chers, comprennent un lien entre chaque paire de processeurs. Ce réseau peut être représenté par K_n , l'ensemble graphe sur n sommets, quand il y a n processeurs. Cependant, il existe de graves problèmes avec ce type de réseau d'interconnexion car le nombre requis de connexions est si important. En réalité, le nombre de connexions directes à un processeur est limité, donc quand il y a un grand nombre de processeurs, un processeur ne peut pas être lié directement à tous les autres. Par exemple, lorsque il y a 64 processeurs, $C(64, 2) = 2016$ connexions seraient nécessaires, et chaque processeur devrait être directement connecté à 63 autres.

D'un autre côté, le moyen le plus simple d'interconnecter n processeurs est d'utiliser un arrangement connu sous le nom d'un **réseau linéaire** . Chaque processeur P_i , autre que P_1 et P_n , est connecté à ses voisins P_{i-1} et P_{i+1} via une liaison bidirectionnelle. P_1 est connecté uniquement à P_2 et P_n est connecté uniquement à P_{n-1} . La matrice linéaire pour six processeurs est illustrée à la figure 12. L'avantage d'un réseau linéaire est que chaque processeur a au plus deux connexions directes à d'autres processeurs. le L'inconvénient est qu'il est parfois nécessaire d'utiliser un grand nombre de liens intermédiaires, appelés **houblon** , pour que les processeurs partagent des informations.

Le **réseau maillé** (ou **réseau bidimensionnel**) est un réseau d'interconnexion couramment utilisé. travail. Dans un tel réseau, le nombre de processeurs est un carré parfait, disons $n = m^2$. Le n les processeurs sont étiquetés $P(i, j)$, $0 \leq i \leq m - 1$, $0 \leq j \leq m - 1$. Des liaisons bidirectionnelles connectent Sor $P(i, j)$ avec ses quatre voisins, les processeurs $P(i \pm 1, j)$ et $P(i, j \pm 1)$, tant que ceux-ci sont des processeurs dans le maillage. (Notez que quatre processeurs, aux coins du maillage, n'ont que deux processeurs adjacents et les autres processeurs situés aux limites n'ont que trois voisins. Parfois, une variante d'un réseau maillé dans lequel chaque processeur a exactement quatre connexions est utilisé; voir Exercice 72.) Le réseau maillé limite le nombre de liaisons pour chaque processeur. Com- la communication entre certaines paires de processeurs nécessite $O(\sqrt{n}) = O(m)$ liaisons intermédiaires. (Voir Exercice 73.) Le graphique représentant le réseau maillé pour 16 processeurs est illustré à la figure 13.

L'hypercube est un type important de réseau d'interconnexion. Pour un tel réseau, le nombre de processeurs est une puissance de 2, $n = 2^m$. Les n processeurs sont étiquetés $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$. Chaque processeur dispose de connexions bidirectionnelles avec m autres processeurs. Le processeur P_i est lié au processeurs avec des indices dont les représentations binaires diffèrent de la représentation binaire de i

en exactement un bit. Le réseau hypercube équilibre le nombre de connexions directes pour chaque processeur et le nombre de connexions intermédiaires nécessaires pour que les processeurs puissent communiquer. De nombreux ordinateurs ont été construits à l'aide d'un réseau hypercube, et de nombreux parallèles des algorithmes ont été conçus qui utilisent un réseau d'hypercube. Le graphe Q_m , le m- cube, représente le réseau hypercube avec $n = 2^m$ processeurs. La figure 14 montre le réseau hypercube travailler pour huit processeurs. (La figure 14 montre une manière différente de dessiner Q_3 que celle illustrée dans Figure 6.) ▲

Nouveaux graphiques de l'ancien

Parfois, nous n'avons besoin que d'une partie d'un graphique pour résoudre un problème. Par exemple, nous pouvons nous en soucier uniquement sur la partie d'un grand réseau informatique qui implique les centres informatiques de New York, Denver, Detroit et Atlanta. Ensuite, nous pouvons ignorer les autres centres informatiques et tous les téléphones lignes ne reliant pas deux de ces quatre centres informatiques spécifiques. Dans le modèle graphique pour le grand réseau, on peut supprimer les sommets correspondant aux centres informatiques autres que les quatre d'intérêt, et nous pouvons supprimer toutes les arêtes incidentes avec un sommet qui a été supprimé. Quand les bords et les sommets sont supprimés d'un graphique, sans supprimer les extrémités des arêtes restantes, un un graphique plus petit est obtenu. Un tel graphique est appelé un **sous - graphique** du **graphique** d'origine.

DÉFINITION 7 Un *sous - graphe d'un graphe* $G = (V, E)$ est un graphe $H = (W, F)$, où $W \subseteq V$ et $F \subseteq E$. UNE sous - graphe H de G est un *sous - graphe approprié* de G si $H = G$.

Étant donné un ensemble de sommets d'un graphique, nous pouvons former un sous-graphique de ce graphique avec ces sommets et les bords du graphique qui les relient.

DÉFINITION 8 Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Le **sous-graphe induit** par un sous-ensemble W de l'ensemble de sommets V est le graphique (W, F) , où l'ensemble de bords F contient un bord dans E si et seulement si les deux extrémités de ce bord sont en W .

EXEMPLE 18 Le graphique G représenté sur la figure 15 est un sous-graphique de K_5 . Si nous ajoutons le bord reliant c et e à G , on obtient le sous-graphe induit par $W = \{a, b, c, e\}$. ▲

SUPPRIMER OU AJOUTER DES BORDS D'UN GRAPHIQUE Étant donné un graphique $G = (V, E)$ et un bord $e \in E$, on peut produire un sous-graphe de G en supprimant l'arête e . Le sous-graphique résultant, noté par $G - e$, a le même ensemble de sommets V comme G . Son jeu de bords est $E - e$. Par conséquent,

$$G - e = (V, E - \{e\}).$$

De même, si E est un sous-ensemble de E , nous pouvons produire un sous-graphe de G en supprimant les arêtes de E du graphique. Le sous - graphe résultant possède le même ensemble de sommets V comme G . Son jeu de bord est $E - E$.

P_0 P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6 P_7

FIGURE 14 Un réseau Hypercube pour huit processeurs.

une *une*

e *b* *e* *b*

ré *c* *c*

FIGURE 15 Un sous-graphique de K_5 .

une *b* *c* *une* *b* *c* *une* *b* *c*

ré *e* *ré* *F* *ré* *e* *F*

G_1 G_2 $G_1 G_2$

(une) b)

FIGURE 16 (a) Les graphiques simples G_1 et G_2 ; b) Leur union $G_1 \cup G_2$.

Nous pouvons également ajouter un bord e à un graphique pour produire un nouveau graphique plus grand lorsque ce bord se connecte deux sommets déjà en G . On note $G + e$ le nouveau graphe produit en ajoutant un nouveau bord e , reliant deux sommets précédemment non incidents, au graphique G Par conséquent,

$$G + e = (V, E \cup \{ e \}).$$

L'ensemble de sommets de $G + e$ est le même que l'ensemble de sommets de G et l'ensemble de bords est l'union de la ensemble de bord de G et l'ensemble $\{ e \}$.

CONTRACTIONS DE BORD Parfois, lorsque nous supprimons un bord d'un graphique, nous ne veulent conserver les extrémités de cette arête en tant que sommets séparés dans le sous-graphique résultantDans un tel un cas, nous effectuons une **contraction de bord** qui supprime un bord e avec les points d'extrémité u et v et fusionne u et w en un nouveau sommet unique w , et pour chaque arête avec u ou v comme point de terminaison remplace le bord avec un avec w comme point de terminaison à la place de u ou v et avec le même deuxième point de terminaison. Par conséquent, la contraction du bord e avec les points d'extrémité u et v dans le graphique $G = (V, E)$ produit un nouveau graphe $G = (V, E)$ (qui n'est pas un sous-graphe de G), où $V = V - \{ u, v \} \cup \{ w \}$ et E contient les arêtes de E qui n'ont ni u ni v comme extrémités et une arête reliant w à chaque voisin soit u ou v dans V . Par exemple, la contraction du bord reliant le les sommets e et c du graphe G_1 de la figure 16 produisent un nouveau graphe G_1 avec les sommets a , b , d , et w . Comme dans G_1 , il y a un bord dans G_1 reliant a et b et un bord reliant a et d . Il y a aussi un avantage dans G_1 qui relie b et w qui remplace les bords reliant b et c et reliant b et e en G_1 et une arête en G_1 qui relie d et w *en* remplaçant la connexion de bord d et e dans G_1 .

SUPPRESSION DES VERTICULES D'UN GRAPHIQUE Lorsque nous **supprimons** un sommet v et toutes les arêtes incident à partir de $G = (V, E)$, nous produisons un sous-graphe, noté $G - v$. Observe ceci $G - v = (V - v, E)$, où E est l'ensemble des arêtes de G non incidentes à v . De même, si V est un sous-ensemble de V , alors le graphique $G - V$ est le sous-graphique $(V - V, E)$, où E est l'ensemble de bords de G non incidente à un sommet en V .

UNIONS GRAPHIQUES Deux graphiques ou plus peuvent être combinés de différentes manières.Le nouveau graphique contient tous les sommets et les bords de ces graphiques est appelé l'**union** des graphiques. Nous allons donner une définition plus formelle de l'union de deux graphiques simples.

DÉFINITION 9 L' *union* de deux graphes simples $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ est le graphe simple avec ensemble de sommets $V_1 \cup V_2$ et ensemble de bords $E_1 \cup E_2$. L'union de G_1 et G_2 est notée $G_1 \cup G_2$.

EXEMPLE 19 Trouver l'union des graphiques G_1 et G_2 illustrés sur la figure 16 (a). ▲

Solution: l' ensemble de sommets de l'union $G_1 \cup G_2$ est l'union des deux ensembles de sommets, à savoir: $\{a, b, c, d, e, f\}$. L'ensemble de bords de l'union est l'union des deux ensembles de bords.Le syndicat est illustré à la figure 16 (b).

Des exercices

Dans les exercices 1 à 3, trouvez le nombre de sommets, le nombre de bords, et le degré de chaque sommet dans la direction non donnée donnée graphique. Identifiez tous les sommets isolés et pendants.

1. *a* *b* *c*

F *e* *ré*

2. *une* *b*

e *ré* *c*

3. *une* *b* *c* *ré*

F *je* *h* *g* *e*

4. Trouvez la somme des degrés des sommets de chaque graphique dans les exercices 1 à 3 et vérifiez qu'il est égal au double du nombre des bords dans le graphique.

5. Un graphique simple peut-il exister avec 15 sommets chacun de degré cinq?

6. Montrez que la somme, sur l'ensemble des personnes à une fête, de le nombre de personnes avec qui une personne s'est serrée la main est même. Supposons que personne ne se serre la main.

Dans les exercices 7 à 9, déterminez le nombre de sommets et d'arêtes et trouver le degré en et hors degré de chaque sommet pour la donné multigraph dirigé.

sept. *b* *une*

ré *c*

8. *a* *b*

ré *c*

9. *une* *b*

ré *c* *e*

10. Pour chacun des graphiques des exercices 7 à 9, déterminez le somme des en-degrés des sommets et la somme des degrés extérieurs des sommets directement. Montrez qu'ils sont à la fois égal au nombre d'arêtes dans le graphique.

11. Construisez le graphique sous-jacent non orienté pour le graphique avec des bords dirigés dans la figure 2.

12. Que représente le degré d'un sommet dans l'acquisition graphe de transe, où les sommets représentent toutes les personnes dans le monde? Qu'est-ce que le quartier un sommet dans ce graphique représente? Que font les sommets isolés et pendants dans ce graphique représentent? Dans une étude, il a été estimé que le degré moyen d'un sommet dans ce graphique est de 1000. Que cela signifie-t-il en termes de modèle?

13. Que représente le degré d'un sommet dans un université graphique de collaboration? Qu'est-ce que le voisinage d'un sommet représenter? Que font les sommets isolés et pendants représenter?

14. Quel est le degré d'un sommet dans le graphe hollywoodien représenter? Qu'est-ce que le voisinage d'un sommet représente expédié? Que représentent les sommets isolés et pendants?

15. Que signifient le degré interne et le degré externe d'un sommet dans un graphique des appels téléphoniques, comme décrit dans l'exemple 4 de la sec- 10.1, représenter? Quel est le degré d'un sommet dans que représente la version non dirigée de ce graphique?

16. Que signifient le degré interne et le degré externe d'un sommet le graphe Web, comme décrit dans l'exemple 5 de la section 10.1, représenter?

17. Que signifient le degré interne et le degré externe d'un sommet dans un graphique dirigé modélisant un tournoi à tour de rôle du ressentiment?

18. Montrer que dans un graphique simple avec au moins deux sommets il doit y avoir deux sommets qui ont le même degré.

19. Utilisez l'exercice 18 pour montrer que dans un groupe de personnes, doit être deux personnes qui sont amis avec le même numéro d'autres personnes dans le groupe.

20. Dessinez ces graphiques.

a) K_7 **b)** $K_{1,8}$ **c)** $K_{4,4}$
d) C_7 **e)** W_7 **f)** Q_4

Dans les exercices 21 à 25, déterminez si le graphique est bipartite. Il peut être utile d'appliquer le théorème 4 et de répondre à la question en déterminant s'il est possible d'attribuer rouge ou bleu à chaque sommet de sorte qu'il n'y ait pas deux sommets adjacents assigné la même couleur.

21. *a* *b*

e

c *ré*

22. *b* *c*

une *ré*

e

23. *b* *c*

une *ré*

F *e*

24. *a* *b*

F *c*

e *ré*

25. *b*

une *c*

F *ré*

e

26. Pour quelles valeurs de n ces graphiques sont-ils bipartis?

a) K_n **b)** C_n **c)** W_n **d)** Q_n

27. Supposons qu'il y ait quatre employés dans l'ordinateur groupe de soutien de l'École d'ingénierie d'un grand Université. Chaque employé sera affecté au support l'un des quatre domaines différents: matériel, logiciel, réseau- et sans fil. Supposons que Ping soit qualifié pour prendre en charge matériel, réseau et sans fil; Quiggley est qualifié pour prendre en charge les logiciels et la mise en réseau; Ruiz est qualifié pour prendre en charge la mise en réseau et le sans fil, et Sitea est qualifié pour prendre en charge le matériel et les logiciels.

a) Utilisez un graphique bipartite pour modéliser les quatre employés et leurs qualifications.

b) Utilisez le théorème de Hall pour déterminer s'il existe un affectation des employés aux zones de soutien afin que chaque l'employé se voit attribuer un domaine à soutenir.

c) Si une affectation d'employés dans des zones de soutien chaque employé est affecté à un domaine de soutien existe, en trouver un.

28. Supposons qu'une nouvelle entreprise compte cinq employés: Zamora, Agraharam, Smith, Chou et Macintyre. Chaque employé assumera l'une des six responsabilités: planification, ité, ventes, marketing, développement et relations avec l'industrie. Chaque employé est capable de faire un ou plusieurs de ces emplois: Zamora pouvait faire de la planification, des ventes, du marketing ou relations avec l'industrie; Agraharam pourrait faire de la planification ou opment; Smith pourrait faire de la publicité, des ventes ou lations; Chou pourrait faire de la planification, des ventes ou des relations avec l'industrie tions; et Macintyre pourrait faire de la planification, de la publicité, des ventes, ou les relations avec l'industrie.

a) Modéliser les capacités de ces employés en utilisant un graphique partite.

b) Trouver une affectation de responsabilités telle que chaque l'employé se voit attribuer une seule responsabilité.

c) L'appariement des responsabilités que vous avez trouvé est-il en partie (b) une correspondance complète? S'agit-il d'une correspondance maximale?

29. Supposons qu'il y ait cinq jeunes femmes et cinq jeunes hommes sur une île. Chaque homme est prêt à épouser les femmes de l'île et chaque femme est prête à épouser tout homme qui veut l'épouser. Supposer que Sandeep est prêt à épouser Tina et Vandana; Barry est prêt à épouser Tina, Xia et Uma; Teja est prêt à épouser Tina et Zelda; Anil est prêt à épouser Vandana et Zelda; et Emilio est prêt à épouser Tina et Zelda. Utilisez le théorème de Hall pour montrer qu'il n'y a pas de correspondance les jeunes hommes et les jeunes femmes de l'île de telle sorte que chaque jeune homme est jumelé avec une jeune femme qu'il veut se marier.

30. Supposons qu'il y ait cinq jeunes femmes et six jeunes hommes sur une île. Chaque femme est prête à en épouser des hommes de l'île et chaque homme est prêt à se marier toute femme qui veut l'épouser. Supposer que Anna est prête à épouser Jason, Larry et Matt; Barbara est disposé à épouser Kevin et Larry; Carol est prête à épouser Jason, Nick et Oscar; Diane est prête à se marier Jason, Larry, Nick et Oscar; et Elizabeth est prête à épouser Jason et Matt.

a) Modélisez les mariages possibles sur l'île à l'aide d'un graphique bipartite.

b) Trouver un appariement des jeunes femmes et des jeunes les hommes sur l'île de telle sorte que chaque jeune femme est jumelé avec un jeune homme qu'elle est prête à marier.

c) La correspondance trouvée dans la partie (b) est-elle complète correspondant à? S'agit-il d'une correspondance maximale?

∗**31.** Supposons qu'il existe un entier k tel que tout homme sur un île déserte est prête à épouser exactement k des femmes sur l'île et chaque femme sur l'île est prête à épouser exactement k des hommes. Supposons également qu'un homme soit prêt à épouser une femme si et seulement si elle est prête à marrie-le. Montrer qu'il est possible de faire correspondre les hommes et les femmes de l'île pour que tout le monde soit quelqu'un qu'ils sont prêts à épouser.

∗**32.** Dans cet exercice, nous prouvons un théorème de Øystein Ore.

Supposons que $G = (V, E)$ est un graphe bipartite avec bipartition (V_1, V_2) et en ce que $A \subseteq V_1$. Montrez que le maximum nombre de sommets de V_1 qui sont les extrémités d'un correspondance de G est égal $|V_1| - \max_{A \subseteq V_1} \operatorname{def}(A)$, où $\operatorname{def}(A) = |A| - |N(A)|$. (Ici, $\operatorname{def}(A)$ est appelé le **déficacité** de A.) [*Astuce:* Formez un graphique plus grand en ajoutant $\max_{A \subseteq V_1} \operatorname{def}(A)$ nouveaux sommets à V_2 et connectez tous les aux sommets de V_1.]

33. Pour le graphique G de l'exercice 1, trouvez

a) le sous-graphique induit par les sommets a, b, c et f.

b) le nouveau graphe G_1 obtenu à partir de G en contractant le bord reliant b et f.

34. Soit n un entier positif. Montrer qu'un sous-graphe induit par un sous-ensemble non vide de l'ensemble de sommets de K_n est un complet graphique.

35. Combien de sommets et combien d'arêtes ces graphiques avoir?

a) K_n **b)** C_n **c)** W_n
d) $K_{m, n}$ **e)** Q_n

La **séquence** de **degrés** d'un graphique est la séquence de la degrés des sommets du graphe dans un ordre non croissant. Pour exemple, la séquence de degrés du graphe *G* dans l'exemple 1 est 4 , 4 , 4 , 3 , 2 , 1 , 0.

36. Trouvez les séquences de degrés pour chacun des graphiques Exercices 21-25.

37. Trouvez la séquence de degrés de chacun des éléments suivants graphiques.

a) K_4 **b)** C_4 **c)** W_4
d) $K_{2, 3}$ **e)** Q_3

38. Quelle est la séquence de degrés du graphe biparti $K_{m, n}$ où *m* et *n* sont des entiers positifs? Expliquez votre réponse.

39. Quelle est la séquence de degrés de K_n , où *n* est positif entier? Expliquez votre réponse.

40. Combien d'arêtes possède un graphe si sa séquence de degrés est 4, 3, 3, 2, 2? Dessinez un tel graphique.

41. Combien d'arêtes possède un graphe si sa séquence de degrés est 5, 2, 2, 2, 2, 1? Dessinez un tel graphique.

Une séquence d_1 , d_2 , ..., d_n est appelée **graphique** si elle est le degré séquence d'un graphique simple.

42. Déterminez si chacune de ces séquences est graphique. Pour ceux qui le sont, dessinez un graphique ayant le degré donné séquence.

a) 5, 4, 3, 2, 1, 0 **b)** 6, 5, 4, 3, 2, 1 **c)** 2, 2, 2, 2, 2, 2
d) 3, 3, 3, 2, 2, 2 **e)** 3, 3, 2, 2, 2, 2 **f)** 1, 1, 1, 1, 1, 1
g) 5, 3, 3, 3, 3, 3 **h)** 5, 5, 4, 3, 2, 1

43. Déterminez si chacune de ces séquences est graphique. Pour ceux qui le sont, dessinez un graphique ayant le degré donné séquence.

a) 3, 3, 3, 3, 2 **b)** 5, 4, 3, 2, 1 **c)** 4, 4, 3, 2, 1
d) 4, 4, 3, 3, 3 **e)** 3, 2, 2, 1, 0 **f)** 1, 1, 1, 1, 1

∗ **44.** Supposons que d_1 , d_2 , ..., d_n est une séquence graphique. Spectacle qu'il existe un graphe simple avec des sommets v_1 , v_2 , ..., v_n tel que deg (v_i) = d_i pour *i* = 1 , 2 , ..., *n* et v_1 est cent à v_2 , ..., v_{d_1+1} .

∗ **45.** Montrer qu'une suite d_1 , d_2 , ..., d_n d'intégrale non négative gers dans un ordre non croissant est une séquence graphique si et seulement si la séquence obtenue en réordonnant les termes de la séquence d_2 - 1 , ..., d_{d_1+1} - 1 , d_{d_1+2} , ..., d_n so que les termes sont en ordre non croissant est un graphique séquence.

∗ **46.** Utilisez l'exercice 45 pour construire un algorithme récursif pour déterminer si une séquence non croissante de positif entiers est graphique.

47. Montrer que chaque séquence non croissante de non négatif entiers avec une somme paire de ses termes est le degré séquence d'un pseudographe, c'est-à-dire un graphe non orienté où les boucles sont autorisées. [*Astuce:* construire un tel graphique en ajoutant d'abord autant de boucles que possible à chaque sommet.

49. Combien de sous-graphiques avec au moins un sommet K_3 avoir?

50. Combien de sous-graphiques avec au moins un sommet W_3 avoir?

51. Dessinez tous les sous-graphiques de ce graphique.

une *b*

c *ré*

52. Soit *G* un graphe avec *v* sommets et *e* arêtes. Que *M* soit le degré maximum des sommets de *G* , et que *m* soit le degré minimum des sommets du *G* . Montre CA

a) $2e/v \geq m$. **b)** $2e/v \leq M$.

Un graphe simple est appelé **régulier** si chaque sommet de ce graphe a le même degré. Un graphe régulier est appelé *n* - **régulier** si chaque sommet de ce graphique a le degré *n* .

53. Pour quelles valeurs de *n* ces graphiques sont-ils réguliers?

a) K_n **b)** C_n **c)** W_n **d)** Q_n

54. Pour quelles valeurs de *m* et *n* est $K_{m, n}$ régulier?

55. Combien de sommets un graphe régulier de degré quatre avec 10 bords ont?

Dans les exercices 56 à 58, trouvez l'union de la paire donnée de simples graphiques. (Supposons que les bords avec les mêmes extrémités sont identiques.)

56. *une*

F *b* *F* *b*

e *c*

ré *ré*

57. *a* *b* *une* *F* *b*

e *e*

c *ré* *c* *g* *ré*

58. *a* *b* *une* *e*

h

c *ré* *F* *g*

59. Le **graphe complémentaire** *G* d'un graphe simple *G* a les mêmes sommets que *G* . Deux sommets sont adjacents en *G* si et seulement si elles ne sont pas adjacents dans *G* . Décrivez chacun ces graphiques.

Ajoutez ensuite des arêtes supplémentaires reliant les sommets des degré. Expliquez pourquoi cette construction fonctionne.]

48. Combien de sous-graphiques avec au moins un sommet K_2 avoir?

a) K_n **b)** $K_{m,n}$ **c)** C_n **d)** Q_n

60. Si G est un graphique simple avec 15 arêtes et G a 13 arêtes, combien de sommets G a-t-il?

61. Si le graphe simple G a v sommets et e arêtes, comment combien d'arêtes G a-t-il?

62. Si la séquence de degrés du graphe simple G est 4 , 3 , 3 , 2 , 2, quelle est la séquence de degrés de G ?

63. Si la séquence de degrés du graphe simple G est d_1 , d_2 , ..., d_n , quelle est la séquence de degrés de G ?

∗ **64.** Montrer que si G est un graphe bipartite simple avec v sommets et e bords, puis $e \leq v^2/4$.

65. Montrer que si G est un graphe simple avec n sommets, alors le l'union de G et G est K_n .

∗ **66.** Décrire un algorithme pour décider si un graphe est bipartite basée sur le fait qu'un graphique est bipartite si et seulement s'il est possible de colorer ses sommets de deux couleurs différentes de sorte qu'il n'y a pas deux sommets de la même couleur adjacents.

L' **inverse** d'un graphe orienté $G = (V, E)$, noté par G_{conv} , est le graphe orienté (V, F) , où l'ensemble F des bords de G_{conv} est obtenu en inversant la direction de chaque bord dans E .

67. Tracez l'inverse de chacun des graphiques des exercices 7 à 9 dans la section 10.1.

68. Montrer que $(G_{conv})_{conv} = G$ chaque fois que G est un graphique.

69. Montrer que le graphe G est son propre inverse si et seulement si le la relation associée à G (voir section 9.3) est symétrique.

70. Montrer que si un graphe biparti $G = (V, E)$ est n- régulier pour un entier positif n (voir le préambule de l'exercice 53) et (V_1, V_2) est une bipartition de V , alors $|V_1| = |V_2|$. Cette est, montrer que les deux ensembles dans une bipartition de l'ensemble de sommets d'un graphe n- régulier doit contenir le même nombre de sommets.

71. Tracer le réseau maillé pour interconnecter neuf parallèles processeurs.

72. Dans une variante d'un réseau maillé pour interconnecter $n = m^2$ processeurs, le processeur $P(i, j)$ est connecté aux quatre processeurs cesseurs $P((i \pm 1)$ **mod** $m, j)$ et $P(i, (j \pm 1)$ **mod** m), de sorte que les connexions s'enroulent autour des bords du maillage. Dessinez cette variante du réseau maillé pour 16 processeurs.

73. Montrer que chaque paire de processeurs dans un réseau maillé de $n = m^2$ processeurs peuvent communiquer en utilisant $O(\sqrt{n}) = O(m)$ sauts entre des processeurs directement connectés.

Représentation des graphes et de l'isomorphisme des graphes

introduction

Il existe de nombreuses façons utiles de représenter des graphiques.Comme nous le verrons tout au long de ce chapitre, en travaillant avec un graphique, il est utile de pouvoir choisir sa représentation la plus pratique.Dans Dans cette section, nous allons montrer comment représenter des graphiques de plusieurs manières différentes.

Parfois, deux graphiques ont exactement la même forme, dans le sens où il y a un à un correspondance entre leurs ensembles de sommets qui préserve les arêtes.Dans un tel cas, nous disons que le deux graphiques sont **isomorphes** . Il est important de déterminer si deux graphiques sont isomorphes problème de théorie des graphes que nous étudierons dans cette section.

Représenter des graphiques

Une façon de représenter un graphique sans plusieurs bords consiste à répertorier tous les bords de ce graphique.Un autre moyen de représenter un graphique sans arêtes multiples consiste à utiliser des **listes de contiguïté** , qui spécifient sommets adjacents à chaque sommet du graphique.

EXEMPLE 1 Utilisez des listes d'adjacence pour décrire le graphique simple donné dans la figure 1.

Solution: le tableau 1 répertorie les sommets adjacents à chacun des sommets du graphique. ▲

b

une c

e ré

FIGURE 1 Un graphique simple.

TABLEAU 1 Une liste d'adjacence pour un graphique simple.

Sommet	*Sommets adjacents*
une	*b* , *c* , *e*
b	*une*
c	*a* , *d* , *e*
ré	*c* , *e*
e	*a* , *c* , *d*

b

une c

e ré

FIGURE 2 Un graphique dirigé.

TABLEAU 2 Liste d'adjacence pour un Graphique dirigé.

Vertex initial	*Sommets terminaux*
une	*b* , *c* , *d* , *e*
b	*b* , *d*
c	*a* , *c* , *e*
ré	
e	*b* , *c* , *d*

EXEMPLE 2 Représentez le graphique orienté montré dans la figure 2 en listant tous les sommets qui sont le terminal sommets d'arêtes commençant à chaque sommet du graphique.

Solution: le tableau 2 représente le graphique orienté illustré à la figure 2. ▲

une b

c ré

FIGURE 3 Graphique simple.

Matrices d'adjacence

Réaliser des algorithmes de graphes en utilisant la représentation de graphes par des listes d'arêtes, ou par Les listes de fréquence peuvent être lourdes s'il y a de nombreux bords dans le graphique.Pour simplifier le calcul, les graphiques peuvent être représentés à l'aide de matrices.Deux types de matrices couramment utilisées pour représenter des graphiques seront présentés ici. L'un est basé sur la contiguïté des sommets, et l'autre est basé sur l'incidence des sommets et des arêtes.

Supposons que $G = (V, E)$ est un graphe simple où $|V| = n$. Supposons que les sommets de G sont arbitrairement répertoriés comme $v_1, v_2, \ldots, v_n$. La **matrice d'adjacence A** (ou $\mathbf{A}_G$) de G , avec respect à cette liste des sommets, est la matrice $n \times n$ zéro – un avec 1 comme entrée (i, j) lorsque v_i et v_j sont adjacents et 0 comme sa (i, j) ème entrée lorsqu'ils ne sont pas adjacents. En d'autres termes, si son la matrice d'adjacence est $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, alors

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } \{v_i, v_j\} \text{ est une arête de } G, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

EXEMPLE 3 Utilisez une matrice d'adjacence pour représenter le graphique illustré à la figure 3.

Solution: Nous ordonnons les sommets comme a, b, c, d . La matrice représentant ce graphique est

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

▲

EXEMPLE 4 Dessiner un graphique avec la matrice d'adjacence

une *b*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ré *c*

en ce qui concerne l'ordre des sommets a, b, c, d .

FIGURE 4
Un graphique avec le Adjacence donnée Matrice.

Solution: un graphique avec cette matrice d'adjacence est illustré à la figure 4. ▲

Notez qu'une matrice d'adjacence d'un graphe est basée sur l'ordre choisi pour les sommets. Par conséquent, il peut y en avoir autant que n ! différentes matrices d'adjacence pour un graphe à n sommets, car il y en a n ! différents ordres de n sommets.

La matrice d'adjacence d'un graphe simple est symétrique, c'est-à-dire $a_{ij} = a_{ji}$, car les deux ces entrées sont 1 lorsque v_i et v_j sont adjacentes, et les deux sont 0 sinon. De plus, parce que un graphique simple n'a pas de boucles, chaque entrée a_{ii} , $i = 1, 2, 3, ..., n$, est 0.

Les matrices d'adjacence peuvent également être utilisées pour représenter des graphiques non orientés avec des boucles et avec bords multiples. Une boucle au sommet v_i est représentée par un 1 à la (i, i) ème position du matrice d'adjacence. Lorsque plusieurs arêtes relient la même paire de sommets v_i et v_j , ou plusieurs boucles au même sommet sont présentes, la matrice d'adjacence n'est plus un zéro – un matrice, car la (i, j) ème entrée de cette matrice est égale au nombre d'arêtes associées à $\{v_i, v_j\}$. Tous les graphiques non dirigés, y compris les multigraphes et les pseudographes, ont une symétrie matrices d'adjacence.

EXEMPLE 5 Utilisez une matrice d'adjacence pour représenter le pseudographe illustré à la figure 5.

une *b*

Solution: la matrice d'adjacence utilisant l'ordre des sommets a, b, c, d est

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

ré *c*

▲

FIGURE 5
Un pseudographe.

Nous avons utilisé des matrices zéro à un au chapitre 9 pour représenter des graphiques dirigés. La matrice d'un le graphe orienté $G = (V, E)$ a un 1 dans sa (i, j) ème position s'il y a un bord de v_i à v_j , où $v_1, v_2, ..., v_n$ est une liste arbitraire des sommets du graphe orienté. En d'autres termes, si $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ est la matrice d'adjacence pour le graphe orienté par rapport à cette liste des sommets, puis

{

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } (v_i, v_j) \text{ est une arête de } G, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

La matrice d'adjacence d'un graphe orienté ne doit pas nécessairement être symétrique, car il peut ne pas être un bord de v_j à v_i quand il y a un bord de v_i à v_j.

Les matrices d'adjacence peuvent également être utilisées pour représenter des multigraphes dirigées.Encore une fois, ces matrices ne sont pas des matrices nulles à un lorsqu'il y a plusieurs arêtes dans la même direction reliant deux sommets. Dans la matrice d'adjacence pour une multigraphe dirigée, a_{ij} est égal au nombre d'arêtes qui sont associés à (v_i, v_j).

ARRANGEMENTS ENTRE LES LISTES D'ADJACENCE ET LES MATRICES D'ADJACENCE Quand un graphique simple contient relativement peu d'arêtes, c'est-à-dire lorsqu'il est **clairsemé**, il est généralement préférable d'utiliser des listes d'adjacence plutôt qu'une matrice d'adjacence pour représenter le graphique.Par exemple, si chaque sommet a un degré ne dépassant pas c, où c est une constante beaucoup plus petite que n, alors chaque la liste d'adjacence contient c ou moins de sommets. Par conséquent, il n'y a pas plus de cn éléments dans tous ces listes d'adjacence. En revanche, la matrice d'adjacence pour le graphe comporte n^2 entrées. Remarque, cependant, que la matrice d'adjacence d'un graphe clairsemé est une **matrice clairsemée**, c'est-à-dire une matrice avec quelques entrées non nulles, et il existe des techniques spéciales pour représenter et calculer avec, matrices clairsemées.

Supposons maintenant qu'un graphe simple soit **dense**, c'est-à-dire qu'il contienne de nombreux bords, tels sous forme de graphique contenant plus de la moitié de toutes les arêtes possibles.Dans ce cas, en utilisant une contiguïté une matrice pour représenter le graphique est généralement préférable à l'utilisation de listes d'adjacence.Pour voir pourquoi, nous comparer la complexité de déterminer si le bord possible $\{v_i, v_j\}$ est présent. Utiliser un matrice d'adjacence, nous pouvons déterminer si cette arête est présente en examinant la (i, j) ème entrée

dans la matrice. Cette entrée est 1 si le graphique contient ce bord et 0 sinon.Par conséquent, nous devons faire une seule comparaison, à savoir, comparer cette entrée avec 0, pour déterminer si ce bord est présent. D'un autre côté, lorsque nous utilisons des listes d'adjacence pour représenter le graphique, nous besoin de rechercher la liste des sommets adjacents à v_i ou v_j pour déterminer si cette arête est présent. Cela peut nécessiter des comparaisons $(|V|)$ lorsque de nombreux bords sont présents.

Matrices d'incidence

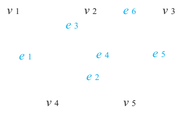
Une autre façon courante de représenter des graphiques consiste à utiliser **des matrices d'incidence**. Soit $G = (V, E)$ un graphique non orienté. Supposons que $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sont les sommets et $e_1, e_2, \ldots, e_m$ sont les arêtes de G. Alors la matrice d'incidence par rapport à cet ordre de V et E est la matrice $n \times m$ $\mathbf{M} = [m_{ij}]$, où

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ lorsque l'arête } e_j \text{ est incidente avec } v_i, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

EXEMPLE 6 Représentez le graphique montré à la figure 6 avec une matrice d'incidence.

Solution: la matrice d'incidence est

$e_1 \quad e_2 \quad e_3 \quad e_4 \quad e_5 \quad e_6$



$$\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

▲

FIGURE 6 An Indirect Graphique.

Les matrices d'incidence peuvent également être utilisées pour représenter plusieurs arêtes et boucles.Bords multiples sont représentés dans la matrice d'incidence à l'aide de colonnes avec des entrées identiques, car ces bords sont incidents avec la même paire de sommets.Les boucles sont représentées à l'aide d'une colonne avec exactement une entrée égale à 1, correspondant au sommet qui est incident avec cette boucle.

EXEMPLE 7 Représentez le pseudogramme montré sur la figure 7 en utilisant une matrice d'incidence.

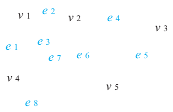


FIGURE 7
Un pseudographe.

Solution: la matrice d'incidence de ce graphique est

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

▲

Isomorphisme des graphiques

Nous devons souvent savoir s'il est possible de tracer deux graphiques de la même manière.Autrement dit, faites les graphes ont la même structure quand on ignore les identités de leurs sommets?Par exemple, en chimie, les graphiques sont utilisés pour modéliser des composés chimiques (d'une manière que nous décrirons plus loin). Différents composés peuvent avoir la même formule moléculaire mais leur structure peut différer.Tel les composés peuvent être représentés par des graphiques qui ne peuvent pas être dessinés de la même manière.Les graphiques représentant des composés précédemment connus peut être utilisé pour déterminer si un soi-disant nouveau composé a été étudié auparavant.

Il existe une terminologie utile pour les graphiques ayant la même structure.

DÉFINITION 1 Les graphes simples $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ sont *isomorphes* s'il existe un à un et sur la fonction f de V_1 à V_2 avec la propriété que a et b sont adjacents dans G_1 si et seulement si $f(a)$ et $f(b)$ sont adjacents dans G_2, pour tout a et b dans V_1. Une telle fonction f est appelée un *isomorphisme*. * Deux graphes simples qui ne sont pas isomorphes sont appelés *non isomorphes*.

En d'autres termes, lorsque deux graphiques simples sont isomorphes, il y a une correspondance un à un entre les sommets des deux graphiques qui préserve la relation d'adjacence.Isomorphisme de les graphiques simples sont une relation d'équivalence. (Nous laissons cette vérification à l'exercice 45.)

EXEMPLE 8 Montrer que les graphes $G = (V, E)$ et $H = (W, F)$, affichés sur la figure 8, sont isomorphes.

u_1 u_2

u_3 u_4

G

v_1 v_2

v_3 v_4

H

FIGURE 8 **Le Graphes *G* et *H* .**

Solution: La fonction f avec $f(u_1) = v_1$, $f(u_2) = v_4$, $f(u_3) = v_3$ et $f(u_4) = v_2$ est un à une correspondance entre V et W . Pour voir que cette correspondance préserve la contiguïté, notons que les sommets adjacents dans G sont u_1 et u_2, u_1 et u_3, u_2 et u_4, et u_3 et u_4, et chacun des paires $f(u_1) = v_1$ et $f(u_2) = v_4$, $f(u_1) = v_1$ et $f(u_3) = v_3$, $f(u_2) = v_4$ et $f(u_4) = v_2$, et $f(u_3) = v_3$ et $f(u_4) = v_2$ est constitué de deux sommets adjacents dans H . ▲

Déterminer si deux graphiques simples sont isomorphes

Il est souvent difficile de déterminer si deux graphiques simples sont isomorphes.Il y en a n ! possible correspondances un à un entre les ensembles de sommets de deux graphiques simples avec n sommets. Essai chacune de ces correspondances pour voir si elle préserve la contiguïté et la non contiguïté est impossible si n est du tout grand.

Parfois, il n'est pas difficile de montrer que deux graphiques ne sont pas isomorphes.En particulier, nous pouvons montrer que deux graphiques ne sont pas isomorphes si nous ne pouvons trouver une propriété que l'un des deux graphiques a, mais qui est préservé par l'isomorphisme. Une propriété préservée par l'isomorphisme des graphes est appelé un **invariant graphique** . Par exemple, les graphiques simples isomorphes doivent avoir le même nombre des sommets, car il existe une correspondance biunivoque entre les ensembles de sommets du graphiques.

Les graphes simples isomorphes doivent également avoir le même nombre d'arêtes, car le un à un la correspondance entre les sommets établit une correspondance biunivoque entre les arêtes.Dans De plus, les degrés des sommets dans les graphes simples isomorphes doivent être les mêmes.C'est un le sommet v de degré d dans G doit correspondre à un sommet $f(v)$ de degré d dans H , car un sommet w dans G est adjacente à v si et seulement si $f(v)$ et $f(w)$ sont adjacentes à H .

EXEMPLE 9 Montrez que les graphiques affichés sur la figure 9 ne sont pas isomorphes.

Solution: Les deux G et H ont cinq sommets et six arêtes. Cependant, H a un sommet de degré un, à savoir, e , alors que G n'a pas de sommets de degré un.Il s'ensuit que G et H ne sont pas isomorphes. ▲

Le nombre de sommets, le nombre d'arêtes et le nombre de sommets de chaque degré sont tous invariants sous isomorphisme. Si l'une de ces quantités diffère dans deux graphiques simples, ces graphiques ne peuvent pas être isomorphes.Cependant, lorsque ces invariants sont les mêmes, cela ne signifie pas signifie nécessairement que les deux graphiques sont isomorphes.Il n'y a pas d'ensembles d'invariants utiles actuellement connu qui peut être utilisé pour déterminer si les graphiques simples sont isomorphes.

∗ Le mot *isomorphisme* vient des racines grecques *isos* pour «égal» et *morphe* pour «forme».

b *b*

une *c* *une* *c*

e *ré* *e* *ré*

une *b* *s* *t*

e *F* *w* *X*

h *g* *z* *y*

ré *c* *v* *u*

g H g H

FIGURE 9 **les graphes *G* et *H* .**

FIGURE 10 **Les graphiques *G* , et *H* .**

EXEMPLE 10 Déterminez si les graphiques représentés sur la figure 10 sont isomorphes.

b
F
h
ré
s
w
z
v

Solution: Les graphiques *G* et *H* ont tous deux huit sommets et 10 arêtes. Ils ont également tous deux quatre sommets de degré deux et quatre de degré trois. Parce que ces invariants sont tous d'accord, il est toujours concevable que ces graphiques sont isomorphes.

Cependant, *G* et *H* ne sont pas isomorphes. Pour voir cela, notez que parce que deg *(a)* = 2 dans *G* , *a* doivent correspondre soit *t* , *u* , *x* , ou *y* en *H* , parce que ce sont les sommets de degré deux en *H* . Cependant, chacun de ces quatre sommets en *H* est adjacent à un autre sommet de degré deux en *H* , ce qui est faux pour *un* dans *G* .

Une autre façon de voir que *G* et *H* ne sont pas isomorphes est de noter que les sous-graphes de *G* et *H* constitués de sommets de degré trois et les arêtes qui les relient doivent être isomorphes si ces deux graphiques sont isomorphes (le lecteur doit vérifier cela). Cependant, ces sous-graphiques, montré sur la figure 11, ne sont pas isomorphes. ▲

FIGURE 11 **Le Sous-graphes de *G* et *H* composé des sommets de dé- gree Three et les Edges Con- les connecter.**

Pour montrer qu'une fonction *f* de l'ensemble de sommets d'un graphe *G* à l'ensemble de sommets d'un graphe *H* est un isomorphisme, nous devons montrer que *f* préserve la présence et l'absence d'arêtes. Un utile moyen de le faire est d'utiliser des matrices d'adjacence. En particulier, pour montrer que *f* est un isomorphisme, nous peut montrer que la matrice d'adjacence de *G* est la même que la matrice d'adjacence de *H* , lorsque les lignes et les colonnes sont étiquetées pour correspondre aux images sous *f* des sommets en *G* qui sont les étiquettes de ces lignes et de colonnes dans la matrice d'adjacence de *G* . Nous illustrons comment cela se fait dans l'exemple 11.

EXEMPLE 11 Déterminez si les graphiques *G* et *H* affichés sur la figure 12 sont isomorphes.

Solution: Les deux *G* et *H* ont six sommets et sept arêtes. Les deux ont quatre sommets de degré deux et deux sommets de degré trois. Il est également facile de voir que les sous -graphes de *G* et *H* composé de tous les sommets de degré deux et les arêtes qui les relient sont isomorphes (comme le lecteur Vérifier). Parce que *G* et *H* sont d'accord sur ces invariants, il est raisonnable d'essayer de trouver un isomorphisme *f* .

u_1 u_2 v_1 v_3
u_5
v_2
u_6 v_6
u_4 u_3 v_5 v_4
g H

FIGURE 12 **graphes *G* et *H* .**

Épisode 296

Nous allons maintenant définir une fonction *f* puis déterminer s'il s'agit d'un isomorphisme. Car deg $(u_1) = 2$ et parce que u_1 n'est pas adjacent à un autre sommet de degré deux, l'image de u_1 doit être soit v_4 soit v_6, les seuls sommets de degré deux dans H non adjacents à un sommet de degré deux. On pose arbitrairement $f(u_1) = v_6$. [Si nous avons constaté que ce choix n'a pas conduit à l'isomorphisme, on essaierait alors $f(u_1) = v_4$.] Parce que u_2 est adjacent à u_1, les images possibles de u_2 sont v_3 et v_5. On pose arbitrairement $f(u_2) = v_3$. Poursuivant ainsi, en utilisant la contiguïté des sommets et degrés comme guide, nous fixons $f(u_3) = v_4$, $f(u_4) = v_5$, $f(u_5) = v_1$ et $f(u_6) = v_2$. Nous avons maintenant une correspondance biunivoque entre l'ensemble de sommets de G et l'ensemble de sommets de H, à savoir, $f(u_1) = v_6$, $f(u_2) = v_3$, $f(u_3) = v_4$, $f(u_4) = v_5$, $f(u_5) = v_1$, $f(u_6) = v_2$. Pour voir si f préserve les bords, nous examinons la matrice d'adjacence de G,

$$\mathbf{A}_G = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array},$$

et la matrice d'adjacence de H avec les lignes et les colonnes étiquetées par les images de la correspondance sponding vertices in G,

$$\mathbf{A}_H = \begin{array}{c} \\ v_6 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_1 \\ v_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_6 & v_3 & v_4 & v_5 & v_1 & v_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Parce que $\mathbf{A}_G = \mathbf{A}_H$, il s'ensuit que f conserve les bords. Nous concluons que f est un isomorphisme, donc G et H sont isomorphes. Notez que si f s'avérait ne pas être un isomorphisme, nous n'ont *pas* établi que G et H ne sont pas isomorphes, car une autre correspondance de la les sommets en G et H peuvent être un isomorphisme. ▲

ALGORITHMES POUR L' ISOMORPHISME GRAPHIQUE Les meilleurs algorithmes connus pour déterminer si deux graphiques sont isomorphes ont une complexité temporelle exponentielle dans le pire des cas (dans le nombre des sommets des graphiques). Cependant, les algorithmes linéaires de complexité temporelle moyenne sont connus qui résolvent ce problème, et il y a de l'espoir, mais aussi du scepticisme, qu'un algorithme avec complexité temporelle du pire cas polynomial pour déterminer si deux graphiques sont isomorphes être trouvé. Le meilleur logiciel pratique à usage général pour les tests d'isomorphisme, appelé NAUTY, peut être utilisé pour déterminer si deux graphiques avec jusqu'à 100 sommets sont isomorphes en moins d'une seconde sur un PC moderne. Le logiciel NAUTY peut être téléchargé sur Internet et expérimenté. Algorithmes pratiques pour déterminer si deux graphes sont isomorphes existent pour les graphiques qui sont restreints de diverses manières, par exemple lorsque le degré maximal de sommets est petite. Le problème de déterminer si deux graphes sont isomorphes est particulièrement intéressant parce que c'est l'un des rares problèmes de NP (voir exercice 72) qui n'est pas non plus traitable ou NP-complet (voir section 3.3).

APPLICATIONS DES ISOMORPHISMES GRAPHIQUES Isomorphismes graphiques et fonctions qui sont presque des isomorphismes de graphes, surgissent dans les applications de la théorie des graphes à la chimie et à la conception de circuits électroniques et d'autres domaines, y compris la bioinformatique et la vision par ordinateur.

Les chimistes utilisent des multigraphes, connues sous le nom de graphiques moléculaires, pour modéliser des composés chimiques.Dans ces les graphiques, les sommets représentent les atomes et les arêtes représentent les liaisons chimiques entre ces atomes. Deux isomères structuraux, des molécules de formules moléculaires identiques mais avec des atomes liés différemment, ont des graphes moléculaires non isomorphes. Lorsqu'un composé chimique potentiellement nouveau est synthétisé, une base de données de graphiques moléculaires est vérifiée pour voir si le graphique moléculaire du composé est le même que celui déjà connu.

Les circuits électroniques sont modélisés à l'aide de graphiques dans lesquels les sommets représentent des composants et les bords représentent les connexions entre eux.Les circuits intégrés modernes, appelés puces, sont circuits électroniques miniaturisés, souvent avec des millions de transistors et des connexions entre leur. En raison de la complexité des puces modernes, des outils d'automatisation sont utilisés pour les concevoir. L'isomorphisme des graphes est la base de la vérification qu'une configuration particulière d'un circuit produit par un outil automatisé correspond au schéma original de la conception.Isomorphisme graphique peut également être utilisé pour déterminer si une puce d'un fournisseur inclut la propriété intellectuelle d'un fournisseur différent. Cela peut être fait en recherchant de grands sous-graphes isomorphes dans le graphiques modélisant ces puces.

Des exercices

Dans les exercices 1 à 4, utilisez une liste d'adjacence pour représenter graphique.

1. *a* *b* *c* *ré*

2. *une* *b* *c* *ré* *e*

3. *une* *b* *c* *ré*

4. *a* *b* *c* *ré* *e*

5. Représentez le graphique de l'exercice 1 avec un maillage d'adjacence trix.

6. Représentez le graphique de l'exercice 2 avec un maillage d'adjacence trix.

7. Représentez le graphique de l'exercice 3 avec un maillage d'adjacence trix.

8. Représentez le graphique de l'exercice 4 avec un maillage d'adjacence trix.

9. Représentez chacun de ces graphiques avec une matrice d'adjacence.

a) K_4 **b)** $K_{1,4}$ **c)** $K_{2,3}$
d) C_4 **e)** W_4 **f)** Q_3

Dans les exercices 10 à 12, dessinez un graphique avec la contiguïté donnée matrice.

dix. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Dans les exercices 13 à 15, représentez le graphique donné en utilisant un matrice de cence.

13. *une* *b* *c* *ré*

14. *a* *b* *c* *ré*

15. *une* *b* *c* *ré*

Dans les exercices 16 à 18, tracez un graphique non orienté représenté par la matrice d'adjacence donnée.

16. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Dans les exercices 19 à 21, trouvez la matrice d'adjacence du multigraphie dirigée par rapport aux sommets listés en al-ordre phabétique.

19. *une* *b* *c* *ré*

20. *une* *b* *c* *ré*

21. *une* *b* *c* *ré*

Dans les exercices 22 à 24, dessinez le graphique représenté par le matrice d'adjacence.

22. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **23.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ **24.** $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

25. Chaque matrice carrée de zéro – un qui est symétrique et a des zéros sur la diagonale de la matrice d'adjacence d'un simplein graphe?

26. Utilisez une matrice d'incidence pour représenter les graphiques dans Exercises 1 et 2.

27. Utilisez une matrice d'incidence pour représenter les graphiques dans Exerprend 13–15.

∗ **28.** Quelle est la somme des entrées dans une rangée de la contiguïté matrice pour un graphe non orienté? Pour un graphe orienté?

∗ **29.** Quelle est la somme des entrées dans une colonne de la contiguïté matrice pour un graphe non orienté? Pour un graphe orienté?

30. Quelle est la somme des entrées consécutives de l'incidence matrice pour un graphe non orienté?

31. Quelle est la somme des entrées dans une colonne de l'incidence matrice pour un graphe non orienté?

∗ **32.** Trouvez une matrice d'adjacence pour chacun de ces graphiques.

a) K_n **b)** C_n **c)** W_n **d)** $K_{m,n}$ **e)** Q_n

∗ **33.** Trouvez les matrices d'incidence des graphiques dans les parties (a) - (d) de Exercice 32.

Dans les exercices 34 à 44, déterminez si la paire de graphiques donnée est isomorphe. Présenter un isomorphisme ou fournir un argument qu'il n'en existe pas.

34. v_1 v_2 u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 v_3 v_4 v_5

35. v_2 u_2 v_1 v_3 u_1 u_3 u_5 u_4 v_5 v_4

36. u_1 u_2 v_1 u_5 v_5 v_2 u_4 u_3 v_4 v_3

37. u_1 u_2 v_1 v_7 v_2 u_7 u_3 v_3 u_6 u_4 v_6 u_5 v_5 v_4

38. u_1 u_2 v_1 v_2 v_5 v_3 u_5 u_4 u_3 v_4

39. u_1 v_1 v_2 u_6 u_2 v_5 v_6 u_5 u_3 v_4 v_3 u_4

40. v_1 v_2 u_1 u_2 u_6 u_3 v_6 v_3 u_5 u_4 v_5 v_4

41. u_1 u_2 u_3 u_5 u_6 u_8

u_4 u_7

v_1 v_2 v_4 v_5 v_6 v_8

v_3 v_7

42. u_6 u_7

u_1 u_2 u_3 u_4 u_5

u_8 u_9 u_{10}

v_6 v_7

v_1 v_2 v_3 v_4 v_5

v_8 v_9 v_{10}

43. u_2 v_2

u_9 v_1 v_8 v_3

u_1 u_{10} u_8 u_3

v_{10}

u_7 v_6 v_7 v_9 v_4

u_6

u_5 u_4

v_5

44. u_1 v_1

u_8 u_2 v_8 v_2

u_7 u_3 v_7 v_3

u_6 u_4 v_6 v_4

u_5 v_5

45. Montrer que l'isomorphisme de graphes simples est une équiva- relation de lence.

46. Supposons que G et H sont des graphes simples isomorphes. Montrer que leurs graphiques complémentaires G et H sont également isomorphe.

47. Décrire la ligne et la colonne d'une matrice d'adjacence de un graphe correspondant à un sommet isolé.

48. Décrivez la ligne d'une matrice d'incidence d'un graphe répondant à un sommet isolé.

49. Montrer que les sommets d'un graphe biparti avec deux ou plus de sommets peuvent être ordonnés de sorte que sa matrice d'adjacence a la forme

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

où les quatre entrées montrées sont des blocs rectangulaires.

Un graphe simple G est appelé **auto-complémentaire** si G et G sont isomorphes.

50. Montrez que ce graphique est auto-complémentaire.

une *b*

ré *c*

51. Trouvez un graphique simple auto-complémentaire avec cinq tices.

∗ **52.** Montrer que si G est un graphe simple auto-complémentaire avec v sommets, puis $v \equiv 0$ ou 1 (mod 4).

53. Pour quels entiers n est C_n auto-complémentaire?

54. Combien de graphes simples non isomorphes existe-t-il avec n sommets, quand n est

a) 2? **b)** 3? **c)** 4?

55. Combien y a-t-il de graphiques simples non isomorphes avec cinq sommets et trois arêtes?

56. Combien y a-t-il de graphiques simples non isomorphes avec six sommets et quatre arêtes?

57. Les graphiques simples avec le maillage d'adjacence suivant trices isomorphe?

une) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

58. Déterminez si les graphiques sans boucles avec ces les matrices d'incidence sont isomorphes.

une) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

59. Étendre la définition de l'isomorphisme des graphes simples à graphiques non orientés contenant des boucles et plusieurs arêtes.

60. Définir l'isomorphisme des graphes dirigés.

Dans les exercices 61 à 64, déterminez si la paire de di-
les graphiques rectifiés sont isomorphes. (Voir l'exercice 60.)

61. u_1 u_2 v_1 v_2

u_3 u_4 v_3 v_4

62. u_1 u_2 v_1 v_2

u_3 u_4 v_3 v_4

63. u_1 v_1

u_4 v_4

u_2 u_3 v_2 v_3

64. u_1 u_2 u_3

u_4 u_5 u_6

v_1 v_2

v_6 v_3

v_5 v_4

65. Montrer que si G et H sont des graphes dirigés isomorphes, puis les converses de G et H (définies dans le préambule de l'exercice 67 de la section 10.2) sont également isomorphes.

66. Montrer que la propriété qu'un graphe est bipartite est un iso-invariant morphique.

67. Trouvez une paire de graphes non isomorphes avec le même séquence gree (définie dans le préambule de l'exercice 36 dans la section 10.2) de sorte qu'un graphique soit bipartite, mais l'autre graphique n'est pas bipartite.

* **68.** Combien de graphes simples dirigés non isomorphes sont là avec n sommets, quand n est

a) 2? **b)** 3? **c)** 4?

* **69.** Quel est le produit de la matrice d'incidence et de sa trans-poser pour un graphique non orienté?

* **70.** La quantité de stockage nécessaire pour représenter un graphique simple avec n sommets et m arêtes en utilisant

a) des listes d'adjacence?

b) une matrice d'adjacence?

c) une matrice d'incidence?

Une **PAIRE du diable** pour un test est une prétendue isomorphisme paire de graphiques non isomorphes que le test ne montre pas qu'ils sont pas isomorphe.

71. Trouvez une paire de diable pour le test qui vérifie le degré (définie dans le préambule de l'exercice 36 de la sec-10.2) dans deux graphiques pour s'assurer qu'ils sont d'accord.

72. Supposons que la fonction f de V_1 à V_2 soit une isomor-phisme des graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$. Montrer qu'il est possible de vérifier ce fait en polyno-en termes de nombre de sommets du graphe, en en termes de nombre de comparaisons nécessaires.

Connectivité

introduction

De nombreux problèmes peuvent être modélisés avec des chemins formés en se déplaçant le long des bords des graphiquesPour par exemple, le problème de déterminer si un message peut être envoyé entre deux ordinateurs l'utilisation de liens intermédiaires peut être étudiée avec un modèle graphique.Problèmes de planification efficace des itinéraires pour la livraison du courrier, la collecte des ordures, les diagnostics dans les réseaux informatiques, etc. peuvent être résolu en utilisant des modèles qui impliquent des chemins dans les graphiques.

Chemins

De manière informelle, un **chemin** est une séquence d'arêtes qui commence au sommet d'un graphique et se déplace de sommet à sommet le long des bords du graphique.En parcourant ses bords, le chemin visite les sommets le long de ce chemin, c'est-à-dire les extrémités de ces bords.

Une définition formelle des chemins et de la terminologie associée est donnée dans la définition 1.

DÉFINITION 1 Soit n un entier non négatif et G un graphe non orienté. Un *chemin* de *longueur n à* partir de u à v dans G est une suite de n arêtes $e_1, \ldots, e_n$ de G pour laquelle il existe une suite $x_0 = u, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = v$ de sommets tels que e_i a, pour $i = 1, \ldots, n$, les extrémités x_{i-1} et x_i. Lorsque le graphe est simple, nous désignons ce chemin par sa séquence de sommets $x_0, x_1, \ldots, x_n$ (car lister ces sommets détermine uniquement le chemin). Le chemin est un *circuit* s'il commence et se termine au même sommet, c'est-à-dire si $u = v$, et a une longueur supérieure à zéro. Le chemin ou le cir-le circuit *passe par* les sommets $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ ou *traverse* les arêtes $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Un chemin ou un circuit est *simple* s'il ne contient pas le même front plus d'une fois.

Lorsqu'il n'est pas nécessaire de distinguer plusieurs arêtes, on notera un chemin $e_1, e_2, \ldots, e_n$, où e_i est associé à $\{x_{i-1}, x_i\}$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$ par sa séquence de sommets $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Cette notation identifie un chemin uniquement jusqu'à quel sommet il passe.

Par conséquent, il ne spécifie pas un chemin unique lorsqu'il y a plus d'un chemin qui passe à travers cette séquence de sommets, qui se produira si et seulement s'il y a plusieurs arêtes entre certains sommets successifs de la liste. Notez qu'un chemin de longueur zéro se compose d'un seul sommet.

Remarque: Il existe une variation considérable de la terminologie concernant les concepts définis dans la définition 1. Par exemple, dans certains livres, le terme **marche** est utilisé à la place de *chemin*, où une marche est définie comme une séquence alternée de sommets et d'arêtes d'un graphique, $v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n$, où v_{i-1} et v_i sont les extrémités de e_i pour $i = 1, 2, \ldots, n$. Lorsque cette terminologie est utilisée, la **marche fermée** est utilisée à la place du *circuit* pour indiquer une marche qui commence et se termine au même sommet, et le **sentier** est utilisé pour désigner une marche qui n'a pas répété bord (remplaçant le terme *chemin simple*). Lorsque cette terminologie est utilisée, le **chemin de** terminologie est souvent utilisé pour une piste sans sommets répétés, en conflit avec la terminologie de la définition 1. En raison de cette variation terminologique, vous devrez vous assurer de l'ensemble de définitions utilisé dans un livre ou un article particulier lorsque vous lisez des informations sur la traversée des bords d'un graphique Le texte [GrYe06] est une bonne référence pour la terminologie alternative décrite dans cette remarque.

EXEMPLE 1 Dans le graphique simple montré sur la figure 1, a, d, c, f, e est un chemin simple de longueur 4, car $\{a, d\}$, $\{d, c\}$, $\{c, f\}$ et $\{f, e\}$ sont tous des bords. Cependant, d, e, c, a n'est pas un chemin, car $\{e, c\}$ n'est pas un bord. Notez que b, c, f, e, b est un circuit de longueur 4 car $\{b, c\}$, $\{c, f\}$, $\{f, e\}$ et $\{e, b\}$ sont bords, et ce chemin commence et se termine en b. Le chemin a, b, e, d, a, b, qui est de longueur 5, n'est pas simple car il contient deux fois l'arête $\{a, b\}$. ▲

Les chemins et circuits dans les graphes dirigés ont été présentés au chapitre 9. Nous fournissons maintenant plus définitions générales.

une *b* *c*

ré *e* *F*

FIGURE 1 Un graphique simple.

DÉFINITION 2 Soit n un entier non négatif et G un graphe orienté. Un *chemin* de longueur n de u à v dans G est un séquence d'arêtes $e_1, e_2, ..., e_n$ de G telle que e_1 est associée à (x_0, x_1), e_2 est associée avec (x_1, x_2), et ainsi de suite, avec e_n associé à (x_{n-1}, x_n), où $x_0 = u$ et $x_n = v$. Quand il n'y a pas de bords multiples dans le graphe orienté, ce chemin est indiqué par sa séquence de sommets $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$. Un chemin de longueur supérieure à zéro qui commence et se termine au même sommet est appelé un *circuit* ou un *cycle*. Un chemin ou un circuit est appelé *simple* s'il ne contient pas le même bord plus d'une fois.

Remarque: une terminologie autre que celle donnée dans la définition 2 est souvent utilisée pour les concepts définis Là. En particulier, la terminologie alternative qui utilise la *marche, la marche fermée, le sentier* et le *chemin* (décrit dans les remarques qui suivent la définition 1) peut être utilisé pour les graphiques dirigés. Voir [GrYe05] pour plus de détails.

Notez que le sommet terminal d'une arête dans un chemin est le sommet initial de l'arête suivante dans le chemin. Lorsqu'il n'est pas nécessaire de distinguer plusieurs arêtes, on notera un chemin $e_1, e_2, ..., e_n$, où e_i est associé à (x_{i-1}, x_i) pour $i = 1, 2, ..., n$, par sa séquence de sommets $x_0, x_1, ..., x_n$. La notation identifie un chemin uniquement jusqu'à ce que les sommets qu'il traverse. Il peut y avoir plus d'un chemin qui traverse cette séquence de sommets, ce qui se produit si et seulement s'il y a plusieurs arêtes entre deux sommets successifs dans la liste.

Les chemins représentent des informations utiles dans de nombreux modèles de graphique, comme le montrent les exemples 2 à 4.

EXEMPLE 2 **Chemins dans les graphiques de connaissance** Dans un graphique de connaissance, il y a un chemin entre deux personnes s'il y a une chaîne de personnes reliant ces personnes, où deux personnes adjacentes dans la chaîne se connaît. Par exemple, dans la figure 6 de la section 10.1, il y a une chaîne de six les gens reliant Kamini et Ching. De nombreux spécialistes des sciences sociales ont émis l'hypothèse que presque tous les paire de personnes dans le monde sont liées par une petite chaîne de personnes, contenant peut-être seulement cinq ou moins de gens. Cela signifierait que presque chaque paire de sommets dans le graphique de connaissance contenant toutes les personnes dans le monde est lié par un chemin de longueur ne dépassant pas quatre Le jeu *Six Degrés de séparation* de John Guare est basé sur cette notion. ▲

EXEMPLE 3 **Chemins dans les graphiques de collaboration** Dans un graphique de collaboration, deux personnes a et b sont connectées par un chemin quand il y a une séquence de personnes commençant par a et se terminant par b telle que le les extrémités de chaque bord du chemin sont des personnes qui ont collaboré. Nous considérerons deux graphiques de collaboration particuliers ici. Tout d'abord, dans le graphique de collaboration académique des personnes qui ont écrit des articles en mathématiques, le **nombre Erd˝os** d'une personne m (défini en termes de dans l'exercice supplémentaire 14 du chapitre 9) est la longueur du chemin le plus court entre m et le mathématicien extrêmement prolifique Paul Erd˝os (décédé en 1996). Autrement dit, les Erd˝os nombre d'un mathématicien est la longueur de la plus courte chaîne de mathématiciens qui commence avec Paul Erd˝os et se termine par ce mathématicien, où chaque paire de mathématiciens adjacents ont écrit un document conjoint. Le nombre de mathématiciens avec chaque nombre Erd˝os au début 2006, selon le projet Erd˝os Number, est présentée dans le tableau 1.

Dans le graphique hollywoodien (voir l'exemple 3 à la section 10.1), deux acteurs a et b sont liés lorsque il y a une chaîne d'acteurs reliant a et b, où tous les deux acteurs adjacents à la chaîne ont a joué dans le même film. Dans le graphe hollywoodien, le **nombre** de **Bacon** d'un acteur c est défini être la longueur du chemin le plus court reliant c et le célèbre acteur Kevin Bacon. Comme de nouveaux films sont réalisés, dont de nouveaux avec Kevin Bacon, le nombre d'acteurs de Bacon peut changement. Dans le tableau 2, nous montrons le nombre d'acteurs avec chaque numéro de bacon au début de 2011 en utilisant les données du site Web Oracle of Bacon. Les origines du numéro Bacon d'un acteur remonte au début des années 1990, lorsque Kevin Bacon a fait remarquer qu'il avait travaillé avec tout le monde à Hollywood ou quelqu'un qui a travaillé avec eux. Cela a amené certaines personnes à inventer une fête

Remplacez Kevin Bacon par votre propre acteur préféré inventer un nouveau jeu de société

TABLEAU 1 Le nombre des mathématiciens avec un Erd˝os donné Nombre (au début 2006).

Erd˝os Nombre	*Nombre de personnes*
0	1
1	504
2	6 593
3	33 605
4	83 642
5	87 760
6	40,014
sept	11 591
8	3,146
9	819
dix	244
11	68
12	23
13	5

TABLEAU 2 Le nombre des acteurs avec une donnée Numéro de bacon (au début 2011).

Bacon Nombre	*Nombre de personnes*
0	1
1	2,367
2	242 407
3	785,389
4	200 602
5	14 048
6	1 277
sept	114
8	16

jeu où les participants ont été mis au défi de trouver une séquence de films menant de chaque acteur nommé à Kevin Bacon. Nous pouvons trouver un numéro similaire à un numéro de Bacon en utilisant n'importe quel acteur comme centre de l'univers agissant. ▲

Connectivité dans les graphiques non orientés

Quand un réseau informatique a-t-il la propriété que chaque paire d'ordinateurs peut partager si des messages peuvent être envoyés via un ou plusieurs ordinateurs intermédiaires?Quand un graphique est utilisé pour représenter ce réseau informatique, où les sommets représentent les ordinateurs et les bords représenter les liens de communication, cette question devient: Quand y a-t-il toujours un chemin entre deux sommets dans le graphique?

DÉFINITION 3 Un graphe non orienté est appelé *connecté* s'il existe un chemin entre chaque paire de sommets du graphique. Un graphe non orienté qui n'est pas *connecté* est appelé *déconnecté* . nous disons que nous *déconnectons* un graphique lorsque nous supprimons des sommets ou des bords, ou les deux, pour produire un sous-graphique déconnecté.

Ainsi, deux ordinateurs du réseau peuvent communiquer si et seulement si le graphique de ce réseau est connecté.

EXEMPLE 4 Le graphe G_1 de la figure 2 est connecté, car pour chaque paire de sommets distincts il y a un chemin entre eux (le lecteur doit vérifier cela).Cependant, le graphique G_2 de la figure 2 n'est pas connecté. Par exemple, il n'y a pas de chemin dans G_2 entre les sommets a et d . ▲

Nous aurons besoin du théorème suivant au chapitre 11.

Épisode 304

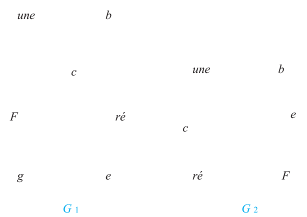


FIGURE 2 **Les graphiques G_1 et G_2 .**

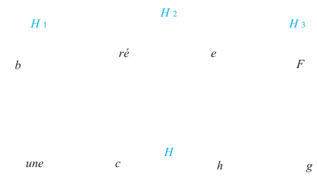


FIGURE 3 **Le graphique H et son Composants connectés H_1 , H_2 et H_3 .**

THÉORÈME 1 Il existe un chemin simple entre chaque paire de sommets distincts d'un graphe non orienté connecté.

Preuve: Soit u et v deux sommets distincts du graphe non dirigé connecté $G = (V, E)$. Être-parce que G est connecté, il y a au moins un chemin entre u et v . Soit $x_0 , x_1 , ..., x_n$, où $x_0 = u$ et $x_n = v$, être la séquence de sommets d'un chemin de moindre longueur.Ce chemin de moindre longueur est simple.À voyez cela, supposons que ce ne soit pas simple. Alors $x_i = x_j$ pour certains i et j avec $0 \leq i < j$. Cela signifie que il y a un chemin de u à v de longueur plus courte avec la séquence de sommets $x_0 , x_1 , ..., x_{i-1} , x_j , ..., x_n$ obtenu en supprimant les arêtes correspondant à la séquence de sommets $x_i , ..., x_{j-1}$.

COMPOSANTS CONNECTÉS Un **composant connecté** d'un graphe G est un sous-graphique de G qui n'est pas un sous -graphe propre d'un sous -graphe connexe de G . Autrement dit, un connecté composant d'un graphe G est un sous -graphe connecté de maximale de G . Un graphe G non connecté a deux composants connectés ou plus qui sont disjoints et ont G comme union.

EXEMPLE 5 Quels sont les composants connectés du graphique H montré dans la figure 3?

Solution: Le graphique H est l'union de trois sous-graphes connectés disjoints H_1 , H_2 et H_3 , montrés sur la figure 3. Ces trois sous -graphes sont les composantes connexes de H . ▲

EXEMPLE 6 **Composantes connectées des graphes d'appel** Deux sommets x et y sont dans la même composante d'un graphique des appels téléphoniques (voir l'exemple 4 à la section 10.1) lorsqu'il y a une séquence d'appels téléphoniques commençant à x et se terminant à y . Lorsqu'un graphique d'appel pour les appels téléphoniques effectués au cours d'une jour dans le réseau AT&T a été analysé, ce graphique a été trouvé pour avoir 53 767 087 sommets, plus de 170 millions de fronts et plus de 3,7 millions de composants connectés. La plupart de ces les composants étaient petits; environ les trois quarts étaient constitués de deux sommets représentant des paires de numéros de téléphone qui ne s'appelaient qu'un Ce graphique a un énorme composant connecté avec 44 989 297 sommets représentant plus de 80% du total. De plus, chaque sommet ce composant peut être lié à tout autre sommet par une chaîne de 20 appels au maximum. ▲

À quel point un graphique est-il connecté?

Supposons qu'un graphique représente un réseau informatique. Savoir que ce graphique est connecté indique nous que deux ordinateurs du réseau peuvent communiquer. Cependant, nous aimerions également comprendre la fiabilité de ce réseau. Par exemple, sera-t-il toujours possible pour tous les ordinateurs de communiquer après la défaillance d'un routeur ou d'une liaison de communication? Pour répondre à cette question et à des questions similaires, nous développons maintenant de nouveaux concepts.

Parfois, la suppression d'un graphique d'un sommet et de toutes les arêtes incidentes produit un sous-graphique avec plus de composants connectés. Ces sommets sont appelés **sommets coupés** (ou **points d'articulation**). La suppression d'un sommet coupé d'un graphe connecté produit un sous-graphe qui n'est pas connecté. De façon analogue, une arête dont la suppression produit un graphique avec plus de composants connectés que dans le graphique d'origine est appelé un **bord coupé** ou un **pont** . Notez que dans un graphique représentant un ordinateur réseau, un sommet coupé et un bord coupé représentent un routeur essentiel et un lien essentiel qui ne peut pas échouent pour que tous les ordinateurs puissent communiquer.

EXEMPLE 7 Trouvez les sommets coupés et les bords coupés dans le graphique G_1 illustré à la figure 4.

Solution: les sommets coupés de G_1 sont b , c et e . La suppression d'un de ces sommets (et son bords adjacents) déconnecte le graphique. Les bords coupés sont $\{a, b\}$ et $\{c, e\}$. Supprimer l'un ou l'autre de ces bords déconnecte G_1 . ▲

CONNECTIVITÉ VERTEX Tous les graphiques n'ont pas de sommets coupés. Par exemple, le le graphe K_n , où $n \geq 3$, n'a pas de sommets coupés. Lorsque vous supprimez un sommet de K_n et toutes les arêtes qui lui est associée , le sous-graphe résultant est le graphe complet K_{n-1} , un graphe connexe. Connecté Les graphiques sans sommets coupés sont appelés **graphiques non séparables** et peuvent être considérés comme plus connectés que ceux avec un sommet coupé. Nous pouvons étendre cette notion en définissant un plus granulé mesure de la connectivité du graphe basée sur le nombre minimum de sommets pouvant être supprimés pour déconnecter un graphique.

b

une *ré* *F* *g* *une* *c* *ré*

b *c* *e* *h* *F* *e*

G_1 G_2

b *c* *ré* *b* *c* *ré*

g

une *g* *F* *e* *une* *F* *e*

G_3 G_4

une *b* *c* *ré*

h *g* *F* *e*

G_5

FIGURE 4 Quelques graphiques connectés

Un sous-ensemble V de l'ensemble de sommets V de $G = (V, E)$ est un **sommet coupé** ou un **ensemble de séparation**, si $G - V$ est déconnecté. Par exemple, dans le graphique de la figure 1, l'ensemble $\{b, c, e\}$ est un sommet coupé avec trois vertices, comme le lecteur devrait vérifier. Nous laissons au lecteur (exercice 51) le soin de montrer que chaque le graphe connecté, à l'exception d'un graphe complet, a une coupe de sommet. Nous définissons la **connectivité des sommets** d'un graphe G incomplet, noté $\kappa(G)$, comme le nombre minimum de sommets dans un sommet Couper.

κ est le grec minuscule lettre kappa.

Lorsque G est un graphe complet, il n'a pas de coupes de sommets, car la suppression de tout sous-ensemble de ses sommets et tous les bords incidents laissent toujours un graphique complet. Par conséquent, nous ne pouvons pas définir $\kappa(G)$ comme nombre minimum de sommets dans un sommet coupé lorsque G est terminé. Au lieu de cela, nous *fixons* $\kappa(K_n) = n - 1$, le nombre de sommets devait être supprimé pour produire un graphique avec un seul sommet.

Par conséquent, pour chaque graphe G, $\kappa(G)$ est le nombre minimum de sommets qui peuvent être déplacé de G pour déconnecter G ou produire un graphique avec un seul sommet. Nous avons $0 \leq \kappa(G) \leq n - 1$ si G a n sommets, $\kappa(G) = 0$ si et seulement si G est déconnecté ou $G = K_1$, et $\kappa(G) = n - 1$ si et seulement si G est complet [voir exercice 52 (a)].

Plus $\kappa(G)$ est grand, plus nous considérons G connecté. Graphes déconnectés et K_1 ont $\kappa(G) = 0$, graphiques connectés avec des sommets coupés et K_2 ont $\kappa(G) = 1$, graphiques sans coupe sommets qui peuvent être déconnectés en supprimant deux sommets et K_3 ont $\kappa(G) = 2$, et ainsi sur. On dit qu'un graphe est k **-connecté** (ou k **-vertex-connecté**), si $\kappa(G) \geq k$. Un graphique G est 1-connecté s'il est connecté et non un graphe contenant un seul sommet; un graphique est à 2 connexions, ou **biconnecté**, s'il n'est pas séparable et a au moins trois sommets. Notez que si G est un k -connecté graphique, alors G est un graphique j- connecté pour tout j avec $0 \leq j \leq k$.

EXEMPLE 8 Trouvez la connectivité des sommets pour chacun des graphiques de la figure 4.

Solution: Chacun des cinq graphiques de la figure 4 est connecté et a plus de sommets, donc chacun de ces graphiques a une connectivité vertex positive. Parce que G_1 est un graphe connecté avec une coupe sommet, comme le montre l'exemple 7, nous savons que $\kappa(G_1) = 1$. De même, $\kappa(G_2) = 1$, car c est un couper le sommet de G_2.

Le lecteur doit vérifier que G_3 n'a pas de sommets coupés. mais que $\{b, g\}$ est une coupe au sommet. Par conséquent, $\kappa(G_3) = 2$. De même, parce que G_4 a un sommet coupé de taille deux, $\{c, f\}$, mais pas de sommet coupé. Il s'ensuit que $\kappa(G_4) = 2$. Le lecteur peut vérifier que G_5 n'a pas de sommet coupé de taille deux, mais $\{b, c, f\}$ est une coupe au sommet de G_5. Donc, $\kappa(G_5) = 3$. ▲

λ est le grec minuscule lettre lambda.

CONNECTIVITÉ DE BORD On peut également mesurer la connectivité d'un graphe connecté $G = (V, E)$ en termes de nombre minimum d'arêtes que l'on peut retirer pour le déconnecter. Si un graphique a une arête de coupe, nous devons seulement l'enlever pour déconnecter G. Si G n'a pas de bord coupé, nous recherchons le plus petit ensemble d'arêtes pouvant être retiré pour le déconnecter. Un ensemble d'arêtes E est appelé une **coupe d'arête** de G si le sous-graphe $G - E$ est déconnecté. La **connectivité de pointe** d'un graphe G, notée $\lambda(G)$, est le nombre minimum d'arêtes dans une coupe de bord de G. Cette définit $\lambda(G)$ pour tous les graphes connectés avec plus d'un sommet car il est toujours possible pour déconnecter un tel graphe en supprimant toutes les arêtes incidentes à l'un de ses sommets. Notez que $\lambda(G) = 0$ si G n'est pas connecté. On précise également que $\lambda(G) = 0$ si G est un graphe composé d'un sommet unique. Il s'ensuit que si G est un graphe à n sommets, alors $0 \leq \lambda(G) \leq n - 1$. On quitte au lecteur [Exercice 52 (b)] pour montrer que $\lambda(G) = n - 1$ où G est un graphe à n sommets si et seulement si $G = K_n$, ce qui équivaut à l'affirmation que $\lambda(G) \leq n - 2$ lorsque G n'est pas un graphique complet.

EXEMPLE 9 Trouvez la connectivité de bord de chacun des graphiques de la figure 4.

Solution: Chacun des cinq graphiques de la figure 4 est connecté et a plus d'un sommet, donc nous sachez que tous ont une connectivité de pointe positive. Comme nous l'avons vu dans l'exemple 7, G_1 a une coupe bord, donc $\lambda(G_1) = 1$.

Le graphique G_2 n'a pas de bords coupés, comme le lecteur doit vérifier, mais la suppression des deux bords $\{a, b\}$ et $\{a, c\}$ le déconnectent. Donc, $\lambda(G_2) = 2$. De même, $\lambda(G_3) = 2$, car G_3 n'a pas couper les bords, mais la suppression des deux bords $\{b, c\}$ et $\{f, g\}$ le déconnecte.

Le lecteur doit vérifier que la suppression de deux arêtes ne déconnecte pas G_4, mais la suppression des trois arêtes $\{b, c\}$, $\{a, f\}$ et $\{f, g\}$ le déconnecte. Donc, $\lambda(G_4) = 3$. Enfin, le lecteur devrait vérifier que $\lambda(G_5) = 3$, car la suppression de deux de ses bords ne déconnecte pas mais la suppression de $\{a, b\}$, $\{a, g\}$ et $\{a, h\}$ le fait. ▲

UNE INÉGALITÉ POUR LA CONNECTIVITÉ VERTEX ET LA CONNECTIVITÉ BORDURE

Lorsque $G = (V, E)$ est un graphe connexe non complet avec au moins trois sommets, le minimum degré d'un sommet de G est une limite supérieure à la fois pour la connectivité au sommet de G et le bord la connectivité de G. Autrement dit, $\kappa(G) \leq \min_{v \in V} \deg(v)$ et $\lambda(G) \leq \min_{v \in V°}(v)$. Pour voir ça, observer que la suppression de tous les voisins d'un sommet fixe de degré minimum déconnecte G, et la suppression de tous les bords qui ont un sommet fixe de degré minimum en tant que point d'extrémité déconnecte G.

Dans l'exercice 55, nous demandons au lecteur de montrer que $\kappa(G) \leq \lambda(G)$ lorsque G est un non connecté graphique complet. Notez également que $\kappa(K_n) = \lambda(K_n) = \min_{v \in V} \deg(v) = n - 1$ lorsque n est positif entier et que $\kappa(G) = \lambda(G) = 0$ lorsque G est un graphe déconnecté. Mettre ces faits ensemble, établit que pour tous les graphiques G,

$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \min_{v \in V} \deg(v)$.

APPLICATIONS DE VERTEX ET EDGE CONNECTIVITÉ Graphique jeux de connectivité un rôle important dans de nombreux problèmes de fiabilité des réseaux.Par exemple, comme nous mentionné dans notre introduction des sommets coupés et des bords coupés, nous pouvons modéliser un réseau de données en utilisant sommets pour représenter les routeurs et arêtes pour représenter les liens entre eux.La connectivité vertex du graphique résultant est égal au nombre minimum de routeurs qui déconnectent le réseau lorsque ils sont hors service. Si moins de routeurs sont en panne, la transmission de données entre chaque paire de routeurs est toujours possible. La connectivité de périphérie représente le nombre minimum de liaisons par fibre optique peut être arrêté pour déconnecter le réseau.Si moins de liens sont en panne, il sera toujours possible pour les données à transmettre entre chaque paire de routeurs.

Nous pouvons modéliser un réseau routier, en utilisant des sommets pour représenter les intersections d'autoroutes et bords pour représenter des sections de routes passant entre les intersections.La connectivité au sommet du le graphique résultant représente le nombre minimum d'intersections qui peuvent être fermées à un endroit particulier temps qui rend impossible de voyager entre toutes les deux intersections.Si moins d'intersections sont fermés, le déplacement entre chaque paire d'intersections est toujours possible. La connectivité de pointe représente le nombre minimum de routes pouvant être fermées pour déconnecter le réseau routier. Si moins d'autoroutes sont fermées, il sera toujours possible de se déplacer entre deux intersections. De toute évidence, il serait utile que le service routier tienne compte de ces informations lors de la planification des réparations routières.

Connectivité dans les graphiques dirigés

Il existe deux notions de connectivité dans les graphes dirigés, selon que les directions des bords sont considérés.

DÉFINITION 4 Un graphe orienté est *fortement connecté* s'il y a un chemin de a vers b et de b vers a chaque fois a et b sont des sommets dans le graphique.

Pour qu'un graphe dirigé soit fortement connecté, il doit y avoir une séquence d'arêtes dirigées depuis n'importe quel sommet du graphique vers tout autre sommet.Un graphique dirigé peut ne pas être fortement connectés mais toujours «en un seul morceau». La définition 5 rend cette notion précise.

DÉFINITION 5 Un graphe orienté est *faiblement connecté* s'il existe un chemin entre deux sommets dans le graphique non orienté sous-jacent.

Autrement dit, un graphe orienté est faiblement connecté si et seulement s'il y a toujours un chemin entre deux sommets lorsque les directions des bords ne sont pas prises en compte.De toute évidence, tout fortement connecté le graphe orienté est également faiblement connecté.

EXEMPLE 10 Les graphes dirigés G et H représentés sur la figure 5 sont-ils fortement connectés? Sont-ils faiblement connecté?

Solution: G est fortement connecté car il y a un chemin entre deux sommets dans ce graphique dirigé (le lecteur doit vérifier cela). Par conséquent, G est également faiblement connecté. Le graphique H n'est pas fortement connecté. Il n'y a pas de chemin dirigé de a vers b dans ce graphique. Cependant, H est faiblement connecté, car il existe un chemin entre deux sommets dans le sous-jacent non orienté graphique de H (le lecteur doit vérifier cela). ▲

COMPOSANTS FORTS D'UN GRAPHIQUE DIRECTE Les sous-graphiques d'un graphique dirigé G qui sont fortement connectés mais ne sont pas contenus dans des sous-graphiques plus fortement connectés, c'est-à-dire les sous-graphiques maximaux fortement connectés, sont appelés les **composants fortement connectés** ou **composants solides** de G . Notez que si a et b sont deux sommets dans un graphe orienté, leur fort les composants sont identiques ou disjoints. (Nous laissons la preuve de ce dernier fait à l'exercice 17.)

EXEMPLE 11 Le graphique H de la figure 5 a trois composantes fortement connectées, constituées du sommet a ; le sommet e ; et le sous-graphe composé des sommets b , c et d et des arêtes (b, c) , (c, d) , et (d, b) . ▲

EXEMPLE 12 **Les composants fortement connectés du** graphe Web Le graphe Web introduit dans L'exemple 5 de la section 10.1 représente des pages Web avec des sommets et des liens avec des bords dirigés. UNE instantané du Web en 1999 a produit un graphique Web avec plus de 200 millions de sommets et plus de 1,5 milliards d'arêtes (chiffres qui ont maintenant considérablement augmenté). (Voir [Br00] pour plus de détails.)

En 2010, le graphique Web a été estimé à au moins 55 milliards de sommets et un billion de bords. Cela implique que plus de 40 To d'ordinateur la mémoire aurait été nécessaire pour représenter son matrice d'adjacence.

Le graphique non orienté sous-jacent de ce graphique Web n'est pas connecté, mais il a un composant qui comprend environ 90% des sommets du graphique. Le sous-graphique du graphique dirigé original correspondant à cette composante connectée du sous-jacent non orienté graphique (c'est-à-dire avec les mêmes sommets et toutes les arêtes dirigées reliant les sommets de ce graphique) a un très gros composant fortement connecté et de nombreux petits. Le premier s'appelle la **composante géante fortement connectée (GSCC)** du graphe orienté. Une page Web dans ce Le composant peut être atteint en suivant les liens commençant à n'importe quelle autre page de ce composant. le GSCC dans le graphique Web produit par cette étude a révélé plus de 53 millions de sommets. Les sommets restants dans la grande composante connectée du graphe non orienté représentent trois types de pages Web différents: des pages accessibles depuis une page du GSCC, mais ne renvoyez pas à ces pages en suivant une série de liens; les pages qui renvoient aux pages de la

une *b* *une* *b*

c *c*

e *ré* *e* *ré*

g *H*

FIGURE 5 **La scène graphes G et H .**

Le GSCC suit une série de liens, mais ne peut être atteint en suivant les liens sur les pages du GSCC; et les pages qui ne peuvent pas atteindre les pages du GSCC et ne peuvent pas être atteintes à partir des pages de le GSCC suivant une série de liens. Dans cette étude, chacun de ces trois autres ensembles s'est révélé ont environ 44 millions de sommets. (Il est assez surprenant que ces trois ensembles soient proches de la même taille.) ▲

Chemins et isomorphisme

Il existe plusieurs façons dont les chemins et les circuits peuvent aider à déterminer si deux graphiques sont isomorphe. Par exemple, l'existence d'un simple circuit d'une longueur particulière est utile invariant qui peut être utilisé pour montrer que deux graphiques ne sont pas isomorphes.De plus, les chemins peuvent être utilisé pour construire des mappages qui peuvent être des isomorphismes.

Comme nous l'avons mentionné, un invariant isomorphe utile pour les graphiques simples est l'existence d'un circuit simple de longueur k , où k est un entier positif supérieur à 2. (La preuve qu'il s'agit d'un invariant est laissé comme exercice 60.) L'exemple 13 illustre comment cet invariant peut être utilisé pour montrer que deux graphiques ne sont pas isomorphes.

EXEMPLE 13 Déterminez si les graphiques G et H représentés sur la figure 6 sont isomorphes.

Solution: Les deux G et H ont six sommets et huit arêtes. Chacun a quatre sommets de degré trois et deux sommets de degré deux. Ainsi, les trois invariants - nombre de sommets, nombre de arêtes et degrés de sommets - tous sont d'accord pour les deux graphiques.Cependant, H a un circuit simple de longueur trois, à savoir v_1 , v_2 , v_6 , v_1 , alors que G n'a pas de circuit simple de longueur trois, comme peut être déterminé par inspection (tous les circuits simples en$G$ ont une longueur d'au moins quatre). Car l'existence d'un simple circuit de longueur trois est un invariant isomorphe,G et H ne sont pas isomorphe. ▲

Nous avons montré comment l'existence d'un type de chemin, à savoir, un simple circuit d'un particulier longueur, peut être utilisé pour montrer que deux graphiques ne sont pas isomorphes.Nous pouvons également utiliser des chemins pour trouver des cartographies qui sont des isomorphismes potentiels.

EXEMPLE 14 Déterminez si les graphiques G et H montrés sur la figure 7 sont isomorphes.

Solution: Les deux G et H ont cinq sommets et six arêtes, lesdeux ont deux sommets de degré trois et trois sommets de degré deux, et les deux ont un circuit simple de longueur trois, un circuit simple de longueur quatre, et un simple circuit de longueur cinq.Parce que tous ces invariants isomorphes sont d'accord, G et H peuvent être isomorphes.

u_1 v_1
u_6 u_2 v_6 v_2
u_5 u_3 v_5 v_3
u_4 v_4
g H

FIGURE 6 les graphes G et H .

u_2 v_1
u_1 u_3 v_5 v_2
u_5 u_4 v_4 v_3
g H

FIGURE 7 Les graphiques G et H .

Pour trouver un isomorphisme possible, nous pouvons suivre des chemins qui traversent tous les sommets afin que le les sommets correspondants dans les deux graphiques ont le même degré.Par exemple, les chemins u_1, u_4, u_3, u_2, u_5 dans *G* et v_3, v_2, v_1, v_5, v_4 dans *H* parcourent tous les sommets du graphique; commencer à sommet de degré trois; passer par des sommets de degrés deux, trois et deux, respectivement;et fin à un sommet de degré deux. En suivant ces chemins à travers les graphes, on définit le mapping *f* avec $f(u_1) = v_3$, $f(u_4) = v_2$, $f(u_3) = v_1$, $f(u_2) = v_5$ et $f(u_5) = v_4$. Le lecteur peut montrer que *f* est un isomorphisme, donc *G* et *H* sont isomorphes, soit en montrant que *f* préserve les bords ou en montrant qu'avec les ordonnances appropriées des sommets, les matrices d'adjacence de *G* et *H* sont identiques. ▲

Compter les chemins entre les sommets

Le nombre de chemins entre deux sommets dans un graphique peut être déterminé en utilisant sa contiguïté matrice.

THÉORÈME 2 Soit *G* un graphe de matrice d'adjacence **A** par rapport à l'ordre $v_1, v_2, \ldots, v_n$ de les sommets du graphique (avec bords dirigés ou non dirigés, avec plusieurs bords et boucles permis). Le nombre de chemins différents de longueur *r* de v_i à v_j, où *r* est un entier positif, est égal à la *(i, j)* ème entrée de $\mathbf{A}^r$.

Preuve: Le théorème sera démontré par induction mathématique. Soit *G* un graphe avec adja-matrice de fréquence **A** (en supposant un ordre $v_1, v_2, \ldots, v_n$ des sommets de *G*). Le nombre de chemins de v_i à v_j de longueur 1 est la *(i, j)* ème entrée de **A**, car cette entrée est le nombre d'arêtes de v_i à v_j.

Supposons que la *(i, j)* ème entrée de $\mathbf{A}^r$ est le nombre de chemins différents de longueur *r à* partir de v_i à v_j. Telle est l'hypothèse inductive. Parce que $\mathbf{A}^{r+1} = \mathbf{A}^r\mathbf{A}$, la *(i, j)* ème entrée de $\mathbf{A}^{r+1}$ équivaut à

$$b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \cdots + b_{in}a_{nj},$$

où b_{ik} est la *(i, k)* ème entrée de $\mathbf{A}^r$. Par l'hypothèse inductive, b_{ik} est le nombre de chemins de longueur *r* de v_i à v_k.

Un chemin de longueur $r + 1$ de v_i à v_j est constitué d'un chemin de longueur *r* de v_i à certains sommet intermédiaire v_k, et une arête de v_k à v_j. Par la règle de produit pour le comptage, le nombre de ces chemins est le produit du nombre de chemins de longueur *r* de v_i à v_k, à savoir, b_{ik}, et le nombre d'arêtes de v_k à v_j, à savoir, un a_{kj}. Lorsque ces produits sont ajoutés pour tous les possibles sommets intermédiaires v_k, le résultat souhaité suit la règle de somme pour le comptage.

EXEMPLE 15 Combien de chemins de longueur quatre existe-t-il de *a* à *d* dans le graphe simple *G* de la figure 8?

une *b*

ré *c*

FIGURE 8 Le Graphique *G*.

Solution: La matrice d'adjacence de *G* (ordonnant les sommets comme *a, b, c, d*) est

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Par conséquent, le nombre de chemins de longueur quatre de *a* à *d* est la *(* 1 , 4 *)* ème entrée de $\mathbf{A}^4$. Car

$$\mathbf{A}^4 = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix},$$

il y a exactement huit chemins de longueur quatre de$a$ à d . En examinant le graphique, nous voyons que a, b, a, b, d ; a, b, a, c, d ; a, b, d, b, d ; a, b, d, c, d ; a, c, a, b, d ; a, c, a, c, d ; a, c, d, b, d ; et a, c, d, c, d sont les huit chemins de longueur quatre de$a$ à d . ▲

Le théorème 2 peut être utilisé pour trouver la longueur du chemin le plus court entre deux sommets d'un graphique (voir exercice 56), et il peut également être utilisé pour déterminer si un graphique est connecté (voir Exercices 61 et 62).

Des exercices

1. Chacune de ces listes de sommets forme-t-elle un chemin dans le graphique suivant? Quels chemins sont simples? Qui sont cuits? Quelles sont les longueurs de ceux qui sont des chemins?

a) *a, e, b, c, b* **b)** *a, e, a, d, b, c, a*
c) *e, b, a, d, b, e* **d)** *c, b, d, a, e, c*

une *b* *c*

ré *e*

2. Chacune de ces listes de sommets forme-t-elle un chemin dans le graphique suivant? Quels chemins sont simples? Qui sont cuits? Quelles sont les longueurs de ceux qui sont des chemins?

a) *a, b, e, c, b* **b)** *a, d, a, d, a*
c) *a, d, b, e, a* **d)** *a, b, e, c, b, d, a*

une *b* *c*

ré *e*

Dans les exercices 3 à 5, déterminez si le graphique donné est connecté.

3.

4.

5.

6. Combien de composants connectés chacun des graphiques des exercices 3 à 5? Pour chaque graphique, trouvez chacun de ses composants connectés.

7. Que font les composants connectés de la connaissance les graphiques représentent?

8. Que font les composants connectés d'une collaboration graphique représente?

9. Expliquez pourquoi dans le graphique de collaboration des mathématiciens (voir l'exemple 3 à la section 10.1) un sommet représentant un mathématicien est dans le même composant connecté que le sommet représentant Paul Erd˝os si et seulement si cette matri- le maticien a un nombre d'Erd˝os fini.

10. Dans le graphique Hollywood (voir l'exemple 3 à la section 10.1), quand est le sommet représentant un acteur dans le même contexte composant connecté comme sommet représentant Kevin Ba- con?

11. Déterminez si chacun de ces graphiques est fortement connecté et sinon, s'il est faiblement connecté.

a) *un* *b* *c*

e *ré*

b) *un* *b*

c

e *ré*

c) *b*
une *c*

g *ré*
F *e*

12. Déterminez si chacun de ces graphiques est fortement connecté et sinon, s'il est faiblement connecté.

une) *une* *b* *c*

F *e* *ré*

b) *b*

une *c*

F *ré*

e

c) *une* *b* *c*

g *ré*

F *e*

13. Que font les composants fortement connectés d'un télé- le graphique des appels téléphoniques représente?

14. Trouvez les composants fortement connectés de chacun de ces graphiques.

a) *un* *b* *c*

e *ré*

b) *un* *b* *c*

F *e* *ré*

c)

une *b* *c* *ré* *e*

je *h* *g* *F*

15. Trouvez les composants fortement connectés de chacun de ces graphiques.

a) *un* *b* *c*

F *e* *ré*

b) *un* *b* *c* *ré*

h *g* *F* *e*

c) *un* *b* *c* *ré* *e*

je *h* *g* *F*

Supposons que $G = (V, E)$ est un graphe orienté. Un sommet $w \in V$ est **accessible à** partir d'un sommet $v \in V$ s'il y a un chemin dirigé de v à w . Les sommets v et w sont **accessibles mutuellement** si il y a à la fois un chemin dirigé de v à w et un chemin dirigé à partir de w pour v dans G .

16. Montrer que si $G = (V, E)$ est un graphe orienté et u , v et w sont des sommets dans V pour lesquels u et v sont mutuellement atteignables- et v et w sont accessibles mutuellement, alors u et w sont accessibles mutuellement.

17. Montrer que si $G = (V, E)$ est un graphe orienté, alors le les composantes fortes de deux sommets u et v de V sont soit identiques ou disjoints. [*Astuce:* utilisez l'exercice 16.]

18. Montrer que tous les sommets visités dans un chemin dirigé reliant deux sommets dans le même composant fortement connecté d'un graphique dirigé sont également dans ce fortement connecté composant.

19. Trouver le nombre de chemins de longueur n entre deux différences ent sommets dans K_4 si n est

a) 2. **b)** 3. **c)** 4. **d)** 5.

20. Utilisez des chemins pour montrer que ces graphiques ne sont pas iso- phique ou pour trouver un isomorphisme entre ces graphes.

u_1 u_2 v_1 v_2

u_5 u_6 v_5 v_6

u_8 u_7 v_8 v_7

u_4 u_3 v_4 v_3

g *H*

21. Utilisez des chemins soit pour montrer que ces graphiques ne sont pas iso- phique ou pour trouver un isomorphisme entre eux.

u_1 u_2 v_1 v_2

u_8 u_3 v_8 v_3

u_7 u_4 v_7 v_4

u_6 u_5 v_6 v_5

g *H*

22. Utilisez des chemins soit pour montrer que ces graphiques ne sont pas isomorphique ou pour trouver un isomorphisme entre eux.

u_1 u_2 v_1 v_2

u_8 u_3 v_8 v_3

u_7 u_4 v_7 v_4

u_6 u_5 v_6 v_5

g *H*

23. Utilisez des chemins soit pour montrer que ces graphiques ne sont pas isomorphique ou pour trouver un isomorphisme entre eux.

u_1 u_2 v_1

u_6 u_7 v_6

v_5

v_4 v_7 v_2

u_8 u_3 v_8

u_5 u_4 v_3

g *H*

24. Trouvez le nombre de chemins de longueur n entre deux sommets adjacents en $K_{3,3}$ pour les valeurs de n dans l'exercice 19.

25. Trouver le nombre de chemins de longueur n entre deux sommets non adjacents dans $K_{3,3}$ pour les valeurs de n dans Exercise 19.

26. Trouvez le nombre de chemins entre c et d dans le graphique Figure 1 de longueur

a) 2. **b)** 3. **c)** 4. **d)** 5. **e)** 6. **f)** 7.

27. Trouvez le nombre de chemins de a à e dans le graphique orienté dans l'exercice 2 de longueur

a) 2. **b)** 3. **c)** 4. **d)** 5. **e)** 6. **f)** 7.

∗ **28.** Montrer que chaque graphe connecté avec n sommets a à

moins n - 1 bords.

29. Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Soit R la relation sur V composé de paires de sommets (u, v) *de* telle sorte qu'il est un chemin de u vers v ou tel que $u = v$. Montrez que R est une relation d'équivalence.

∗ **30.** Montrez que dans chaque graphique simple, il existe un chemin

sommet de degré impair à un autre sommet de degré impair.

Dans les exercices 31 à 33, trouvez tous les sommets coupés du graphique donné.

31. *a* *ré* *e* **32.** *a* *F*

b *c* *F* *b* *c* *ré* *e*

33. *a* *b* *F*

c *e* *g*

ré *je* *h*

34. Trouvez tous les bords coupés dans les graphiques des exercices 31–33.

∗ **35.** Supposons que v soit le point final d'un bord coupé. Prouvez que v

est un sommet coupé si et seulement si ce sommet n'est pas pendant.

∗ **36.** Montrer qu'un sommet c dans le graphe simple connecté G est

un sommet coupé si et seulement s'il y a des sommets u et v , les deux différent de c , de telle sorte que chaque chemin entre u et v passe par c .

∗ **37.** Montrer qu'un graphe simple avec au moins deux sommets a à

au moins deux sommets qui ne sont pas des sommets coupés.

∗ **38.** Montrer qu'une arête dans un graphique simple est une arête coupée si et

seulement si ce bord ne fait partie d'aucun circuit simple dans le graphique.

39. Une liaison de communication dans un réseau devrait être fournie avec un lien de sauvegarde si son échec rend impossible pour un message à envoyer. Pour chacune des communications réseaux indiqués ici en (a) et (b), déterminez ces liens cela devrait être sauvegardé.

une)

Boston

Chicago

New York

San Francisco

Washington

Denver

Los Angeles

b)

Bangor

Seattle Portland Burlington

Boston

San Francisco Denver Chicago

New York

Washington

Kansas City

Lac salé Ville

Atlanta

Los Angeles

Une **base de sommets** dans un graphe orienté G est un ensemble minimal B de sommets de G tels que pour chaque sommet v de G pas dans B il est un chemin de v à partir de certains sommets B .

40. Trouvez une base de sommets pour chacun des graphiques dirigés dans exercices 7 à 9 de la section 10.2.

41. Quelle est la signification d'une base de vertex dans une influence graphique (décrit dans l'exemple 2 de la section 10.1)? Trouver un base du sommet dans le graphe d'influence de cet exemple.

42. Montrer que si un graphe simple connexe G est l'union de les graphes G_1 et G_2 , puis G_1 et G_2 ont au moins un sommet commun.

∗ **43.** Montrer que si un graphe simple G a k composants connectés

les nents et ces composants ont $n_1, n_2, \ldots, n_k$ sommets, respectivement, alors le nombre de bords de G n'exceed

$$\sum_{i=1}^{k} C(n_i, 2).$$

∗ **44.** Utilisez l'exercice 43 pour montrer qu'un simple graphique avec n sommets et k composants connectés a au plus $(n - k)(n - k + 1)/2$ arêtes. [*Astuce:* montrer d'abord que

$$\sum_{i=1}^{k} n_i^2 \leq n^2 - (k - 1)(2n - k),$$

où n_i est le nombre de sommets du i ème connecté composant.]

∗ **45.** Montrer qu'un simple graphe G avec n sommets est connecté s'il a plus de $(n - 1)(n - 2)/2$ arêtes.

46. Décrire la matrice d'adjacence d'un graphe avec n con- composants connectés lorsque les sommets du graphe sont répertoriés de sorte que les sommets de chaque composant connecté soient successivement.

47. Combien de graphes simples connectés non isomorphes sont là avec n sommets lorsque n est

a) 2? **b)** 3? **c)** 4? **d)** 5?

48. Montrez que chacun des graphiques suivants n'a pas de coupe tices.

a) C_n où $n \geq 3$

b) W_n où $n \geq 3$

c) $K_{m,n}$ où $m \geq 2$ et $n \geq 2$

d) Q_n où $n \geq 2$

49. Montrez que chacun des graphiques de l'exercice 48 n'a pas de coupe bords.

50. Pour chacun de ces graphiques, trouvez $\kappa(G)$, $\lambda(G)$ et $\min_{v \in V} \deg(v)$, et déterminer laquelle des deux inégalités les valeurs en $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \min_{v \in V} \deg(v)$ sont strictes.

une) *une* *c*
b
e *ré*

b) *b* *ré*
une *c* *g* *e*
h *F*

c) *une* *b*
c *ré* *e* *F*
g *h* *je* *j*
k *l*

ré) *une*
b *c*
ré *e* *F*

51. Montrer que si G est un graphe connexe, alors il est possible de supprimer les sommets pour déconnecter G si et seulement si G n'est pas un graphique complet.

52. Montrer que si G est un graphe connexe avec n sommets alors

a) $\kappa(G) = n - 1$ si et seulement si $G = K_n$.

b) $\lambda(G) = n - 1$ si et seulement si $G = K_n$.

53. Trouver $\kappa(K_{m,n})$ et $\lambda(K_{m,n})$, où m et n sont positifs entiers.

54. Construisez un graphe G avec $\kappa(G) = 1$, $\lambda(G) = 2$, et $\min_{v \in V} \deg(v) = 3$.

∗ **55.** Montrer que si G est un graphe, alors $\kappa(G) \leq \lambda(G)$.

56. Expliquez comment le théorème 2 peut être utilisé pour trouver la le chemin le plus court d'un sommet v à un sommet w dans un graphique.

57. Utilisez le théorème 2 pour trouver la longueur du chemin le plus court entre a et f dans le graphique de la figure 1.

58. Utilisez le théorème 2 pour trouver la longueur du chemin le plus court a à c dans le graphique dirigé de l'exercice 2.

59. Soit P_1 et P_2 deux chemins simples entre les sommets u et v dans le graphe simple G qui ne contiennent pas les mêmes ensemble de bords. Montrer qu'il existe un circuit simple G .

60. Montrer que l'existence d'un simple circuit de longueur k , où k est un entier supérieur à 2, est un invariant pour isomorphisme graphique.

61. Expliquez comment le théorème 2 peut être utilisé pour déterminer si un graphe est connecté.

62. Utilisez l'exercice 61 pour montrer que le graphique G_1 de la figure 2 est connecté alors que le graphique G_2 de cette figure n'est pas connecté.

63. Montrer qu'un graphe simple G est bipartite si et seulement s'il n'a pas de circuits avec un nombre impair de bords.

64. Dans un vieux puzzle attribué à Alcuin of York (735–804), un l'agriculteur doit porter un loup, une chèvre et un chou à travers une rivière. L'agriculteur n'a qu'un petit bateau, qui peut transporter l'agriculteur et un seul objet (un animal ou un légume). Il peut traverser la rivière à plusieurs reprises. Cependant, si l'agriculteur est sur l'autre rive, le loup mangera la chèvre et, simi- en gros, la chèvre mangera le chou. Nous pouvons décrire chacun énoncer ce qui se trouve sur chaque rive. Par exemple, nous pouvons utiliser la paire (*FG, WC*) pour l'état où l'agriculteur et les chèvres sont sur la première rive et le loup et le chou sont sur l'autre rive. [Le symbole ∅ est utilisé quand rien est sur un rivage, de sorte que (*FWGC,* ∅) est l'état initial.]

a) Trouvez tous les états autorisés du puzzle, où aucun le loup et la chèvre ni la chèvre et le chou sont laissé sur le même rivage sans le fermier.

b) Construisez un graphe tel que chaque sommet de ce graphe représente un état admissible et les sommets représentent envoyer deux états autorisés sont reliés par un bord s'il est possible de passer d'un état à l'autre en utilisant un voyage du bateau.

c) Expliquez pourquoi trouver un chemin à partir du sommet représente (*FWGC,* ∅) au sommet représentant (∅ , *FWGC*) résout le puzzle.

d) Trouvez deux solutions différentes du puzzle, chacune utilisant sept traversées.

e) Supposons que l'agriculteur doit payer un péage d'un dollar chaque fois qu'il traverse la rivière avec un animal. Lequel solution du casse-tête si l'agriculteur utilise pour payer le moins de péage total?

* **65.** Utilisez un modèle de graphique et un chemin dans votre graphique, comme dans Exercise 64, pour résoudre le **problème des maris jaloux** . Deux les couples mariés, mari et femme, veulent traverser une rivière. Ils ne peuvent utiliser qu'un bateau qui peut transporter une ou deux personnes d'un rivage à l'autre rivage. Chaque mari est extrêmement jaloux et ne veut pas de laisser sa femme à l'autre mari, soit dans le bateau ou à terre. Comment ces quatre personnes peuvent-elles atteindre le rive opposée?

66. Supposons que vous ayez une cruche de trois gallons et un gallon de cinq gallons cruche. Vous pouvez remplir l'un ou l'autre pot avec de l'eau, vous pouvez vider n'importe quelle cruche, et vous pouvez transférer de l'eau dans l'autre cruche. Utilisez un chemin dans un graphique dirigé pour montrer que vous pouvez vous retrouver avec une cruche contenant exactement un gallon. [*Astuce:* utilisez une paire ordonnée *(a, b)* pour indiquer la quantité d'eau dans chaque carafe. Représenter ces ordonné paires par sommets. Ajoutez un bord pour chaque opération autorisée avec les cruches.]

Chemins d'Euler et de Hamilton

introduction

Pouvons-nous voyager le long des bords d'un graphe en partant d'un sommet et en y retournant en traversant chaque bord du graphique exactement une fois? De même, pouvons-nous voyager le long des bords d'un graphique en commençant à un sommet et y revenir en visitant chaque sommet du graphique exactement une fois?Bien que ces questions semblent être similaires, la première question, qui demande si un graphique a un*Euler circuit* , peut être facilement répondu simplement en examinant les degrés des sommets du graphique, tandis que la deuxième question, qui demande si un graphique a un*circuit de Hamilton* , est assez difficile à résoudre pour la plupart des graphiques. Dans cette section, nous étudierons ces questions et discuterons de la difficulté de les résoudre. Bien que les deux questions aient de nombreuses applications pratiques dans de nombreux zones, les deux ont surgi dans de vieux puzzles. Nous allons en apprendre davantage sur ces anciens puzzles ainsi que sur les modernes Applications pratiques.

Chemins et circuits d'Euler

La ville de Königsberg, en Prusse (maintenant appelée Kaliningrad et partie de la république russe), a été divisé en quatre sections par les branches de la rivière Pregel.Ces quatre sections comprenaient les deux régions sur les rives du Pregel, l'île de Kneiphof, et la région entre les deux branches du Pregel. Au XVIIIe siècle, sept ponts reliaient ces régions. Figure 1 représente ces régions et ces ponts.

Seuls cinq ponts se connectent Kaliningrad aujourd'hui. De ceux-ci, seulement deux restent du jour d'Euler.

Les citadins ont fait de longues promenades à travers la ville le dimanche.Ils se demandaient si c'était possible de commencer à un endroit de la ville, de traverser tous les ponts une fois sans traverser n'importe quel pont deux fois, et revenez au point de départ.

Le mathématicien suisse Leonhard Euler a résolu ce problème. Sa solution, publiée en 1736, peut être la première utilisation de la théorie des graphes(Pour une traduction de l'article original d'Euler, voir [BiLlWi99].) Euler a étudié ce problème en utilisant le multigraphe obtenu lorsque les quatre régions sont représentés par des sommets et les ponts par des arêtes.Ce multigraphe est illustré à la figure 2.

C

UNE

ré

B

FIGURE 1 **Les sept ponts de Königsberg.**

C

UNE

ré

B

FIGURE 2 **Modèle Multigraph de la ville de Königsberg.**

Le problème de traverser chaque pont sans traverser aucun pont plus d'une fois peut être reformulé en termes de ce modèle. La question devient: y a-t-il un circuit simple dans ce multigraph qui contient chaque bord?

DÉFINITION 1 Un *circuit d' Euler* dans un graphe G est un circuit simple contenant toutes les arêtes de G . Un *chemin d'Euler* dans G est un chemin simple contenant toutes les arêtes de G .

Les exemples 1 et 2 illustrent le concept de circuits et de chemins d'Euler.

EXEMPLE 1 Parmi les graphes non orientés de la figure 3, lesquels ont un circuit d'Euler? De ceux qui ne le font pas, qui avoir un chemin Euler?

Solution: Le graphe G_1 a un circuit d'Euler, par exemple, a, e, c, d, e, b, a . Aucun des les graphes G_2 ou G_3 ont un circuit d'Euler (le lecteur doit le vérifier). Cependant, G_3 a un chemin d'Euler, à savoir, a, c, d, e, b, d, a, b . G_2 n'a pas de chemin Euler (comme le lecteur devrait vérifier). ▲

EXEMPLE 2 Parmi les graphes dirigés de la figure 4, lesquels ont un circuit d'Euler? De ceux qui n'en ont pas, qui ont un chemin d'Euler?

Solution: Le graphique H_2 a un circuit d'Euler, par exemple, $a, g, c, b, g, e, d, f, a$. Ni H_1 ni H_3 n'a de circuit Euler (comme le lecteur devrait vérifier). H_3 a un chemin d'Euler, à savoir, c, a, b, c, d, b , mais pas H_1 (comme le lecteur devrait vérifier). ▲

CONDITIONS NÉCESSAIRES ET SUFFISANTES POUR LES CIRCUITS ET CHEMINS EULER

Il existe des critères simples pour déterminer si un multigraphe a un circuit d'Euler ou un Euler chemin. Euler les a découverts en résolvant le fameux problème du pont de Königsberg. Nous allons supposons que tous les graphiques discutés dans cette section ont un nombre fini de sommets et d'arêtes.

Que pouvons-nous dire si un multigraphe connecté a un circuit d'Euler? Ce que nous pouvons montrer, c'est que chaque sommet doit avoir un degré pair. Pour ce faire, notez d'abord qu'un circuit Euler commence par un sommet a et continue avec un bord incident avec a , disons $\{a, b\}$. Le bord $\{a, b\}$ y contribue à deg (a) . Chaque fois que le circuit traverse un sommet, il contribue à deux au degré du sommet, parce que le circuit entre par un bord incident avec ce sommet et sort par un autre tel bord. Enfin, le circuit se termine là où il a commencé, ce qui contribue à deg (a) . Par conséquent, deg (a) doit être pair, car le circuit contribue un au début, un à la fin et deux chaque fois qu'il passe par *un* (si jamais il le fait). Un sommet autre qu'un a a *un* degré pair car le circuit contribue deux à son degré à chaque fois qu'il traverse le sommet. Nous concluons que si un graphe connecté a un circuit d'Euler, alors chaque sommet doit avoir un degré pair.

Cette condition nécessaire à l'existence d'un circuit d'Euler est-elle également suffisante? Autrement dit, doit un circuit d'Euler existe-t-il dans un multigraphe connecté si tous les sommets ont un degré pair? Cette question peut être réglé de manière positive avec une construction.

une *b* *une* *b* *une* *b* *une* *b* *une* *b* *c* *ré*

g

e *e* *F* *c*

ré c ré c c ré e ré c e ré une b
G_1 G_2 G_3 H_1 H_2 H_3

FIGURE 3 **Les graphiques non dirigés G_1, G_2 et G_3.**

FIGURE 4 **Les graphiques dirigés H_1, H_2 et H_3.**

une b

c ré c ré
F

e e
g H

FIGURE 5 **Construire un circuit Euler G.**

Supposons que G est un multigraph connecté avec au moins deux sommets et le degré de chaque sommet de G est pair. Nous allons former un circuit simple qui commence à un sommet arbitraire a de G, en le construisant bord à bord. Soit $x_0 = a$. Tout d'abord, nous choisissons arbitrairement une arête $\{x_0, x_1\}$ incident avec *un* qui est possible car G est connecté. Nous continuons en construisant un chemin simple $\{x_0, x_1\}$, $\{x_1, x_2\}$, ..., $\{x_{n-1}, x_n\}$, en ajoutant successivement les bords un par un au chemin jusqu'à ce que nous ne peut pas ajouter un autre bord au chemin. Cela se produit lorsque nous atteignons un sommet pour lequel nous avons déjà inclus toutes les arêtes incidentes avec ce sommet dans le chemin. Par exemple, dans le graphique G de Figure 5 nous commençons en a et choisissons successivement les arêtes $\{a, f\}$, $\{f, c\}$, $\{c, b\}$ et $\{b, a\}$.

Le chemin que nous avons construit doit se terminer parce que le graphique a un nombre fini de bords, donc nous sommes assurés d'atteindre éventuellement un sommet pour lequel aucun bord n'est disponible pour ajouter au chemin. Le chemin commence à a avec un bord de la forme $\{a, x\}$, et nous montrons maintenant qu'il doit se terminent par *un* avec un bord de la forme $\{y, a\}$. Pour voir que le chemin doit se terminer en a, notez que chaque fois que le chemin passe par un sommet de degré pair, il n'utilise qu'une seule arête pour y entrer sommet, donc parce que le degré doit être d'au moins deux, il reste au moins un bord pour que le chemin quitte le sommet. De plus, chaque fois que nous entrons et sortons d'un sommet de degré pair, il y a un nombre d'arêtes incidentes avec ce sommet que nous n'avons pas encore utilisées sur notre chemin. Par conséquent, lorsque nous formons le chemin, chaque fois que nous entrons dans un sommet autre que a, nous pouvons le quitter. Cela signifie que le chemin ne peut se terminer qu'en a. Ensuite, notez que le chemin que nous avons construit peut utiliser tous les bords du graphique, ou il peut ne pas l'être si nous sommes revenus à *un* pour la dernière fois avant d'utiliser tous les bords.

Un circuit Euler a été construit si toutes les arêtes ont été utilisées. Sinon, pensez le sous-graphe H obtenu à partir de G en supprimant les arêtes déjà utilisées et les sommets qui ne sont pas incident avec les bords restants. Lorsque nous supprimons le circuit a, f, c, b, a du graphique Figure 5, on obtient le sous-graphe étiqueté comme H.

Parce que G est connecté, H a au moins un sommet en commun avec le circuit qui a été supprimé. Soit w un tel sommet. (Dans notre exemple, c est le sommet.)

LEONHARD EULER (1707-1783) Leonhard Euler était le fils d'un ministre calviniste des environs de Bâle, Suisse. À 13 ans, il entra à l'Université de Bâle, poursuivant une carrière en théologie, comme son père le souhaitait.

A l'université, Euler était encadré par Johann Bernoulli de la célèbre famille de mathématiciens Bernoulli. Son intérêt et ses compétences l'ont amené à abandonner ses études théologiques et à se lancer dans les mathématiques. Euler a obtenu son maîtrise en philosophie à l'âge de 16 ans. En 1727, Pierre le Grand l'invite à rejoindre l'Académie à Saint-Pétersbourg. En 1741, il s'installe à l'Académie de Berlin, où il reste jusqu'en 1766. Il retourne ensuite à St. Pétersbourg, où il est resté pour le reste de sa vie.

Euler était incroyablement prolifique, contribuant à de nombreux domaines des mathématiques, y compris la théorie des nombres, la binatorique et l'analyse, ainsi que ses applications dans des domaines tels que la musique et l'architecture navale. Il a écrit plus de 1100 livres et papiers et a laissé tellement de travaux inédits qu'il a fallu 47 ans après sa mort pour que tous ses travaux soient publiés. Au cours de sa vie, ses papiers se sont accumulés si rapidement qu'il a gardé une grande pile d'articles en attente de publication. L'Académie de Berlin ont publié les articles au-dessus de cette pile, de sorte que les résultats ultérieurs étaient souvent publiés avant qu'ils ne dépendent ou soient remplacés. Euler avait 13 enfants et a pu continuer son travail pendant qu'un enfant ou deux rebondissaient sur ses genoux. Il était aveugle depuis 17 ans sa vie, mais en raison de sa mémoire fantastique, cela n'a pas diminué sa production mathématique. Le projet de publier ses collections les travaux, entrepris par la Société suisse des sciences naturelles, sont en cours et nécessiteront plus de 75 volumes.

Épisode 318

Chaque sommet de H a un degré pair (car dans G tous les sommets avaient un degré pair, et pour chaque sommet, les paires d'arêtes incidentes avec ce sommet ont été supprimées pour former H). Notez que H peut pas connecté. À partir de w , construisez un chemin simple en H en choisissant des arêtes aussi longtemps que possible, comme cela a été fait dans G . Ce chemin doit se terminer en w . Par exemple, dans la figure 5, c, d, e, c est un chemin dans H . Ensuite, formez un circuit en G en épissant le circuit en H avec le circuit d'origine en G (cela peut être fait car w est l'un des sommets de ce circuit). Lorsque cela est fait dans le graphique sur la figure 5, on obtient le circuit a, f, c, d, e, c, b, a .

Continuez ce processus jusqu'à ce que tous les bords aient été utilisés. (Le processus doit se terminer car il n'y a qu'un nombre fini d'arêtes dans le graphique.) Cela produit un circuit d'Euler. le la construction montre que si les sommets d'un multigraph connecté sont tous de même degré, alors le graphe a un circuit d'Euler.

Nous résumons ces résultats dans le théorème 1.

THÉORÈME 1 Un multigraph connecté avec au moins deux sommets a un circuit d'Euler si et seulement si chacun de ses sommets ont même degré.

Nous pouvons maintenant résoudre le problème du pont de Königsberg. Parce que le multigraphe représentant ces ponts, représentés sur la figure 2, ont quatre sommets de degrés impairs, il n'a pas d'Euler circuit. Il n'y a aucun moyen de commencer à un point donné, de traverser chaque pont exactement une fois et de revenir à le point de départ.

L'algorithme 1 donne la procédure constructive pour trouver les circuits d'Euler donnés dans le sion précédant le théorème 1. (Parce que les circuits de la procédure sont choisis arbitrairement, il est une certaine ambiguïté. Nous ne prendrons pas la peine de lever cette ambiguïté en précisant les étapes de la plus précisément.)

ALGORITHME 1 Construction de circuits d'Euler.

procédure *Euler* (G : multigraph connecté avec tous les sommets de même degré)
circuit : = un circuit en G commençant à un choix arbitraire

sommet avec des bords ajoutés successivement pour former un chemin qui retourne à ce sommet
H : = *G* avec les bords de ce circuit supprimés
tandis que *H* a des bords
sous - circuit : = un circuit en *H* commençant à un sommet de *H* qui est également un point d'extrémité d'un bord de *circuit*
H : = *H* avec les bords du *sous - circuit* et tous les sommets isolés supprimé
circuit : = *circuit* avec *sous-circuit* inséré au niveau approprié sommet
circuit de **retour** {le *circuit* est un circuit d'Euler}

L'algorithme 1 fournit un algorithme efficace pour trouver des circuits Euler dans un graphe G avec tous les sommets de degré pair. Nous laissons au lecteur (exercice 66) le soin de montrer que le pire cas de complexité de cet algorithme est $O(m)$, où m est le nombre d'arêtes de G.

L'exemple 3 montre comment les chemins et circuits d'Euler peuvent être utilisés pour résoudre un type de puzzle.

une j
e F je
b h
ré g
c k
g

FIGURE 6 Les cimeterres de Mohammed.

EXEMPLE 3 De nombreux casse-tête vous demandent de dessiner une image dans un mouvement continu sans lever le crayon pour aucune partie de l'image n'est retracée. Nous pouvons résoudre ces énigmes en utilisant des circuits et des chemins d'Euler. Par exemple, *les cimeterres de Mohammed*, illustrés à la figure 6, peuvent-ils être dessinés de cette manière, le dessin commence et se termine au même point?

Solution: Nous pouvons résoudre ce problème car le graphe G montré dans la figure 6 a un circuit d'Euler. Il a un tel circuit car tous ses sommets ont un degré pair. Nous utiliserons l'algorithme 1 pour construire un circuit Euler. Tout d'abord, nous formons le circuit $a, b, d, c, b, e, i, f, e, a$. On obtient le sous-graphe H en supprimant les bords de ce circuit et tous les sommets qui deviennent isolés lorsque ces bords sont supprimé. Ensuite , on forme le circuit $d, g, h, j, i, h, k, g, f, d$ en H. Après avoir formé ce circuit, nous ont utilisé toutes les arêtes dans G. Épissage de ce nouveau circuit dans le premier circuit à l'endroit approprié produit le circuit d'Euler $a, b, d, g, h, j, i, h, k, g, f, d, c, b, e, i, f, e, a$. Ce circuit donne un façon de dessiner les cimeterres sans lever le crayon ni retracer une partie de l'image. ▲

Un autre algorithme de construction de circuits d'Euler, appelé algorithme de Fleury, est décrit dans le prémble de l'exercice 50.

Nous allons maintenant montrer qu'un multigraphe connecté a un chemin d'Euler (et non un circuit d'Euler) si et seulement s'il a exactement deux sommets de degrés impairs. Supposons d'abord qu'un multigraph connecté a un chemin d'Euler de a à b, mais pas un circuit d'Euler. Le premier bord du chemin contribue un au degré de a . Une contribution de deux au degré de a est faite à chaque fois que le chemin passe par a . Le dernier bord du chemin contribue à un degré de b . Chaque fois que le chemin passe par b il y a une contribution de deux à son degré. Par conséquent, a et b ont degré impair. Chaque autre sommet a un degré égal, car le chemin contribue à deux degrés d'un sommet chaque fois qu'il le traverse.

Considérez maintenant l'inverse. Supposons qu'un graphe ait exactement deux sommets de degrés impairs, dites a et b . Considérez le graphique plus grand composé du graphique d'origine avec l'ajout d'un arête $\{a, b\}$. Chaque sommet de ce graphique plus grand a un degré pair, il y a donc un circuit d'Euler.le la suppression de la nouvelle arête produit un chemin d'Euler dans le graphique d'origine.Le théorème 2 résume ces résultats.

THÉORÈME 2 Un multigraphe connecté a un chemin d'Euler mais pas un circuit d'Euler si et seulement s'il a exactement deux sommets de degré impair.

EXEMPLE 4 Quels graphiques représentés sur la figure 7 ont un chemin d'Euler?

Solution: G_1 contient exactement deux sommets de degrés impairs, à savoir b et d . Par conséquent, il a un Euler chemin qui doit avoir b et d comme points de terminaison. Un tel chemin d'Euler est d, a, b, c, d, b . De même, G_2 a exactement deux sommets de degré impair, à savoir, b et d . Il a donc un chemin Euler qui doit avoir b et d comme points d'extrémité. Un tel chemin d'Euler est $b, a, g, f, e, d, c, g, b, c, f, d$. G_3 n'a pas d'Euler chemin parce qu'il a six sommets de degré impair. ▲

En revenant au Königsberg du XVIIIe siècle, est-il possible de commencer à un moment donné ville, traverser tous les ponts et se retrouver à un autre endroit de la ville?Cette question peut

une *b* *une* *g* *F* *e* *une* *b*

F *g* *c*

ré *c* *b* *c* *ré* *e* *ré*

G_1 G_2 G_3

FIGURE 7 Trois graphiques non orientés.

être répondu en déterminant s'il y a un chemin d'Euler dans le multigraphe représentant le ponts à Königsberg. Parce qu'il y a quatre sommets de degré impair dans ce multigraphe, il y a est pas un chemin d'Euler, donc un tel voyage est impossible.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour les chemins et circuits d'Euler dans les graphes dirigés sont données dans les exercices 16 et 17.

APPLICATIONS DES VOIES ET CIRCUITS EULER Les chemins et circuits d'Euler peuvent être utilisés pour résoudre de nombreux problèmes pratiques. Par exemple, de nombreuses applications demandent un chemin ou un circuit qui traverse chaque rue d'un quartier, chaque route d'un réseau de transport, chaque connexion dans un réseau public, ou chaque lien dans un réseau de communication une seule fois.Trouver un chemin d'Euler ou un circuit dans le modèle de graphique approprié peut résoudre de tels problèmes.Par exemple, si un facteur peut trouver un chemin d'Euler dans le graphique qui représente les rues que le facteur doit parcourir, ce path produit un itinéraire qui traverse chaque rue de l'itinéraire exactement une fois. Si aucun chemin Euler n'existe, certaines rues devront être traversées plus d'une fois. Le problème de trouver un circuit dans un graphe avec le moins d'arêtes qui traverse chaque arête au moins une fois est connu comme le *facteur chinois problème* en l'honneur de Guan Meigu, qui l'a posé en 1962. Voir [MiRo91] pour plus d'informations sur la solution du problème du facteur chinois lorsqu'il n'existe pas de chemin Euler.

Parmi les autres domaines où les circuits et les chemins d'Euler sont appliqués, il y a la disposition des circuits, en multidiffusion réseau et en biologie moléculaire, où les chemins d'Euler sont utilisés dans le séquençage de l'ADN.

Hamilton Paths and Circuits

Nous avons développé les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de chemins et circuits qui contiennent chaque bord d'un multigraphe exactement une fois. Pouvons-nous faire de même pour les chemins simples et des circuits qui contiennent chaque sommet du graphique exactement une fois?

DÉFINITION 2 Un chemin simple dans un graphe G qui traverse chaque sommet exactement une fois est appelé *Hamilton chemin* , et un circuit simple dans un graphe G qui traverse chaque sommet exactement une fois est appelé un *circuit de Hamilton* . Autrement dit, le chemin simple $x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n$ dans le graphique $G = (V, E)$ est un Chemin de Hamilton si $V = \{x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n\}$ et $x_i = x_j$ pour $0 \leq i < j \leq n$, et le simple le circuit $x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n, x_0$ (avec $n > 0$) est un circuit de Hamilton si $x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n$ est un chemin Hamilton.

Cette terminologie provient d'un jeu, appelé le *puzzle icosien* , inventé en 1857 par le Le mathématicien irlandais Sir William Rowan Hamilton. Il se composait d'un dodécaèdre en bois [un polyèdre avec 12 pentagones réguliers comme faces, comme le montre la figure 8 (a)], avec une cheville à chaque sommet du dodécaèdre et chaîne. Les 20 sommets du dodécaèdre ont été étiquetés avec différentes villes du monde. Le but du puzzle était de commencer dans une ville et de voyager le long bords du dodécaèdre, visitant chacune des 19 autres villes exactement une fois, et se terminent première ville. Le circuit parcouru a été balisé à l'aide de la ficelle et des piquets.

(une) b)

FIGURE 8 «Un voyage autour du Puzzle du monde.

FIGURE 9 Une solution pour «Un voyage autour du Puzzle du monde.

Parce que l'auteur ne peut pas fournir à chaque lecteur un solide en bois avec des chevilles et de la ficelle, nous examinera la question équivalente: Y a-t-il un circuit dans le graphique illustré à la figure 8 (b) qui passe par chaque sommet exactement une fois? Cela résout le casse-tête car ce graphique est isomorphe au graphique composé des sommets et des bords du dodécaèdre. Une solution de Hamilton puzzle est illustré à la figure 9.

EXEMPLE 5 Parmi les graphiques simples de la figure 10, lesquels ont un circuit de Hamilton ou, sinon, un chemin de Hamilton?

Solution: G_1 a un circuit de Hamilton: *a, b, c, d, e, a* . Il n'y a pas de circuit de Hamilton en G_2 (cela peut être vu en notant que tout circuit contenant chaque sommet doit contenir le bord {*a, b* } deux fois), mais G_2 a un chemin Hamilton, à savoir, *a, b, c, d* . G_3 n'a ni circuit de Hamilton ni Chemin Hamilton, car tout chemin contenant tous les sommets doit contenir l'une des arêtes {*a, b* }, { *e, f* } et {*c, d* } plus d'une fois. ▲

une *b* *une* *b* *une* *b* *g*

e *c* *ré* *c* *ré* *c* *e* *F*

G_1 G_2 G_3

ré

FIGURE 10 Trois graphiques simples.

CONDITIONS D'EXISTENCE DES CIRCUITS DE HAMILTON Existe-t-il un moyen simple déterminer si un graphique a un circuit ou un chemin Hamilton? Au début, il pourrait sembler devrait être un moyen facile de déterminer cela, car il existe un moyen simple de répondre à la même question de savoir si un graphe a un circuit d'Euler. Étonnamment, il n'existe pas de simple critères nécessaires et suffisants pour l'existence des circuits de Hamilton. Cependant, de nombreux théorèmes on connaît des conditions suffisantes pour l'existence de circuits Hamilton. De plus, certains Les propriétés peuvent être utilisées pour montrer qu'un graphe n'a pas de circuit Hamilton. Par exemple, un graphique avec un sommet de degré un ne peut pas avoir un circuit de Hamilton, car dans un circuit de Hamilton, chaque sommet est incident avec deux bords dans le circuit. De plus, si un sommet du graphique a un degré deux, alors les deux bords qui sont incidents avec ce sommet doivent faire partie de tout circuit de Hamilton. Notez également que lorsqu'un circuit de Hamilton est en cours de construction et que ce circuit a traversé un sommet, alors tous les bords restants incidents avec ce sommet, autres que les deux utilisés dans le circuit, peuvent être retiré de l'examen. De plus, un circuit de Hamilton ne peut pas contenir un circuit plus petit à l'intérieur.

une *ré* *e* *une* *ré*

c

b *c* *b* *e*

g *H*

FIGURE 11 **Deux graphiques sans circuit de Hamilton.**

EXEMPLE 6 Montrer qu'aucun des graphiques affichés sur la figure 11 n'a un circuit de Hamilton.

Solution: Il n'y a pas de circuit de Hamilton dans G car G a un sommet de degré un, à savoir e . Considérons maintenant H . Parce que les degrés des sommets a , b , d et e sont tous deux, chaque arête l'incident avec ces sommets doit faire partie de tout circuit de Hamilton.Il est maintenant facile de voir qu'aucun Le circuit de Hamilton peut exister en H , car tout circuit de Hamilton devrait contenir quatre bords incident avec c , ce qui est impossible. ▲

EXEMPLE 7 Montrer que K_n a un circuit de Hamilton chaque fois que $n \geq 3$.

Solution: Nous pouvons former un circuit de Hamilton en $K_{n\ en}$ commençant à n'importe quel sommet.Un tel circuit peut être construit en visitant les sommets dans l'ordre que nous choisissons, tant que le chemin commence et se termine en même temps sommet et se visite le sommet exactement une fois.Ceci est possible car il y a des arêtes dans K_n entre deux sommets. ▲

Bien qu'il n'y ait pas de conditions nécessaires et suffisantes utiles pour l'existence de circuits de Hamilton sont connus, quelques conditions suffisantes ont été trouvées. Notez que plus un graphique a de bords a, plus il est probable qu'il y ait un circuit à Hamilton.De plus, l'ajout d'arêtes (mais pas de sommets) à un graphique avec un circuit de Hamilton produit un graphique avec le même circuit de Hamilton.Donc, comme nous ajouter des bords à un graphique, surtout lorsque nous nous assurons d'ajouter des bords à chaque sommet, nous le faisons

WILLIAM ROWAN HAMILTON (1805–1865) William Rowan Hamilton, le plus célèbre scientifique irlandais jamais vécu, est né en 1805 à Dublin. Son père était un avocat prospère, sa mère est venue d'une famille réputée pour son intelligence, et il était un enfant prodige. À l'âge de 3 ans, il était un excellent prêté lecteur et avait maîtrisé l'arithmétique avancée. En raison de son éclat, il a été envoyé vivre avec son oncle James, un linguiste réputé. À l'âge de 8 ans, Hamilton avait appris le latin, le grec et l'hébreu; par 10, il avait a également appris l'italien et le français et il a commencé son étude des langues orientales, y compris l'arabe, le sanscrit et Persan. Pendant cette période, il était fier de connaître autant de langues que son âge. A 17 ans, ne dé- voté pour apprendre de nouvelles langues et ayant maîtrisé le calcul et beaucoup d'astronomie mathématique, il a commencé travail original en optique, et il a également trouvé une erreur importante dans le travail de Laplace sur la mécanique céleste. Avant d'entrer au Trinity College de Dublin, à 18 ans, Hamilton n'avait pas fréquenté l'école; il a plutôt reçu des cours particuliers. À Trinity, il était un étudiant supérieur dans les sciences et les classiques. Avant d'obtenir son diplôme, en raison de son brillant, il a été nommé l'astronome royal d'Irlande, battant plusieurs astronomes célèbres pour le poste. Il a occupé ce poste jusqu'à sa mort, vivant et travailler à Dunsink Observatory à l'extérieur de Dublin. Hamilton a apporté d'importantes contributions à l'optique, à l'algèbre abstraite et dynamique. Hamilton a inventé des objets algébriques appelés quaternions comme exemple d'un système non commutatif. Il a découvert le façon appropriée de multiplier les quaternions en marchant le long d'un canal à Dublin. Dans son excitation, il a sculpté la formule dans la pierre d'un pont traversant le canal, une tache marquée aujourd'hui par une plaque. Plus tard, Hamilton est resté obsédé par les quaternions, travaillant à les appliquer à d'autres domaines des mathématiques, au lieu de passer à de nouveaux domaines de recherche.

En 1857, Hamilton a inventé «The Icosian Game» basé sur son travail en algèbre non commutative. Il a vendu l'idée pour 25 livres à un revendeur de jeux et de puzzles. (Parce que le jeu ne s'est jamais bien vendu, cela s'est avéré être un mauvais investissement pour le croupier.) Le «Traveler's Dodecahedron», également appelé «Un voyage autour du monde», le casse-tête décrit dans cette section, est une variante de ce jeu.

Hamilton a épousé son troisième amour en 1833, mais son mariage a mal fonctionné, car sa femme, semi-invalide, n'a pas pu faire face à ses affaires ménagères. Il souffrait d'alcoolisme et vivait reclus pendant les deux dernières décennies de sa vie. Il est mort de la goutte en 1865, laissant des masses de documents contenant des recherches inédites. Mélangé avec ces papiers étaient un grand nombre de dîners assiettes, dont beaucoup contiennent les restes de côtelettes desséchées et non consommées.

de plus en plus probable qu'un circuit de Hamilton existe dans ce graphique.Par conséquent, nous nous attendons à ce que il doit y avoir des conditions suffisantes pour l'existence de circuits de Hamilton qui dépendent des degrés des sommets étant suffisamment grands. Nous énonçons ici deux des conditions suffisantes les plus importantes. Ces conditions ont été trouvées par Gabriel A. Dirac en 1952 et Øystein Ore en 1960.

THÉORÈME 3 **THÉORÈME DE DIRAC** Si G est un graphe simple à n sommets avec $n \geq 3$ tel que le le degré de chaque sommet de G est au moins $n / 2$, alors G a un circuit de Hamilton.

THÉORÈME 4 **Théorème du minerai** Si G est un graphe simple avec n sommets avec $n \geq 3$ tels que deg (u) + deg $(v) \geq n$ pour chaque paire de sommets non adjacents u et v dans G , alors G a un Circuit de Hamilton.

La preuve du théorème de Ore est présentée dans l'exercice 65. Le théorème de Dirac peut être prouvé comme corollaire au théorème de Ore parce que les conditions du théorème de Dirac impliquent celles de Ore théorème.

Le théorème de Ore et le théorème de Dirac fournissent des conditions suffisantes pour un simple graphique pour avoir un circuit de Hamilton. Cependant, ces théorèmes ne fournissent pas les conditions nécessaires pour l'existence d'un circuit de Hamilton. Par exemple, le graphique C_5 a un circuit de Hamilton mais ne satisfait pas les hypothèses du théorème de Ore ou du théorème de Dirac, comme le lecteur peut Vérifier.

Les meilleurs algorithmes connus pour trouver un circuit de Hamilton dans un graphique ou pour déterminer aucun circuit de ce type n'a une complexité exponentielle dans le pire des cas (en nombre de sommets du graphique). Trouver un algorithme qui résout ce problème avec le temps le plus défavorable polynomial

GABRIEL ANDREW DIRAC (1925–1984) Gabriel Dirac est né à Budapest. Il a déménagé en Angleterre en 1937 lorsque sa mère épouse le célèbre physicien et lauréat du prix Nobel Paul Adrien Maurice Dirac, qui l'a adopté. Gabriel A. Dirac entra à l'Université de Cambridge en 1942, mais ses études furent interrompues par service en temps de guerre dans l'industrie aéronautique. Il a obtenu son doctorat. en mathématiques en 1951 de l'Université de Londres. Il a occupé des postes universitaires en Angleterre, au Canada, en Autriche, en Allemagne et au Danemark, où il a passé son 14 dernières années. Dirac s'est intéressé à la théorie des graphes au début de sa carrière et a contribué à élever son statut de sujet de recherche. Il a apporté d'importantes contributions à de nombreux aspects de la théorie des graphes, y compris la coloration des graphes et les circuits de Hamilton. Dirac a attiré de nombreux étudiants vers la théorie des graphes et a été noté comme un excellent conférencier.

Dirac était connu pour son esprit pénétrant et avait des opinions non conventionnelles sur de nombreux sujets, y compris la politique et la vie sociale. Dirac était un homme aux intérêts multiples et passionné des beaux-arts. Il avait une vie de famille heureuse avec sa femme Rosemari et ses quatre enfants.

ØYSTEIN ORE (1899–1968) Ore est né à Kristiania (l'ancien nom d'Oslo, en Norvège). En 1922, il a reçu son baccalauréat et en 1925 son doctorat. en mathématiques de l'Université Kristiania, après des études en Allemagne et en Suède. En 1927, il a été recruté pour quitter son poste junior à Kristiania et rejoindre l'Université de Yale. Il a été promu rapidement à Yale, devenant professeur titulaire en 1929 et professeur Sterling en 1931, un poste qu'il tenue jusqu'en 1968.

Ore a fait de nombreuses contributions à la théorie des nombres, à la théorie des anneaux, à la théorie du réseau, à la théorie des graphes et à la probabilité théorie. Il était un auteur prolifique d'articles et de livres. Son intérêt pour l'histoire des mathématiques se reflète dans ses biographies d'Abel et Cardano, et dans son manuel populaire *Number Theory and its History* . Il a écrit quatre livres sur la théorie des graphes dans les années 1960.

Pendant et après la Seconde Guerre mondiale, le minerai a joué un rôle majeur en soutenant sa Norvège natale. En 1947, le roi Haakon VII de Norvège lui a donné l'Ordre des Chevaliers de Saint-Olaf pour reconnaître ces efforts. Le minerai possédait une connaissance approfondie de la peinture et de la sculpture et était un ardent collectionneur de cartes anciennes. Il était marié et avait deux enfants.

la complexité serait une réalisation majeure car il a été démontré que ce problème est NP-complet (voir section 3.3). Par conséquent, l'existence d'un tel algorithme impliquent que de nombreux autres problèmes apparemment insolubles pourraient être résolus en utilisant des algorithmes avec complexité temporelle du pire cas polynomial.

Applications des circuits de Hamilton

Les chemins et circuits de Hamilton peuvent être utilisés pour résoudre des problèmes pratiques.Par exemple, de nombreuses applications les cations demandent un chemin ou un circuit qui visite chaque intersection de route dans une ville, chaque endroit pipelines se croisent dans une grille de service public, ou chaque nœud dans un réseau de communication exactement une fois.Trouver un Le chemin ou le circuit de Hamilton dans le modèle de graphique approprié peut résoudre de tels problèmesLe célèbre **problème de vendeur ambulant** ou **TSP** (également connu dans la littérature ancienne sous le **nom de problème de l'homme**) demande l'itinéraire le plus court qu'un vendeur itinérant devrait emprunter pour visiter un villes. Ce problème se réduit à trouver un circuit de Hamilton dans un graphique complet tel que le total le poids de ses bords est le plus petit possible.Nous reviendrons sur cette question dans la section 10.6.

Nous décrivons maintenant une application moins évidente des circuits Hamilton au codage.

EXEMPLE 8 **Codes gris** La position d'un pointeur rotatif peut être représentée sous forme numérique.Une façon de cela consiste à diviser le cercle en 2^n des arcs de longueur égale et pour affecter une chaîne de bits de longueur n à chaque arc. La figure 12 présente deux façons de le faire en utilisant des chaînes de bits de longueur trois.

La représentation numérique de la position du pointeur peut être déterminée à l'aide d'un ensemble de n Contacts. Chaque contact est utilisé pour lire un bit dans la représentation numérique de la position.Cette est illustré à la figure 13 pour les deux affectations de la figure 12.

Lorsque le pointeur est près de la limite de deux arcs, une erreur peut être commise lors de la lecture de son position. Cela peut entraîner une erreur majeure dans la lecture de la chaîne de bits.Par exemple, dans le codage schéma de la figure 12 (a), si une petite erreur est commise lors de la détermination de la position du pointeur, la chaîne de bits 100 est lue au lieu de 011. Les trois bits sont incorrects!Pour minimiser l'effet d'un erreur dans la détermination de la position du pointeur, l'affectation des chaînes de bits au 2^n arcs doit être fait de sorte qu'un seul bit soit différent dans les chaînes de bits représentées par des arcs adjacents. C'est exactement la situation dans le schéma de codage de la figure 12 (b).Une erreur dans la détermination du la position du pointeur donne la chaîne de bits 010 au lieu de 011. Un seul bit est incorrect.

Un **code gris** est un étiquetage des arcs du cercle tel que les arcs adjacents sont étiquetés avec un bit des chaînes qui diffèrent exactement d'un bit. L'affectation de la figure 12 (b) est un code Gray.Nous pouvons trouver un code Gray en listant toutes les chaînes de bits de longueur n de telle sorte que chaque chaîne diffère exactement une position de la chaîne de bits précédente, et la dernière chaîne diffère de la première dans exactement une position. Nous pouvons modéliser ce problème en utilisant le n- cube Q_n . Ce qui est nécessaire pour résoudre ce problème est un circuit de Hamilton en Q_n . De tels circuits de Hamilton sont faciles à trouver. Par exemple, un Hamilton

(une) b)

111 000 100 000

110 001 101 001

101 010 111 011

100 011 110 010

FIGURE 12 **Conversion de la position d'un pointeur sous forme numérique.**

Le troisième bit est 1 ici

Le deuxième bit est 1 ici

Le troisième bit est 1 ici

Le troisième bit est 1 ici

Le deuxième bit est 1 ici

Le premier bit est 1 ici

Le troisième bit est 1 ici

Le premier bit est 1 ici

Le troisième bit est 1 ici

Le troisième bit est 1 ici

Le deuxième bit est 1 ici

FIGURE 13 La représentation numérique du Position du pointeur.

110 111

100 101

010 011

000 001

FIGURE 14 A Hamilton Circuit pour Q_3.

Le circuit pour Q_3 est illustré à la figure 14. La séquence de chaînes de bits différant exactement d'un bit produite par ce circuit de Hamilton est 000, 001, 011, 010, 110, 111, 101, 100.

Les codes gris portent le nom de Frank Gray, qui les a inventés dans les années 40 chez AT&T Bell Laboratoires pour minimiser l'effet des erreurs de transmission des signaux numériques. ▲

Des exercices

Dans les exercices 1 à 8, déterminez si le graphique donné a un Circuit d'Euler. Construisez un tel circuit quand il existe. Si aucun circuit d'Euler n'existe, déterminer si le graphique a un Chemin d'Euler et construire un tel chemin s'il en existe un.

1. *b* *c* *une* *ré* *e*

2. *une* *b* *c* *ré* *e* *F* *g* *h* *je*

3. *une* *b* *e* *c* *ré*

4. *une* *F* *b* *ré* *e* *c*

5. *a* *b* *c* *e* *ré*

6.

b *c*

une *je* *ré* *e*

h *g* *F*

sept.

une *b* *c* *ré*

je *h* *g* *e* *F*

8. *une* *b* *c* *ré* *e*

F *g* *h* *je* *j*

k *l* *m* *n* *o*

9. Supposons qu'en plus des sept ponts de Königsberg (montré dans la figure 1), il y avait deux autres ponts, reliant les régions *B* et *C* et les régions *B* et *D* , respectivement. Quelqu'un pourrait-il traverser ces neuf ponts exactement une fois et revenir au point de départ?

10. Quelqu'un peut-il traverser tous les ponts illustrés sur cette carte une fois et revenir au point de départ?

11. Quand peut-on peindre les traits d'axe des rues d'une ville sans voyager plus d'une fois dans une rue? (Suppose que toutes les rues sont à double sens.)

12. Concevez une procédure, similaire à l'algorithme 1, pour des chemins d'Euler dans les multigraphes.

Dans les exercices 13 à 15, déterminez si l'image présentée peut être dessiné avec un crayon dans un mouvement continu sans lever le crayon ou retracer une partie de l'image.

13. **14.**

15.

∗ **16.** Montrer qu'un multigraphe dirigé n'ayant pas de vertices a un circuit d'Euler si et seulement si le graphique est faiblement connecté et le degré en et hors de chaque sommet sont égaux.

∗ **17.** Montrer qu'un multigraphe dirigé n'ayant pas de vertices a un chemin d'Euler mais pas un circuit d'Euler si et seulement si le graphique est faiblement connecté et le degré et le degré extérieur de chaque sommet sont égaux pour tous sauf deux vertices, celui qui a en degré un plus grand que son extérieur degré et l'autre qui a un degré plus grand que son degré.

Dans les exercices 18 à 23, déterminez si le graphique orienté montré a un circuit d'Euler. Construisez un circuit d'Euler existe. Si aucun circuit d'Euler n'existe, déterminez si la di-
Le graphique rectifié a un chemin d'Euler. Construisez un chemin d'Euler s'il y en a un existe.

18. *a* *b* **19.** *a* *b*

c *ré* *ré* *c*

20. *a* *b* *c*

ré *e*

21. *a* *b* *c*

ré *e*

22. *a* *b* *c*

F *e* *ré*

23. *une* *b* *c*

ré *e* *F*

g *h* *je*

j *k* *l*

∗ **24.** Concevoir un algorithme pour construire des circuits d'Euler en di-
graphiques corrigés.

25. Concevoir un algorithme pour construire des chemins d'Euler en di-
graphiques corrigés.

26. Pour quelles valeurs de n ces graphiques ont-ils un cercle d'Euler
cuit?

a) K_n **b)** C_n **c)** W_n **d)** Q_n

27. Pour quelles valeurs de n les graphiques de l'exercice 26 ont-ils
un chemin d'Euler mais pas de circuit d'Euler?

28. Pour quelles valeurs de m et n la bipartite complète
graphe $K_{m,n}$ ont un

a) Circuit d'Euler?
b) Chemin d'Euler?

29. Trouvez le moins de fois où il est nécessaire de lever un
crayon du papier lors du dessin de chacun des graphiques
dans les exercices 1 à 7 sans retracer aucune partie du graphique.

Dans les exercices 30 à 36, déterminez si le graphique donné a un
Circuit de Hamilton. Si c'est le cas, trouvez un tel circuit. Si ça ne fait pas,
donner un argument pour montrer pourquoi un tel circuit n'existe pas.

30. *a* *ré*

c *F*

b *e*

31. *a* *b*

c

e *ré*

32. *a* *b*

c

ré *e* *F*

33. *une* *b* *g*

e *c* *ré* *F*

34. *une* *b* *c*

je *j* *k*

ré *o* *p* *q* *h*

n *m* *l*

e *F* *g*

35. *a* *b*

ré

c *e*

36. *une* *b* *c*

ré *e* *F*

g *h* *je*

37. Le graphique de l'exercice 30 a-t-il un chemin de Hamilton? Si
alors, trouvez un tel chemin. Si ce n'est pas le cas, donnez un argument à
montrer pourquoi un tel chemin n'existe pas.

38. Le graphique de l'exercice 31 a-t-il un chemin de Hamilton? Si
alors, trouvez un tel chemin. Si ce n'est pas le cas, donnez un argument à
montrer pourquoi un tel chemin n'existe pas.

39. Le graphique de l'exercice 32 a-t-il un chemin de Hamilton? Si
alors, trouvez un tel chemin. Si ce n'est pas le cas, donnez un argument à
montrer pourquoi un tel chemin n'existe pas.

40. Le graphique de l'exercice 33 a-t-il un chemin de Hamilton? Si
alors, trouvez un tel chemin. Si ce n'est pas le cas, donnez un argument à
montrer pourquoi un tel chemin n'existe pas.

∗ **41.** Le graphique de l'exercice 34 a-t-il un chemin Hamilton? Si
alors, trouvez un tel chemin. Si ce n'est pas le cas, donnez un argument à
montrer pourquoi un tel chemin n'existe pas.

42. Le graphique de l'exercice 35 a-t-il un chemin de Hamilton? Si
alors, trouvez un tel chemin. Si ce n'est pas le cas, donnez un argument à
montrer pourquoi un tel chemin n'existe pas.

43. Le graphique de l'exercice 36 a-t-il un chemin de Hamilton? Si
alors, trouvez un tel chemin. Si ce n'est pas le cas, donnez un argument à
montrer pourquoi un tel chemin n'existe pas.

44. Pour quelles valeurs de n les graphiques de l'exercice 26 ont-ils
un circuit de Hamilton?

45. Pour quelles valeurs de m et n la bipartite complète
graphique $K_{m,n}$ a un circuit de Hamilton?

∗ **46.** Montrer que le **graphique de Petersen** , montré ici, n'a pas un circuit de Hamilton, mais que le sous-graphe obtenu par la suppression d'un sommet *v* , et toutes les arêtes incidentes avec *v* , ne avoir un circuit à Hamilton.

une

F

e *b*

j *g*

je *h*

ré *c*

47. Pour chacun de ces graphiques, déterminez (*i*) si la le théorème peut être utilisé pour montrer que le graphique a un Hamilton circuit, (*ii*) si le théorème de Ore peut être utilisé pour montrer que le graphique a un circuit de Hamilton, et (*iii*) si le graphique a un circuit de Hamilton.

une) **b)**

c) **ré)**

48. Pouvez-vous trouver un graphique simple avec *n* sommets avec $n \geq 3$ qui n'a pas de circuit de Hamilton, mais le degré de chaque sommet du graphique est au moins $(n - 1) / 2$?

∗ **49.** Montrer qu'il y a un code gris d'ordre *n* chaque fois que *n* est un entier positif, ou de manière équivalente, montre que le *n*- cube Q_n, $n > 1$, a toujours un circuit de Hamilton. [*Astuce:* utiliser Induction mathematique. Montrez comment produire un gris code d'ordre *n* de l'un des ordres $n - 1$.]

L'algorithme de Fleury , publié en 1883, construit le cercle d'Euler cuits en choisissant d'abord un sommet arbitraire d'un multi-connecté graphique, puis former un circuit en choisissant successivement les arêtes sivement. Une fois qu'une arête est choisie, elle est supprimée. Les bords sont choisis sen successivement pour que chaque bord commence là où le dernier bord extrémités, et de sorte que ce bord n'est pas un bord coupé à moins qu'il n'y ait pas alternative.

50. Utilisez l'algorithme de Fleury pour trouver un circuit d'Euler dans le graphique *G* dans la figure 5.

∗ **51.** Algorithme d'Express Fleury en pseudocode.

∗∗ **52.** Prouver que l'algorithme de Fleury produit toujours un Euler circuit.

∗ **53.** Donner une variante de l'algorithme de Fleury pour produire Euler chemins.

54. Un message de diagnostic peut être envoyé sur un ordinateur réseau pour effectuer des tests sur toutes les liaisons et sur tous les appareils. Quel type de chemins utiliser pour tester tous les liens? Tester tous les dispositifs?

55. Montrer qu'un graphe bipartite avec un nombre impair de sommets n'a pas de circuit à Hamilton.

JULIUS PETER CHRISTIAN PETERSEN (1839–1910) Julius Petersen est né dans la ville danoise de Sorø. Son père était teinturier. En 1854, ses parents ne pouvaient plus payer ses études, il est donc devenu apprenti dans l'épicerie d'un oncle. À la mort de cet oncle, il a laissé à Petersen suffisamment d'argent pour retourner à l'école. Après avoir obtenu son diplôme, il a commencé à étudier l'ingénierie à l'École polytechnique de Copenhague, décident plus tard de se concentrer sur les mathématiques. Il a publié son premier manuel, un livre sur les logarithmes, en 1858. Lorsque son héritage manqué, il a dû enseigner pour gagner sa vie. De 1859 à 1871, Petersen enseigne dans un prestigieux lycée privé à Copenhague. Tout en enseignant au lycée, il a poursuivi ses études, entrant à l'Université de Copenhague en 1862. Il épousa Laura Bertelsen en 1862; ils ont eu trois enfants, deux fils et une fille.

Petersen a obtenu un diplôme de mathématiques de l'Université de Copenhague en 1866 et a finalement obtenu son doctorat en 1871 de cette école. Après avoir obtenu son doctorat, il a enseigné dans une académie polytechnique et militaire. En 1887, il était nommé professeur à l'Université de Copenhague. Petersen était bien connu au Danemark comme l'auteur d'une grande série de manuels pour les lycées et universités. Un de ses livres, *Méthodes et théories pour la solution des problèmes de géométrie Construction* , a été traduit en huit langues, la version anglaise ayant été réimprimée pour la dernière fois en 1960 et la version française réimprimé aussi récemment qu'en 1990, plus d'un siècle après la date de publication originale.

Petersen a travaillé dans un large éventail de domaines, notamment l'algèbre, l'analyse, la cryptographie, la géométrie, la mécanique, les mathématiques économie et théorie des nombres. Ses contributions à la théorie des graphes, y compris les résultats sur les graphes réguliers, sont ses travaux les plus connus. Il était connu pour sa clarté de l'exposition, ses compétences en résolution de problèmes, son originalité, son sens de l'humour, sa vigueur et son enseignement. Un intéressant En fait, Petersen préférait ne pas lire les écrits d'autres mathématiciens. Cela l'a amené souvent à redécouvrir les résultats déjà prouvé par d'autres, souvent avec des conséquences embarrassantes. Cependant, il était souvent en colère quand d'autres mathématiciens ne lisez ses écrits!

La mort de Petersen a fait la une des journaux à Copenhague. Un journal de l'époque le décrit comme Hans Christian Andersen de la science - un enfant des gens qui ont fait du bien dans le monde universitaire.

Un **chevalier** est une pièce d'échecs qui peut déplacer deux espaces horizontalement et un espace verticalement ou un espace horizontal- compte et deux espaces verticalement. Autrement dit, un chevalier sur place (x, y) peut se déplacer vers l'un des huit carrés $(x \pm 2 , y \pm 1)$, $(x \pm 1 , y \pm 2)$, si ces carrés sont sur l'échiquier, comme il illustré ici.

La visite d' un **chevalier** est une séquence de mouvements légaux par un chevalier sur une place et en visitant chaque place exactement une fois. UNE la visite du chevalier est appelée **réentrante** s'il y a un mouvement légal ramène le chevalier de la dernière place de la visite à l'endroit où la tournée a commencé. Nous pouvons modéliser les visites de chevaliers en utilisant le graphique qui a un sommet pour chaque carré du plateau, avec un bord reliant deux sommets si un chevalier peut légalement se déplacer entre les carrés représentés par ces sommets.

56. Tracez le graphique qui représente les mouvements légaux d'un chevalier sur un échiquier 3 × 3.

57. Tracez le graphique qui représente les mouvements légaux d'un chevalier sur un échiquier 3 × 4.

58. a) Montrer que trouver un tour de chevalier sur un $m \times n$ *d'* échecs carte équivaut à trouver un chemin Hamilton sur le graphique représentant les mouvements légaux d'un chevalier sur cette planche.

b) Montrer que trouver un tour de chevalier rentrant sur un échiquier $m \times n$ équivaut à trouver un Hamil- circuit de tonnes sur le graphique correspondant.

∗ **59.** Montrez qu'il y a un tour de chevalier sur un échiquier 3 × 4.

∗ **60.** Montrez qu'il n'y a pas de tour de chevalier sur un échiquier 3 × 3.

∗ **61.** Montrez qu'il n'y a pas de tour de chevalier sur un échiquier 4 × 4.

62. Montrer que le graphique représentant les mouvements légaux d'un chevalier sur un échiquier $m \times n$, chaque fois que m et n sont entiers positifs, est bipartite.

63. Montrer qu'il n'y a pas de tour de chevalier rentrant sur un $m \times n$ échiquier lorsque m et n sont tous deux impairs. [*Astuce:* utilisez Exer- cises 55, 58b et 62.]

∗ **64.** Montrez qu'il y a un tour de chevalier sur un échiquier 8 × 8.

[*Astuce:* vous pouvez construire la visite d'un chevalier en utilisant une méthode inventé par HC Warnsdorff en 1823: Commencez dans n'importe quel carré, puis déplacez-vous toujours vers un carré connecté au moins nombre de carrés inutilisés. Bien que cette méthode ne toujours faire une tournée de chevalier, c'est souvent le cas.]

65. Les parties de cet exercice donnent un aperçu de la théorie de Ore rem. Supposons que G est un graphe simple avec n sommets, $n \geq 3$, et deg (x) + deg $(y) \geq n$ chaque fois que x et y sont sommets non adjacents dans G . Le théorème de Ore déclare que sous ces conditions, G a un circuit de Hamilton.

a) Montrer que si G n'a pas de circuit à Hamilton, alors il existe un autre graphe H avec les mêmes sommets comme G , qui peut être construit en ajoutant des arêtes à G de telle sorte que l'ajout d'un seul bord produirait un circuit de Hamilton dans H . [*Astuce:* ajouter autant d'arêtes que possible à chaque sommet successif de G sans produisant un circuit à Hamilton.]

b) Montrer qu'il existe un chemin Hamilton dans H .

c) Soit v_1 , v_2 , ..., v_n est un chemin Hamilton dans H . Spectacle que deg (v_1) + deg $(v_n) \geq n$ et qu'il y ait au plus deg (v_1) sommets non adjacents à v_n (y compris v_n it- soi).

d) Soit S l'ensemble des sommets précédant chaque sommet cent à v_1 dans le chemin de Hamilton. Montrer que S contient deg (v_1) des sommets et $v_n \notin S$.

e) Montrer que S contient un sommet v_k , qui est adjacent à v_n , ce qui implique qu'il y a des bords reliant v_1 et v_{k+1} et v_k et v_n .

f) Montrer que la partie (e) implique que v_1 , v_2 , ..., v_{k-1} , v_k , v_n , v_{n-1} , ..., v_{k1} , v_1 est un circuit à Hamilton G . Conclusion de cette contradiction que le théorème de Ore tient.

∗ **66.** Montrer que le pire cas de complexité de calcul d'Al- gorithme 1 pour trouver des circuits d'Euler dans un graphe connecté avec tous les sommets de degré pair est $O (m)$, où m est le nombre d'arêtes de G .

Problèmes de chemin le plus court

introduction

De nombreux problèmes peuvent être modélisés à l'aide de graphiques avec des poids attribués à leurs bords.En tant que illustration, réfléchissez à la manière dont un système de transport aérien peut être modélisé.Nous mettons en place le modèle graphique de base en représentant les villes par les sommets et les vols par les arêtes.Les problèmes de distance peuvent être modélisé en attribuant des distances entre les villes aux bords.Les problèmes de temps de vol peuvent être modélisé en attribuant des temps de vol aux bords.Les problèmes liés aux tarifs peuvent être modélisés par

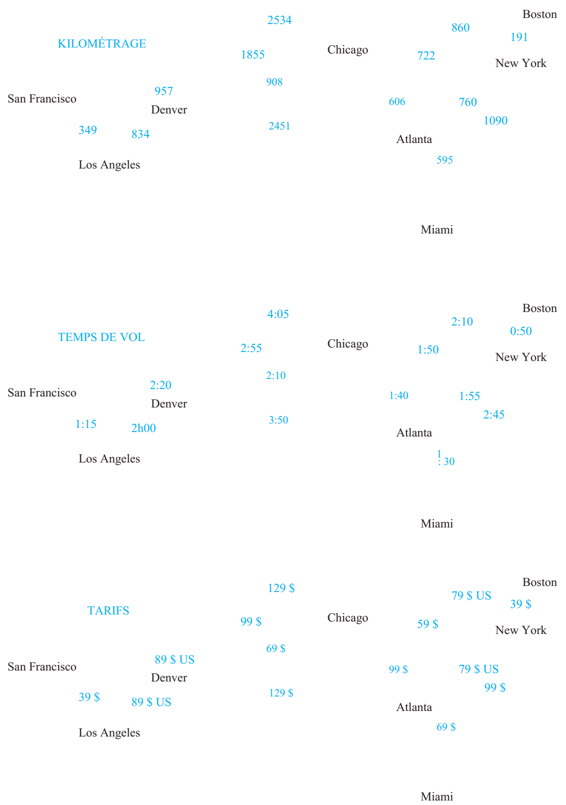


FIGURE 1 **Graphes pondérés modélisant un système de ligne aérienne.**

attribution de tarifs aux bords. La figure 1 montre trois affectations différentes de poids au bords d'un graphique représentant respectivement les distances, les temps de vol et les tarifs.

Les graphiques auxquels un numéro est affecté à chaque bord sont appelés **graphiques pondérés** . Pondéré des graphiques sont utilisés pour modéliser les réseaux informatiques.Coûts de communication (tels que le coût mensuel location d'une ligne téléphonique), les temps de réponse des ordinateurs sur ces lignes ou la distance entre ordinateurs, tous peuvent être étudiés à l'aide de graphiques pondérés. La figure 2 affiche des graphiques pondérés qui représentent trois façons d'attribuer des poids aux bords d'un graphique d'un réseau informatique, correspondant à la distance, au temps de réponse et au coût.

Plusieurs types de problèmes impliquant des graphiques pondérés surviennent fréquemment. Déterminer un chemin de moindre longueur entre deux sommets d'un réseau est l'un de ces problèmes. Pour être plus précis, laissez la **longueur** d'un chemin dans un graphique pondéré est la somme des poids des bords de ce chemin. (Le le lecteur doit noter que cette utilisation du terme *longueur* est différente de l'utilisation de la *longueur* pour nombre d'arêtes dans un chemin dans un graphique sans poids.) La question est: quel est le chemin le plus court, c'est-à-dire, un chemin de moindre longueur, entre deux sommets donnés? Par exemple, dans le système des compagnies aériennes

DISTANCE

Boston
860
191
Chicago
San Francisco
1855
722
New York
908
957
Denver
349
1736
1372
645
798
Los Angeles
1235
Dallas

TEMPS DE RÉPONSE

Boston
3 sec
2 sec
Chicago
San Francisco
5 sec
4 sec
New York
6 sec
4 sec
Denver
3 sec
7 sec
5 sec
4 sec
6 sec
Los Angeles
5 sec
Dallas

TAUX DE LOCATION (PAR MOIS)

Boston
900 $
300 $
Chicago
San Francisco
1 500 $
700 $
New York
500 $
1 000 $
Denver
400 $
1400 $
800 $
600 $
1 200 $
Los Angeles
1100 $
Dallas

FIGURE 2 Graphes pondérés modélisant un réseau informatique.

représenté par le graphique pondéré illustré à la figure 1, quel est le chemin le plus court dans la distance de l'air entre Boston et Los Angeles? Quelles combinaisons de vols ont le plus petit vol total temps (c'est-à-dire temps total dans les airs, sans compter le temps entre les vols) entre Boston et Los Angeles? Quel est le tarif le moins cher entre ces deux villes? Dans le réseau informatique montré dans Figure 2, quel est le jeu de lignes téléphoniques le moins cher nécessaire pour connecter les ordinateurs à San

Francisco avec ceux de New York? Quel ensemble de lignes téléphoniques donne le temps de réponse le plus rapide pour les communications entre San Francisco et New York?Quel ensemble de lignes a le plus court distance globale?

Un autre problème important concernant les graphiques pondérés demande un circuit du total le plus court longueur qui visite chaque sommet d'un graphe complet une seule fois. Ceci est le célèbre *voyage problème de vendeur* , qui demande une commande dans laquelle un vendeur devrait visiter chacun des villes sur son itinéraire exactement une fois afin qu'il parcourt la distance totale minimale.Nous discuterons le problème du vendeur itinérant plus loin dans cette section.

Un algorithme de chemin le plus court

Il existe plusieurs algorithmes différents qui trouvent le chemin le plus court entre deux sommets dans une pondération graphique. Nous présenterons un algorithme gourmand découvert par le mathématicien néerlandais Edsger Di

b 3 *c*

4 2

une 3 *z*

2 1

ré 3 *e*

FIGURE 3 **Un graphique simple pondéré.**

jkstra en 1959. La version que nous allons décrire résout ce problème dans les graphiques pondérés non orientés où tous les poids sont positifs. Il est facile de l'adapter pour résoudre les problèmes les plus courts en graphiques.

Avant de donner une présentation formelle de l'algorithme, nous donnerons un exemple illustratif.

EXEMPLE 1 Quelle est la longueur d'un chemin le plus court entre *a* et *z* dans le graphique pondéré illustré à la figure 3?

Solution: Bien qu'un chemin le plus court soit facilement trouvé par inspection, nous développerons quelques idées utile pour comprendre l'algorithme de Dijkstra. Nous allons résoudre ce problème en trouvant la longueur d'un chemin le plus court de *a* aux sommets successifs, jusqu'à ce que *z* soit atteint.

Les seuls chemins commençant par *a* qui ne contiennent aucun sommet autre que *a* sont formés en ajoutant un bord qui a *un* comme un point d' extrémité. Ces chemins n'ont qu'un seul bord.Ils sont *a, b* de longueur 4 et *a, d* de longueur 2. Il s'ensuit que *d* est le sommet le plus proche de *a* , et le chemin le plus court de *a* à *d* a longueur 2.

Nous pouvons trouver le deuxième sommet le plus proche en examinant tous les chemins qui commencent par le plus court chemin de *a* à un sommet dans l'ensemble {*a, d* }, suivi d'une arête qui a un point d'extrémité dans {*a, d* } et son autre point final n'est pas dans cet ensemble.Il y a deux chemins à considérer, *a, d, e* de longueur 7 et *a, b* de longueur 4. Par conséquent, le deuxième sommet le plus proche de *a* est *b* et le chemin le plus court de *a* à *b* a longueur 4.

Pour trouver le troisième sommet le plus proche de a , nous devons examiner uniquement les chemins qui commencent par le chemin le plus court de a à un sommet de l'ensemble $\{a, d, b\}$, suivi d'une arête qui a un point d'extrémité dans l'ensemble $\{a, d, b\}$ et son autre point de terminaison pas dans cet ensemble. Il existe trois de ces chemins, a, b, c de longueur 7, a, b, e de longueur 7 et a, d, e de longueur 5. Parce que le plus court de ces chemins est a, d, e , le troisième sommet le plus proche de a est e et la longueur du chemin le plus court de a à e est de 5.

EDSGER WYBE DIJKSTRA (1930-2002) Edsger Dijkstra, né aux Pays-Bas, a commencé la programmation ordinateurs au début des années 1950 alors qu'il étudiait la physique théorique à l'Université de Leiden. En 1952, réalisant que il était plus intéressé par la programmation que par la physique, il a rapidement rempli les exigences de sa physique diplômé et a commencé sa carrière en tant que programmeur, même si la programmation n'était pas une profession reconnue. (Dans 1957, les autorités d'Amsterdam refusent d'accepter la «programmation» comme sa profession sur sa licence de mariage. Cependant, ils ont accepté «physicien théorique» quand il a changé son entrée en ceci.)

Dijkstra était l'un des plus ardents défenseurs de la programmation en tant que discipline scientifique. Il a fait contributions fondamentales aux domaines des systèmes d'exploitation, y compris l'évitement des blocages; langue de programmation indicateurs, y compris la notion de programmation structurée; et algorithmes. En 1972, Dijkstra a reçu le Turing Prix de l'Association for Computing Machinery, l'un des prix les plus prestigieux en informatique. Dijkstra est devenu boursier de recherche Burroughs en 1973, et en 1984, il a été nommé à une chaire d'informatique à l'Université du Texas, Austin.

Épisode 333

Pour trouver le quatrième sommet le plus proche de a , nous devons examiner uniquement les chemins qui commencent par le chemin le plus court de a à un sommet de l'ensemble $\{a, d, b, e\}$, suivi d'une arête qui a un point d'extrémité dans l'ensemble $\{a, d, b, e\}$ et son autre point de terminaison pas dans cet ensemble. Il existe deux de ces chemins, a, b, c de longueur 7 et a, d, e, z de longueur 6. Parce que le plus court de ces chemins est a, d, e, z , le quatrième le sommet le plus proche de a est z et la longueur du chemin le plus court de a à z est de 6. ▲

L'exemple 1 illustre les principes généraux utilisés dans l'algorithme de Dijkstra. Notez que le plus court chemin de a à z aurait pu être trouvé par une approche de force brute en examinant la longueur de chaque chemin de a à z . Cependant, cette approche par force brute n'est pas pratique pour les humains et même pour les ordinateurs pour les graphiques avec un grand nombre d'arêtes.

Nous allons maintenant examiner le problème général de trouver la longueur d'un chemin le plus court entre a et z dans un graphe pondéré simple connecté non orienté. L'algorithme de Dijkstra procède par trouver la longueur d'un chemin le plus court d'*un* à un premier sommet, la longueur d'un chemin le plus court de a à un deuxième sommet, et ainsi de suite, jusqu'à ce que la longueur du chemin le plus court de a à z soit trouvée. Comme un avantage secondaire, cet algorithme est facilement étendu pour trouver la longueur du chemin le plus court de a à tous d'autres sommets du graphique, et pas seulement à z .

L'algorithme repose sur une série d'itérations. Un ensemble distingué de sommets est construit en ajoutant un sommet à chaque itération. Une procédure d'étiquetage est effectuée à chaque itération. Dans cette procédure d'étiquetage, un sommet w est étiqueté avec la longueur d'un chemin le plus court de a à w qui contient uniquement des sommets déjà dans l'ensemble distinctif. Le sommet ajouté à l'ensemble distinctif est l'un avec une étiquette minimale parmi les sommets qui ne sont pas déjà dans l'ensemble.

Nous donnons maintenant les détails de l'algorithme de Dijkstra. Il commence par étiqueter *un* avec 0 et le d'autres sommets avec ∞. Nous utilisons la notation $L_0(a) = 0$ et $L_0(v) = \infty$ pour ces étiquettes avant toutes les itérations ont eu lieu (l'indice 0 représente l'itération «0e»). Ces étiquettes sont

les longueurs des chemins les plus courts de$a$ aux sommets, où les chemins ne contiennent que le sommet$a$.
(Puisqu'il n'existe aucun chemin d'*un* à un sommet différent d' *un* , ∞ est la longueur d'un chemin le plus court entre a et ce sommet.)

L'algorithme de Dijkstra procède en formant un ensemble distingué de sommets.Soit $S_{k\,le}$ signe fixé après k itérations de la procédure d'étiquetage.On commence par $S_0 = \emptyset$. L'ensemble S_k est formé de S_{k-1} en ajoutant un sommet*u qui* n'est pas dans S_{k-1} avec la plus petite étiquette.

Une fois que u est ajouté à S_k , nous mettons à jour les étiquettes de tous les sommets qui ne sont pas dansS_k , de sorte que $L_k(v)$, le étiquette du sommet v au k ème stade, est la longueur du chemin le plus court de$a$ à v qui contient sommets uniquement dans S_k (c'est-à-dire les sommets qui étaient déjà dans l'ensemble distinct avec$u$).
Notez que la façon dont nous choisissons le sommet$u$ à ajouter à S_k à chaque étape est un choix optimal à chaque étape, ce qui en fait un algorithme gourmand. (Nous prouverons sous peu que cet algorithme gourmand est toujours produit une solution optimale.)

Soit v un sommet qui n'est pas dansS_k . Pour mettre à jour l'étiquette de v , notez que $L_k(v)$ est la longueur d'un plus court chemin de a à v ne contenant que des sommets dans S_k . La mise à jour peut être effectuée efficacement lorsque cette observation est utilisée: le chemin le plus court de$a$ à v ne contenant que des éléments deS_k est soit un chemin le plus court de a à v qui ne contient que des éléments deS_{k-1} (c'est-à-dire les sommets distingués non compris u), ou c'est le chemin le plus court de$a$ à u au (k - 1) premier étage avec l'arête $\{u, v\}$ ajoutée. En d'autres termes,

$$L_k(a, v) = \min \{L_{k-1}(a, v), L_{k-1}(a, u) + w(u, v)\},$$

où $w(u, v)$ est la longueur du bord avec$u$ et v comme extrémités. Cette procédure est répétée par ajouter successivement des sommets à l'ensemble distinctif jusqu'à ce que$z$ soit ajouté. Lorsque z est ajouté au ensemble distingué, son étiquette est la longueur d'un chemin le plus court de$a$ à z .

L'algorithme de Dijkstra est donné dans l'algorithme 1. Plus tard, nous donnerons la preuve que cet algorithme est correct. Notez que nous pouvons trouver la longueur du chemin le plus court de$a$ à tous les autres sommets du graphique si nous continuons cette procédure jusqu'à ce que tous les sommets soient ajoutés à l'ensemble distinctif.

Épisode 334

ALGORITHME 1 Algorithme de Dijkstra.

procédure *Dijkstra* (G : graphique simple et cohérent pondéré, avec
    tous les poids positifs)
{ G a des sommets $a = v_0, v_1, ..., v_n = z$ et des longueurs $w(v_i, v_j)$
    où $w(v_i, v_j) = \infty$ si $\{v_i, v_j\}$ n'est pas une arête dans G }
pour $i := 1$ **à** n
    $L(v_i) := \infty$
$L(a) := 0$
$S := \emptyset$
{les étiquettes sont maintenant initialisées pour que l'étiquette de a soit 0 et tout
    les autres étiquettes sont ∞ et S est l'ensemble vide}
tandis que $z \in S$
    u : = un sommet non en S avec $L(u)$ minimal
    $S := S \cup \{u\}$
    pour tous les sommets v pas dans S
        si $L(u) + w(u, v) < L(v)$ **alors** $L(v) := L(u) + w(u, v)$

{cela ajoute un sommet à S avec une étiquette minimale et met à jour le étiquettes de sommets non en S }

return $L(z)$ { $L(z)$ = longueur d'un chemin le plus court de a à z }

L'exemple 2 illustre le fonctionnement de l'algorithme de Dijkstra. Ensuite, nous montrerons que cette l'algorithme produit toujours la longueur d'un chemin le plus court entre deux sommets dans une pondération graphique.

EXEMPLE 2 Utilisez l'algorithme de Dijkstra pour trouver la longueur d'un chemin le plus court entre les sommets a et z dans le graphique pondéré affiché à la figure 4 (a).

Solution: les étapes utilisées par l'algorithme de Dijkstra pour trouver le chemin le plus court entre a et z sont affichées sur la figure 4. À chaque itération de l'algorithme, les sommets de l'ensemble S_k sont encerclés. Un plus court le chemin de a à chaque sommet ne contenant que des sommets dans S_k est indiqué pour chaque itération. le l'algorithme se termine lorsque z est encerclé. Nous constatons qu'un chemin le plus court de a à z est a, c, b, d, e, z, avec longueur 13. ▲

Remarque: En exécutant l'algorithme de Dijkstra, il est parfois plus pratique de garder une trace de les étiquettes des sommets de chaque étape à l'aide d'un tableau au lieu de redessiner le graphique pour chaque étape.

Ensuite, nous utilisons un argument inductif pour montrer que l'algorithme de Dijkstra produit la longueur d'un chemin le plus court entre deux sommets a et z dans un graphe pondéré connecté non orienté. Prendre comme hypothèse inductive l'assertion suivante: à la k ème itération

(i) l'étiquette de chaque sommet v dans S est la longueur du chemin le plus court de a à ce sommet, et

(ii) l'étiquette de chaque sommet qui n'est pas dans S est la longueur du chemin le plus court de a à ce sommet qui contient seulement (en plus du sommet lui - même) les sommets de S .

Lorsque $k = 0$, avant toute itération, $S = \emptyset$, donc la longueur du chemin le plus court de a à un sommet autre que a est ∞. Par conséquent, le cas de base est vrai.

b ré 4 5 6 0 une 1 8 2 z 2 dix 3 c e

(une)

b 4 (a) ré 4 5 6 0 une 1 8 2 z 2 dix 3 c 2 (a) e

b)

b 3 (a, c) ré 10 (a , c) 4 5 6 0 une 1 8 2 z 2 dix 3 c 2 (a) e 12 (a , c)

(c)

b 3 (a, c) ré 8 (a , c , b) 4 5 6

b 3 (a, c) ré 8 (a , c , b) 4 5 6

0 une 1 8 2 z
2 dix 3
c 2 a) e 12 (a , c)
(ré)

0 une 1 8 2 z 14 (a , c , b , d)
2 dix 3
c 2 a) e 10 (a , c , b , d)
e)

b 3 (a, c) ré 8 (a , c , b)
4 5 6
0 une 1 8 2 z 13 (a , c , b , d , e)
2 dix 3
c 2 a) e 10 (a , c , b , d)
(F)

b 3 (a, c) ré 8 (a , c , b)
4 5 6
0 une 1 8 2 z 13 (a , c , b , d , e)
2 dix 3
c 2 a) e 10 (a , c , b , d)
(g)

FIGURE 4 **Utilisation de l'algorithme de Dijkstra pour trouver le chemin le plus court de** ***a*** **à** ***z*** **.**

Supposons que l'hypothèse inductive est valable pour la k ème itération. Soit v le sommet ajouté à S à la (k + 1) première itération, donc v est un sommet qui n'est pas dans S à la fin de la k ème itération avec le la plus petite étiquette (dans le cas de liens, tout sommet avec la plus petite étiquette peut être utilisé).

De l'hypothèse inductive, nous voyons que les sommets de S avant la (k + 1) st itération sont étiquetés avec la longueur du chemin le plus court à partir de a . De plus, v doit être étiqueté avec la longueur de un chemin le plus court à partir d' *un* . Si tel n'était pas le cas, à la fin de la k ème itération, il y aurait être un chemin de longueur inférieure à $L_k(v)$ contenant un sommet qui n'est pas dans S [car $L_k(v)$ est la longueur d'un chemin le plus court de a à v ne contenant que des sommets en S après la k ème itération]. Soit u le premier sommet pas en S dans un tel chemin. Il existe un chemin de longueur inférieure à $L_k(v)$ de a à u contenant Les sommets seulement S . Cela contredit le choix de v . Par conséquent, *(i)* tient à la fin de la (k + 1) st itération.

Soit u un sommet qui n'est pas dans S après k + 1 itérations. Un chemin le plus court de a à u contenant uniquement les éléments de S contiennent soit v, soit non. S'il ne contient pas v , alors par l'inductif hypothèse sa longueur est $L_k(u)$. S'il contient v , il doit être composé d'un chemin de a à v de la plus courte longueur possible contenant des éléments de S autres que v , suivi du bord de v à u . Dans ce cas, sa longueur serait $L_k(v) + w(v, u)$. Cela montre que (*ii*) est vrai, car $L_{k+1}(u) = \min\{L_k(u), L_k(v) + w(v, u)\}$.

Nous affirmons maintenant ce que nous avons prouvé.

THÉORÈME 1 L'algorithme de Dijkstra trouve la longueur d'un chemin le plus court entre deux sommets dans un graphique pondéré simple non orienté.

Saginaw
113
Grand Rapids
137

142 98
167
56
147
135 Detroit
Kalamazoo
58
133
Tolède

FIGURE 5 Le graphique montrant les distances entre cinq villes.

Nous pouvons maintenant estimer la complexité de calcul de l'algorithme de Dijkstra (en termes de ajouts et comparaisons). L'algorithme n'utilise pas plus de n - 1 itérations où n est le nombre de sommets dans le graphique, car un sommet est ajouté à l'ensemble distinct à chaque itération. Nous avons terminé si nous pouvons estimer le nombre d'opérations utilisées pour chaque itération. nous peut identifier le sommet qui n'est pas dans S_k avec la plus petite étiquette en utilisant pas plus de n - 1 comparaisons. Ensuite, nous utilisons un ajout et une comparaison pour mettre à jour l'étiquette de chaque sommet qui n'est pas dans S_k . Ça suit que pas plus de 2 $(n - 1)$ opérations sont utilisées à chaque itération, car il n'y a plus que n - 1 étiquettes à mettre à jour à chaque itération. Parce que nous n'utilisons pas plus de n - 1 itérations, chacune en utilisant pas plus de 2 $(n - 1)$ opérations, nous avons le théorème 2.

THÉORÈME 2 L'algorithme de Dijkstra utilise des opérations $O(n^2)$ (ajouts et comparaisons) pour trouver la longueur de un chemin le plus court entre deux sommets dans un graphe pondéré simple non orienté connecté avec n sommets.

Le problème des vendeurs ambulants

Nous discutons maintenant d'un problème important concernant les graphiques pondérés. Considérez le problème suivant: lem: Un vendeur itinérant souhaite visiter une seule fois chacune des n villes et revenir à son point. Par exemple, supposons que le vendeur veuille visiter Detroit, Toledo, Saginaw, Grand Rapids et Kalamazoo (voir figure 5). Dans quel ordre doit-il visiter ces villes pour voyager distance totale minimale? Pour résoudre ce problème, nous pouvons supposer que le vendeur commence à Détroit (car cela doit faire partie du circuit) et examiner toutes les façons possibles pour lui de visiter l'autre quatre villes puis retour à Détroit (partir ailleurs produira les mêmes circuits). Là sont au total 24 de ces circuits, mais parce que nous parcourons la même distance lorsque nous parcourons un circuit ordre inverse, il suffit de considérer 12 circuits différents pour trouver la distance totale minimale qu'il doit voyager. Nous listons ces 12 circuits différents et la distance totale parcourue pour chaque circuit. Comme peut être vu sur la liste, la distance totale minimale de 458 miles est parcourue en utilisant le circuit Detroit – Toledo – Kalamazoo – Grand Rapids – Saginaw – Detroit (ou son inverse).

Route	***Distance totale (miles)***
Détroit – Tolède – Grand Rapids – Saginaw – Kalamazoo – Détroit	610
Détroit – Tolède – Grand Rapids – Kalamazoo – Saginaw – Détroit	516
Détroit – Tolède – Kalamazoo – Saginaw – Grand Rapids – Détroit	588
Détroit – Tolède – Kalamazoo – Grand Rapids – Saginaw – Détroit	458
Détroit – Tolède – Saginaw – Kalamazoo – Grand Rapids – Détroit	540
Détroit – Tolède – Saginaw – Grand Rapids – Kalamazoo – Détroit	504
Détroit – Saginaw – Toledo – Grand Rapids – Kalamazoo – Detroit	598
Détroit – Saginaw – Toledo – Kalamazoo – Grand Rapids – Detroit	576
Détroit – Saginaw – Kalamazoo – Toledo – Grand Rapids – Detroit	682
Détroit – Saginaw – Grand Rapids – Toledo – Kalamazoo – Detroit	646
Détroit – Grand Rapids – Saginaw – Toledo – Kalamazoo – Detroit	670
Détroit – Grand Rapids – Tolède – Saginaw – Kalamazoo – Détroit	728

Un manuel de 1832 *Der Handlungsreisende* (Le Vendeur itinérant) mentionne le voyage problème de vendeur, avec exemples de visites à travers Allemagne et Suisse.

Nous venons de décrire un exemple du **problème des vendeurs ambulants** . Les ventes itinérantes-problème de la personne demande le circuit du poids total minimum dans une pondération, complète, non dirigée graphique qui visite chaque sommet exactement une fois et revient à son point de départ. Cela équivaut à demandant un circuit de Hamilton avec un poids total minimum dans le graphique complet, parce que chaque le sommet est visité exactement une fois dans le circuit.

La façon la plus simple de résoudre une instance du problème du voyageur de commerce est pour examiner tous les circuits Hamilton possibles et sélectionner l'un de la longueur totale minimale. Combien faut-il examiner pour résoudre le problème s'il y a n sommets dans le graphe? Une fois par le point de départ est choisi, il y a $(n - 1)!$ différents circuits de Hamilton à examiner, car il sont $n - 1$ choix pour le deuxième sommet, $n - 2$ choix pour le troisième sommet, et ainsi de suite. Parce qu'un Le circuit de Hamilton peut être parcouru dans l'ordre inverse, il suffit d'examiner $(n - 1)!/2$ circuits à trouver notre réponse. Notez que $(n - 1)!/2$ croît extrêmement rapidement. Essayer de résoudre un vendeur itinérant problème de cette façon quand il n'y a que quelques dizaines de sommets est impossible. Par exemple, avec 25 sommets, un total de $24!/2$ (environ 3.1×10^{23}) différents circuits de Hamilton auraient à prendre en considération. Si cela ne prenait qu'une nanoseconde (10^{-9} deuxièmement) pour examiner chaque circuit de Hamilton, un total d'environ dix millions d'années serait nécessaire pour trouver un Hamilton de longueur minimale circuit dans ce graphique par des techniques de recherche exhaustives.

Parce que le problème des vendeurs ambulants a une importance à la fois pratique et théorique, beaucoup d'efforts ont été consacrés à la conception d'algorithmes efficaces pour le résoudre. cependant, aucun algorithme avec une complexité temporelle polynomiale dans le pire des cas n'est connu pour résoudre ce problème. De plus, si un algorithme polynomial de complexité temporelle du pire cas était découvert pour problème de vendeur itinérant, de nombreux autres problèmes difficiles seraient également résolu algorithmes polynomiaux de complexité temporelle dans le pire des cas (comme déterminer si une proposition in n variables est une tautologie, discutée au chapitre 1). Cela découle de la théorie de NP-exhaustivité. (Pour plus d'informations à ce sujet, consultez [GaJo79].)

Une approche pratique du problème du voyageur de commerce lorsqu'il y a plusieurs sommets visiter, c'est utiliser un **algorithme d'approximation** . Ce sont des algorithmes qui ne sont pas nécessairement produire la solution exacte au problème, mais à la place sont garantis pour produire une solution qui est proche d'une solution exacte. (Voir également le préambule de l'exercice 46 du Supplémentaire Exercices du chapitre 3.) Autrement dit, ils peuvent produire un circuit de Hamilton avec un poids total W tel que $W \leq W \leq cW$, où W est la longueur totale d'une solution exacte et c est une constante. Pour Par exemple, il existe un algorithme avec la complexité temporelle du pire cas polynomial qui fonctionne si le le graphique pondéré satisfait l'inégalité du triangle telle que $c = 3/2$. Pour les graphiques pondérés généraux pour chaque nombre réel positif k, aucun algorithme connu ne produira toujours une solution à la plupart du temps k une meilleure solution. Si un tel algorithme existait, cela montrerait que la classe P être le même que la classe NP, peut-être la question ouverte la plus célèbre sur la complexité de algorithmes (voir section 3.3).

En pratique, des algorithmes ont été développés pour résoudre les problèmes des vendeurs ambulants avec jusqu'à 1000 sommets à moins de 2% d'une solution exacte en utilisant seulement quelques minutes de temps d'ordinateur. Pour plus d'informations sur le problème des vendeurs ambulants, y compris son tory, les applications et les algorithmes, voir le chapitre sur ce sujet dans*Applications of Discrete Mathematics* [MiRo91] également disponible sur le site Web de ce livre.

Des exercices

1. Pour chacun de ces problèmes concernant un réseau de métro, tracer un modèle de graphique pondéré qui peut être utilisé pour résoudre le problème.

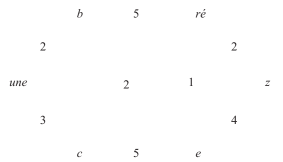
a) Quel est le moins de temps requis pour voyager entre deux arrêts?

b) Quelle est la distance minimale pouvant être parcourue atteindre un arrêt à partir d'un autre arrêt?

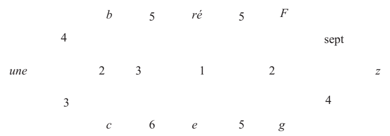
c) Quel est le tarif le plus bas pour voyager entre deux arrêts si des tarifs entre les arrêts sont ajoutés pour donner le total tarif?

Dans les exercices 2 à 4, trouvez la longueur du chemin le plus court entre *un* et *z* dans le graphique pondéré donné.

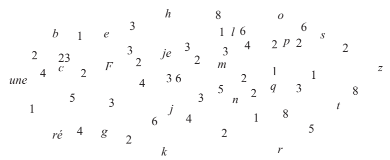
2.



3.



4.



5. Trouvez le chemin le plus court entre *a* et *z* dans chacun des graphiques pondérés dans les exercices 2 à 4.

6. Trouvez la longueur du chemin le plus court entre ces paires de sommets dans le graphique pondéré de l'exercice 3.

a) *a* et *d*

b) *a* et *f*

c) *c* et *f*

d) *b* et *z*

7. Trouvez les chemins les plus courts dans le graphique pondéré de l'exercice 3 entre les paires de sommets de l'exercice 6.

8. Trouvez le chemin le plus court (en kilométrage) entre chacun des paires de villes suivantes dans le système de ligne aérienne Figure 1.

a) New York et Los Angeles

b) Boston et San Francisco

c) Miami et Denver

d) Miami et Los Angeles

9. Trouvez une combinaison de vols avec le moins de temps d'antenne total entre les paires de villes dans l'exercice 8, en utilisant le vol fois indiqué dans la figure 1.

10. Trouvez la combinaison de vols la moins chère les paires de villes de l'exercice 8, en utilisant les tarifs indiqués dans Figure 1.

11. Trouvez un itinéraire le plus court (en distance) entre les centres dans chacune de ces paires de villes dans les communications réseau illustré à la figure 2.

a) Boston et Los Angeles

b) New York et San Francisco

c) Dallas et San Francisco

d) Denver et New York

12. Trouvez un itinéraire avec le temps de réponse le plus court entre le paires de centres informatiques dans l'exercice 11 en utilisant temps de réponse donnés dans la figure 2.

13. Trouvez un itinéraire le moins cher, en frais de location mensuels, entre les paires de centres informatiques de l'exercice 11 en utilisant les frais de location indiqués à la figure 2.

14. Expliquez comment trouver un chemin avec le moins d'arêtes entre deux sommets dans un graphe non orienté en considérant en le considérant comme un problème de chemin le plus court dans un graphe pondéré.

15. Étendre l'algorithme de Dijkstra pour trouver la longueur d'un chemin le plus court entre deux sommets dans un simple pondéré graphique connecté de sorte que la longueur du chemin le plus court entre le sommet *a* et tous les autres sommets du graphique est a trouvé.

16. Étendre l'algorithme de Dijkstra pour trouver la longueur d'un chemin le plus court entre deux sommets dans un simple pondéré graphique connecté de sorte qu'un chemin le plus court entre ces sommets est construit.

17. Les graphiques pondérés dans les figures ci-dessous montrent quelques routes dans le New Jersey. La partie (a) montre les distances entre villes sur ces routes; la partie (b) montre les péages.

Newark
20
42
Woodbridge
Trenton
35
30
60
40
Asbury Park
Camden
55
75
Atlantic City
85
45
Cape May

(une)

Newark
0,60 $
1,00 $
Woodbridge
Trenton
0,75 $
0,00 $
0,70 $
0,00 $
Asbury Park
Camden
1,25 $
1,25 $
Atlantic City
0,00 $
0,75 $
Cape May

b)

a) Trouver un itinéraire le plus court à distance entre Newark et Camden, et entre Newark et Cape May, en utilisant ces routes.

b) Trouver un itinéraire le moins cher en termes de péages totaux les routes dans le graphique entre les paires de villes dans la partie (a) de cet exercice.

18. Est le chemin le plus court entre deux sommets dans un graphique pondéré unique si les poids des bords sont distincts?

19. Quelles sont les applications où il est nécessaire de trouver la longueur d'un chemin simple le plus long entre deux sommets dans un graphique pondéré?

20. Quelle est la longueur d'un chemin simple le plus long dans le graphique de la figure 4 entre a et z ? Entre c et z ?

L'algorithme de Floyd , affiché en tant qu'algorithme 2, peut être utilisé pour trouver la longueur d'un chemin le plus court entre toutes les paires de sommets dans un graphique simple connecté pondéré. Cependant, cette rithm ne peut pas être utilisé pour construire les chemins les plus courts. (Nous attribuons un poids infini à toute paire de sommets non reliés par un bord dans le graphique.)

21. Utilisez l'algorithme de Floyd pour trouver la distance entre tous paires de sommets dans le graphique pondéré de la figure 4 (a).

∗ **22.** Prouver que l'algorithme de Floyd détermine la distance la plus courte entre toutes les paires de sommets dans un simple pondéré graphique.

∗ **23.** Donnez une Big- O estimation du nombre d'opérations (comparisons et ajouts) utilisés par l'algorithme de Floyd pour déterminer la distance la plus courte entre chaque paire de dans un graphe simple pondéré à n sommets.

∗ **24.** Montrer que l'algorithme de Dijkstra peut ne pas fonctionner si les bords peuvent ont des poids négatifs.

ALGORITHM 2 **Algorithme de Floyd.**

procédure *Floyd* (G : graphe simple pondéré)
{ G a des sommets $v_1, v_2, \ldots, v_n$ et des poids $w(v_i, v_j)$
avec $w(v_i, v_j) = \infty$ si $\{v_i, v_j\}$ n'est pas un bord}
pour $i := 1$ **à** n
  pour $j := 1$ **à** n
    $d(v_i, v_j) := w(v_i, v_j)$
pour $i := 1$ **à** n
  pour $j := 1$ **à** n
    pour $k := 1$ **à** n
      si $d(v_j, v_i) + d(v_i, v_k) < d(v_j, v_k)$
        alors $d(v_j, v_k) := d(v_j, v_i) + d(v_i, v_k)$
revenir $d(v_i, v_j)$ { $d(v_i, v_j)$ est la longueur d'un plus court chemin entre v_i et v_j pour $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n$ }

25. Résoudre le problème du vendeur ambulant pour ce graphique en trouvant le poids total de tous les circuits de Hamilton et déterminer un circuit avec un poids total minimum.

une 3 b
5
4
2 6
ré sept c

26. Résoudre le problème du vendeur ambulant pour ce graphique en trouvant le poids total de tous les circuits de Hamilton et déterminer un circuit avec un poids total minimum.

une 3 b
sept 2 8 dix
4 9
5
e c
1 6
ré

27. Trouvez un itinéraire avec le tarif aérien le moins élevé qui visite chacun les villes dans ce graphique, où le poids sur un bord est le prix le plus bas disponible pour un vol entre les deux villes.

329 $ Detroit
189 $
San Francisco
359 $
179 $ 349 $ 229 $ 279 $ Nouveau York
379 $
209 $ US
69 $
Los Angeles Denver

28. Trouvez un itinéraire avec le tarif aérien le moins élevé qui visite chacun les villes dans ce graphique, où le poids sur un bord est le prix le plus bas disponible pour un vol entre les deux villes.

Seattle
409 $
389 $ Boston
429 $ 109 $
379 $ Nouveau York
119 $ 319 $
229 $
239 $
Phénix 309 $ La Nouvelle Orléans

29. Construisez un graphe non orienté pondéré tel que le total poids d'un circuit qui visite chaque sommet au moins une fois est minimisé pour un circuit qui visite certains sommets plus plus d'une fois. [*Astuce:* il existe des exemples avec trois sommets.]

30. Montrer que le problème de trouver un circuit de minimum poids total qui visite chaque sommet d'un graphique pondéré au moins une fois peut être réduit au problème de trouver un circuit de poids total minimum qui visite chaque sommet d'un graphique pondéré exactement une fois. Faites-le en construisant un nouveau graphique pondéré avec les mêmes sommets et arêtes comme le graphique d'origine mais dont le poids du bord necting les sommets *u* et *v* est égal au total minimum poids d'un chemin de *u* à *v* dans le graphique d'origine.

∗ **31.** Le **problème de chemin le plus long** dans un graphe orienté pondéré sans circuits simples demande un chemin dans ce graphique tel que la somme de ses poids de bord est un maximum. Dé-étendre un algorithme pour résoudre le problème de chemin le plus long. [*Astuce* : trouver d'abord un ordre topologique des sommets de le graphique.]

Graphes planaires

introduction

Considérez le problème de joindre trois maisons à chacun des trois services publics distincts, comme indiqué dans Figure 1. Est-il possible de joindre ces maisons et services publics afin qu'aucune des connexions ne se croise? Ce problème peut être modélisé à l'aide du graphe bipartite complet$K_{3,3}$. La question d'origine peut être reformulé comme suit:$K_{3,3}$ peut-il être dessiné dans le plan de sorte que deux de ses bords ne se croisent pas?

Dans cette section, nous étudierons la question de savoir si un graphique peut être dessiné dans le plan sans arêtes croisées. En particulier, nous répondrons au problème des maisons et des services publics.

Il existe toujours plusieurs façons de représenter un graphique. Quand est-il possible d'en trouver au moins un façon de représenter ce graphique dans un plan sans arêtes croisées?

FIGURE 1 **Trois maisons et trois services publics.**

FIGURE 2 **Le Graphique K_4 .**

FIGURE 3 **K_4 Dessiné sans traversée.**

FIGURE 4 **Le Graphique Q_3 .**

FIGURE 5 **Un planaire Représentation de Q_3 .**

DÉFINITION 1 Un graphique est appelé *plan* s'il peut être dessiné dans le plan sans aucune arête se croisant (où un croisement d'arêtes est l'intersection des lignes ou des arcs les représentant en un autre point que leur critère d'évaluation commun). Un tel dessin est appelé une *représentation plane* du graphique.

Un graphique peut être plan même s'il est généralement tracé avec des croisements, car il peut être possible pour le dessiner différemment sans traverser.

EXEMPLE 1 Is K_4 (représenté sur la figure 2 avec deux bords de traversée) plane?

Solution: K_4 est plan car il peut être tracé sans croisements, comme le montre la figure 3. ▲

EXEMPLE 2 Is Q_3 , représenté sur la figure 4, plane?

Solution: Q_3 est plan, car il peut être dessiné sans que les bords se croisent, comme illustré dans Figure 5. ▲

Nous pouvons montrer qu'un graphe est plan en affichant une représentation planaire. Il est plus difficile de montrer qu'un graphe est non planaire. Nous allons donner un exemple pour montrer comment cela peut être fait dans une annonce mode ad hoc. Plus tard, nous développerons quelques résultats généraux qui peuvent être utilisés pour ce faire.

EXEMPLE 3 Is $K_{3,3}$, représenté sur la figure 6, plane?

Solution: Toute tentative de tracer $K_{3,3}$ dans l'avion sans croisement d'arêtes est vouée à l'échec. Nous maintenant montrez pourquoi. Dans toute représentation plane de $K_{3,3}$, les sommets v_1 et v_2 doivent être connectés aux deux v_4 et v_5 . Ces quatre arêtes forment une courbe fermée qui divise le plan en deux régions R_1 et R_2 , comme le montre la figure 7 (a). Le sommet v_3 est dans R_1 ou R_2 . Lorsque v_3 est dans R_2 , l'intérieur de la courbe fermée, les arêtes entre v_3 et v_4 et entre v_3 et v_5 séparent R_2 en deux sous-régions, R_{21} et R_{22} , comme le montre la figure 7 (b).

v_1 v_2 v_3

v_4 v_5 v_6

FIGURE 6 **Le graphique $K_{3,3}$.**

v_1 v_5 R_2 R_1 v_4 v_2

(une)

v_1 v_5 R_{21} v_3 R_1 R_{22} v_4 v_2

b)

FIGURE 7 **Montrant que $K_{3,3}$ est non planaire.**

Ensuite, notez qu'il n'y a aucun moyen de placer le sommet final v_6 sans forcer un croisement. Pour si v_6 est dans R_1, alors l'arête entre v_6 et v_3 ne peut pas être dessinée sans croisement. Si v_6 est dans R_{21}, alors le bord entre v_2 et v_6 ne peut pas être tracé sans croisement. Si v_6 est dans R_{22}, alors l'arête entre v_1 et v_6 ne peut pas être tracée sans croisement.

Un argument similaire peut être utilisé lorsque v_3 est dans R_1. L'achèvement de cet argument est laissé pour le lecteur (voir exercice 10). Il s'ensuit que $K_{3,3}$ n'est pas plan. ▲

L'exemple 3 résout le problème des services publics et des maisons décrit au début de cette section. Les trois maisons et les trois services publics ne peuvent pas être connectés dans l'avion sans traversée. Un argument similaire peut être utilisé pour montrer que K_5 est non planaire. (Voir l'exercice 11.)

APPLICATIONS DES GRAPHIQUES PLANAIRES La planarité des graphiques joue un rôle important dans conception de circuits électroniques. On peut modéliser un circuit avec un graphe en représentant des composants du circuit par des sommets et des connexions entre eux par des arêtes. On peut imprimer un circuit sur un carte unique sans connexion croisée si le graphique représentant le circuit est plan. Quand ce graphe n'est pas planaire, il faut se tourner vers des options plus chères. Par exemple, nous pouvons partitionner les sommets du graphe représentant le circuit en sous-graphes plans. Nous construisons ensuite le circuit utilisant plusieurs couches. (Voir le préambule de l'exercice 30 pour en savoir plus sur l'épaisseur d'un graphique.) Nous pouvons construire le circuit en utilisant des fils isolés chaque fois que les connexions se croisent. Dans ce Dans ce cas, il est important de dessiner le graphique avec le moins de croisements possibles. (Voir le préambule de Exercice 26 pour en savoir plus sur le numéro de croisement d'un graphique.)

La planarité des graphiques est également utile dans la conception des réseaux routiers. Supposons que nous voulons pour relier un groupe de villes par des routes. Nous pouvons modéliser un réseau routier reliant ces villes en utilisant un graphique simple avec des sommets représentant les villes et des bords représentant les autoroutes les connecter. Nous pouvons construire ce réseau routier sans passer par des passages inférieurs ou supérieurs si le le graphe résultant est plan.

Formule d'Euler

Une représentation plane d'un graphique divise le plan en **régions**, y compris une région non bornée. Par exemple, la représentation plane du graphique illustré à la figure 8 divise le plan en six Régions. Ceux-ci sont étiquetés sur la figure. Euler a montré que toutes les représentations planes d'un graphe diviser l'avion en le même nombre de régions. Il a accompli cela en trouvant une relation parmi le nombre de régions, le nombre de sommets et le nombre d'arêtes d'un graphe planaire.

THÉORÈME 1 **FORMULE EULER** Soit G un graphe simple planaire connecté avec e arêtes et v sommets. Soit r est le nombre de régions dans une représentation plane de G. Alors $r = e - v + 2$.

Preuve: Tout d' abord, nous spécifions une représentation plane de G. Nous allons prouver le théorème en construisant une séquence de sous-graphes $G_1, G_2, \ldots, G_e = G$, ajoutant successivement un bord à chaque étage. Cette se fait en utilisant la définition inductive suivante. Choisissez arbitrairement un bord de G pour obtenir G_1. Obtenir G_n à partir de G_{n-1} en ajoutant arbitrairement une arête incidente avec un sommet déjà dans G_{n-1},

R_4
R_2 R_6
R_3
R_1
R_5

FIGURE 8 **Les régions de la représentation planaire d'un graphe.**

en ajoutant l'autre sommet incident avec cette arête s'il n'est pas déjà dans G_{n-1}. Cette construction est possible car G est connecté. G est obtenu après l'ajout de e arêtes. Soit r_n, e_n et v_n représentent le nombre de régions, d'arêtes et de sommets de la représentation planaire de G_n induit par la représentation plane de G, respectivement.

La preuve va maintenant se dérouler par induction. La relation $r_1 = e_1 - v_1 + 2$ est vraie pour G_1, car $e_1 = 1$, $v_1 = 2$ et $r_1 = 1$. Ceci est illustré à la figure 9.

Supposons maintenant que $r_k = e_k - v_k + 2$. Soit $\{a_{k+1}, b_{k+1}\}$ l'arête qui est ajoutée à G_k à obtenir G_{k+1}. Il y a deux possibilités à considérer. Dans le premier cas, a_{k+1} et b_{k+1} sont tous deux déjà en G_k. Ces deux sommets doivent être à la frontière d'une région commune R, sinon il serait impossible d'ajouter l'arête $\{a_{k+1}, b_{k+1}\}$ à G_k sans que deux arêtes se croisent (et G_{k+1} est plan). L'ajout de ce nouveau bord divise R en deux régions. Par conséquent, dans ce cas, $r_{k+1} = r_k + 1$, $e_{k+1} = e_k + 1$ et $v_{k+1} = v_k$. Ainsi, chaque côté de la formule le nombre de régions, d'arêtes et de sommets augmente exactement d'un, donc cette formule est toujours vraie. Dans en d'autres termes, $r_{k+1} = e_{k+1} - v_{k+1} + 2$. Ce cas est illustré à la figure 10 (a).

R_1

un_1 b_1

FIGURE 9 **Le Cas de base du Preuve d'Euler Formule.**

Dans le second cas, l'un des deux sommets de la nouvelle arête n'est pas déjà dans G_k. Supposer que a_{k+1} est dans G_k mais que b_{k+1} ne l'est pas. L'ajout de ce nouveau bord ne produit pas de nouvelles régions, parce que b_{k+1} doit être dans une région qui a un_{k+1} à sa frontière. Par conséquent, $r_{k+1} = r_k$. De plus, $e_{k+1} = e_k + 1$ et $v_{k+1} = v_k + 1$. Chaque côté de la formule reliant le nombre des régions, des arêtes et des sommets reste le même, donc la formule est toujours vraie En d'autres termes, $r_{k+1} = e_{k+1} - v_{k+1} + 2$. Ce cas est illustré à la figure 10 (b).

Nous avons terminé l'argument d'induction. Par conséquent, $r_n = e_n - v_n + 2$ pour tout n. Parce que le le graphe d'origine est le graphe G_e, obtenu après l'ajout de e arêtes, le théorème est vrai.

La formule d'Euler est illustrée dans l'exemple 4.

EXEMPLE 4 Supposons qu'un graphe simple planaire connecté ait 20 sommets, chacun de degré 3. En combien régions une représentation de ce graphe planaire divise-t-elle le plan?

Solution: Ce graphique a 20 sommets, chacun de degré 3, donc $v = 20$. Parce que la somme des degrés des sommets, $3v = 3 \cdot 20 = 60$, est égal au double du nombre d'arêtes, $2e$, nous avons $2e = 60$, ou $e = 30$. Par conséquent, d'après la formule d'Euler, le nombre de régions est

$$r = e - v + 2 = 30 - 20 + 2 = 12.$$

▲

La formule d'Euler peut être utilisée pour établir certaines inégalités qui doivent être satisfaites par le plan graphiques. Une telle inégalité est donnée dans le corollaire 1.

a_{n+1}

a_{n+1} b_{n+1} R

R

b_{n+1}

(une) b)

FIGURE 10 Ajout d'un bord à G_n pour produire G_{n+1}.

c
sept
b *ré*
R_1 3
une
R_2
g
6 *e*
R_3
F

FIGURE 11 Les degrés des régions.

COROLLARY 1 Si G est un graphe simple planaire connecté avec e arêtes et v sommets, où $v \geq 3$, alors $e \leq 3v - 6$.

Avant de prouver le corollaire 1, nous l'utiliserons pour prouver le résultat utile suivant.

COROLLARY 2 Si G est un graphe simple planaire connecté, alors G a un sommet de degré ne dépassant pas cinq.

Preuve: si G a un ou deux sommets, le résultat est vrai. Si G a au moins trois sommets, par Corollaire 1 nous savons que $e \leq 3v - 6$, donc $2e \leq 6v - 12$. Si le degré de chaque sommet était d'au moins six, alors car $2e = \sum_{v \in V} \deg(v)$ (par le théorème de prise de contact), nous aurions $2e \geq 6v$. Mais ça contredit l'inégalité $2e \leq 6v - 12$. Il s'ensuit qu'il doit y avoir un sommet de degré no supérieur à cinq.

La preuve du Corollaire 1 est basée sur le concept du **degré** d'une région, qui est défini être le nombre d'arêtes sur la frontière de cette région. Lorsqu'un bord se produit deux fois sur la frontière (de sorte qu'elle soit tracée deux fois lorsque la frontière est tracée), elle contribue le degré. Nous désignons le degré d'une région R par $\deg(R)$. Les degrés des régions du graphique illustré à la figure 11 sont affichés dans la figure.

La preuve du Corollaire 1 peut maintenant être donnée.

Preuve: un graphique simple planaire connecté dessiné dans le plan divise le plan en régions, dis-en r. Le degré de chaque région est d'au moins trois. (Parce que les graphiques discutés ici sont des graphiques simples, pas de bords multiples qui pourraient produire des régions de degré deux, ou des boucles qui pourraient produire des régions de degré un, sont autorisés.) Noter en particulier que le degré de la région non bornée est d'au moins trois car il y a au moins trois sommets dans le graphique.

Notez que la somme des degrés des régions est exactement le double du nombre d'arêtes dans le graphique, parce que chaque arête se produit à la frontière d'une région exactement deux fois (soit sur deux différentes régions, ou deux fois dans la même région). Parce que chaque région a un degré supérieur ou égal à trois, il s'ensuit que

$$2e = \sum_{\text{toutes les régions}R} \deg(R) \geq 3r.$$

Par conséquent,

$$(\text{Deux} / 3)\, e \geq r.$$

G_1 une b c ré e

G_2 une b h F g c ré e

G_3 une b je k j g c ré e

FIGURE 12 Graphes homéomorphes.

En utilisant $r = e - v + 2$ (formule d'Euler), on obtient

$$e - v + 2 \leq (2 / \text{trois})\, e.$$

Il s'ensuit que $e / 3 \leq v - 2$. Cela montre que $e \leq 3v - 6$.

Ce corollaire peut être utilisé pour démontrer que K_5 est non planaire.

EXEMPLE 5 Montrer que K_5 est non planaire en utilisant le corollaire 1.

Solution: Le graphique K_5 a cinq sommets et 10 arêtes. Cependant, l'inégalité $e \leq 3v - 6$ est pas satisfait pour ce graphique car $e = 10$ et $3v - 6 = 9$. Par conséquent, K_5 n'est pas planaire. ▲

Il a été montré précédemment que $K_{3,3}$ n'est pas plan. Notez, cependant, que ce graphique a six sommets et neuf bords. Cela signifie que l'inégalité $e = 9 \leq 12 = 3{,}6{,}6 - 6$ est satisfaite. Par conséquent, le fait que l'inégalité $e \leq 3v - 6$ soit satisfaite n'implique *pas* qu'un graphe soit plan. cependant, le corollaire suivant du Théorème 1 peut être utilisé pour montrer que $K_{3,3}$ est non planaire.

COROLLARY 3 Si un graphe simple planaire connecté a e arêtes et v sommets avec $v \geq 3$ et aucun circuit de longueur trois, puis $e \leq 2v - 4$.

La preuve du Corollaire 3 est similaire à celle du Corollaire 1, sauf que dans ce cas le fait que il n'y a pas de circuits de longueur trois implique que le degré d'une région doit être d'au moins quatrele les détails de cette preuve sont laissés au lecteur (voir exercice 15).

EXEMPLE 6 Utilisez le corollaire 3 pour montrer que $K_{3,3}$ est non planaire.

Solution: Parce que $K_{3,3}$ n'a pas de circuits de longueur trois (c'est facile à voir car il est bipartite), Le corollaire 3 peut être utilisé. $K_{3,3}$ a six sommets et neuf arêtes. Parce que $e = 9$ et $2v - 4 = 8$, Le corollaire 3 montre que $K_{3,3}$ est non planaire. ▲

KAZIMIERZ KURATOWSKI (1896–1980) Kazimierz Kuratowski, fils d'un célèbre avocat de Varsovie, a fréquenté l'école secondaire de Varsovie. Il a étudié à Glasgow, en Écosse, de 1913 à 1914, mais n'a pas pu revenir là après le déclenchement de la Première Guerre mondiale. En 1915, il entra à l'Université de Varsovie, où il était actif dans le polonais mouvement étudiant patriotique. Il publie son premier article en 1919 et obtient son doctorat. en 1921. Il était un actif membre du groupe connu sous le nom de l'École de mathématiques de Varsovie, travaillant dans les domaines des fondations de la théorie des ensembles et de la topologie. Il a été nommé professeur agrégé à l'Université polytechnique de Lwów, où il y resta sept ans, collaborant avec les grands mathématiciens polonais Banach et Ulam. En 1930, à Lwów, Kuratowski a terminé son travail de caractérisation de graphes planaires.

En 1934, il est retourné à l'Université de Varsovie en tant que professeur titulaire. Jusqu'au début de la Seconde Guerre mondiale, il était actif dans la recherche et l'enseignement. Pendant la guerre, en raison de la persécution des Polonais instruits, Kuratowski s'est caché sous un prend son nom et enseigne à l'Université clandestine de Varsovie. Après la guerre, il a aidé à relancer les mathématiques polonaises, servant de directeur de l'Institut national polonais de mathématiques. Il a écrit plus de 180 articles et trois manuels largement utilisés.

une b une b une b
j
je c je c je c
k h ré ré
e e
F F
g g g
G H K_5

FIGURE 13 **Le graphe non dirigé G, un sous-graphe H homéomorphe à K_5 et K_5.**

Théorème de Kuratowski

Nous avons vu que $K_{3,3}$ et K_5 ne sont pas plans. De toute évidence, un graphique n'est pas planaire s'il contient soit de ces deux graphiques comme un sous-graphique. Étonnamment, tous les graphiques non plans doivent contenir un sous-graphique qui peuvent être obtenus à partir de $K_{3,3}$ ou K_5 en utilisant certaines opérations autorisées.

Si un graphe est planaire, tout graphe sera obtenu en supprimant une arête $\{u, v\}$ et en ajoutant un nouveau sommet w avec les arêtes $\{u, w\}$ et $\{w, v\}$. Une telle opération est appelée **élémentaire subdivision** . Les graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ sont appelés **homéomorphes** s'ils peut être obtenu à partir du même graphe par une séquence de subdivisions élémentaires.

EXEMPLE 7 Montrez que les graphiques G_1, G_2 et G_3 affichés sur la figure 12 sont tous homéomorphes.

Solution: Ces trois graphes sont homéomorphes car tous les trois peuvent être obtenus à partir de G_1 par subdivisions élémentaires. G_1 peut être obtenu par lui-même par une séquence vide d'éléments subdivisions. Pour obtenir G_2 à partir de G_1, nous pouvons utiliser cette séquence de subdivisions élémentaires:

(i) supprimer l'arête { a, c }, ajouter le sommet f et ajouter les arêtes { a, f } et { f, c }; (ii) supprimer l'arête { b, c }, ajoutez le sommet g , et ajoutez les arêtes { b, g } et { g, c }; et (iii) retirer le bord { b, g }, ajoutez le sommet h et ajoutez les arêtes { g, h } et { b, h }. Nous laissons au lecteur le soin de déterminer la séquence de subdivisions élémentaires nécessaires pour obtenir G_3 à partir de G_1 . ▲

Le mathématicien polonais Kazimierz Kuratowski a créé le théorème 2 en 1930, qui caractérise les graphes plans en utilisant le concept d'homéomorphisme des graphes.

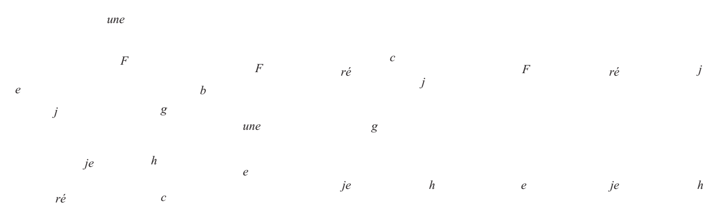
THÉORÈME 2 Un graphe est non planaire si et seulement s'il contient un sous-graphe homéomorphe à $K_{3,3}$ ou K_5 .

Il est clair qu'un graphe contenant un sous-graphe homéomorphe à $K_{3,3}$ ou K_5 est non planaire. cependant, la preuve de l'inverse, à savoir que chaque graphe non planaire contient un sous-graphe homéomorphe à $K_{3,3}$ ou K_5 , est compliqué et ne sera pas donné ici.Les exemples 8 et 9 illustrent comment Le théorème de Kuratowski est utilisé.

EXEMPLE 8 Déterminez si le graphique G montré dans la figure 13 est plan.

Solution: G a un sous-graphe H homéomorphe à K_5 . H est obtenu en supprimant h, j et k et toutes les arêtes incidentes avec ces sommets. H est homéomorphe à K_5 car il peut être obtenu à partir de K_5 (avec les sommets a , b , c , g et i) par une séquence de subdivisions élémentaires, en ajoutant sommets d , e et f . (Le lecteur doit construire une telle séquence de subdivisions élémentaires.) Par conséquent, G est non planaire. ▲

Épisode 347



(une) b) H (c) $K_{3,3}$

FIGURE 14 (a) Le graphe de Petersen, (b) un sous-graphe H homéomorphe à $K_{3,3}$ et (c) $K_{3,3}$.

EXEMPLE 9 Le graphique de Petersen, illustré à la figure 14 (a), est-il plan?(Le mathématicien danois Julius Petersen a étudié ce graphique en 1891; il est souvent utilisé pour illustrer diverses propriétés théoriques des graphiques.)

Solution: le sous-graphe H du graphe de Petersen obtenu en supprimant b et les trois arêtes qui ont b comme point final, illustré à la figure 14 (b), est homéomorphe à $K_{3,3}$, avec des ensembles de sommets { f, d, j } et { e, i, h }, car il peut être obtenu par une suite de subdivisions élémentaires, supprimer { d, h } et ajouter { c, h } et { c, d }, supprimer { e, f } et ajouter { a, e } et { a, f }, et supprimer { i, j } et ajouter { g, i } et { g, j }. Par conséquent, le graphe de Petersen n'est pas plan. ▲

Des exercices

1. Cinq maisons peuvent-elles être connectées à deux services publics sans nections traversant?

Dans les exercices 2 à 4, dessinez le graphique plan donné sans traversées.

2. **3.**

4.

Dans les exercices 5 à 9, déterminez si le graphique donné est plan. Si tel est le cas, dessinez-le de façon à ce qu'aucun bord ne se croise.

5. *une* *b* *c* *ré* *e* *F*

6. *a* *b* *c* *ré* *e* *F*

sept. *une* *b* *F* *c* *e* *ré*

8. *une* *b* *h* *c* *g* *ré* *F* *e*

9. *une* *je* *b* *h* *g* *c* *F* *ré* *e*

10. Complétez l'argument de l'exemple 3.

11. Montrer que K_5 est non planaire en utilisant un argument similaire à celle donnée dans l'exemple 3.

12. Supposons qu'un graphe planaire connecté ait huit sommets, chacun de degré trois. Dans combien de régions se trouve l'avion divisé par une représentation plane de ce graphique?

13. Supposons qu'un graphe planaire connecté ait six sommets, chacun de degré quatre. Dans combien de régions se trouve l'avion divisé par une représentation plane de ce graphique?

14. Supposons qu'un graphe connecté ait 30 arêtes. Si un la représentation plane de ce graphique divise le plan en 20 régions, combien de sommets ce graphique a-t-il?

Épisode 348

15. Prouvez le corollaire 3.

16. Supposons qu'un graphe simple planaire bipartite connecté a e arêtes et v sommets. Montrer que $e \leq 2\ v$ - 4 si $v \geq 3$.

∗ **17.** Supposons qu'un graphe simple planaire connecté avec e les arêtes et les sommets en V ne contiennent pas de circuits simples de longueur 4 ou moins. Vérifier que $e \leq$ (cinq / 3) c - (10 / 3) si $v \geq 4$.

18. Supposons qu'un graphe planaire ait k composants connectés, e arêtes et v sommets. Supposons également que l'avion soit divisé en r régions par une représentation plane de la graphique. Trouvez une formule pour r en termes de e, v et k .

19. Lesquels de ces graphes non plans ont la propriété la suppression de tout sommet et de tous les bords incidents avec celui

24. *une* *b* *c* *je* *h* *ré* *g* *e* *F*

25. *b* *c* *g*

sommet produit un graphe planaire?
a) K_5 **b)** K_6 **c)** $K_{3,3}$ **d)** $K_{3,4}$

Dans les exercices 20 à 22, déterminez si le graphique donné est homéomorphe à $K_{3,3}$.

20. c une b ré e F g h

21. a b c g h ré e F

22. une l b k c j ré je e h F g

Dans les exercices 23-25, utilisez le théorème de Kuratowski pour déterminer si le graphe donné est plan.

23. a b c ré e F g h

une ré F e

Le **nombre** de **croisement** d'un graphique simple est le nombre minimum nombre de croisements qui peuvent se produire lorsque ce graphique est tracé plan où trois arcs représentant les arêtes ne sont pas autorisés à traverser au même point.

26. Montrez que $K_{3,3}$ a 1 comme numéro de croisement.

27. Trouvez les numéros de croisement de chacun de ces non plans graphiques.
a) K_5 **b)** K_6 **c)** K_7
d) $K_{3,4}$ **e)** $K_{4,4}$ **f)** $K_{5,5}$

* **28.** Trouvez le numéro de passage du graphique de Petersen.

** **29.** Montrer que si m et n sont même des entiers positifs, le nombre de $K_{m,n}$ est inférieur ou égal à $mn\,(m-2)(n-2)/16$. [*Astuce:* placez m sommets le long de l' axe des x pour qu'ils sont également espacés et symétriques par rapport à l'origin et placez n sommets le long de l' axe y afin qu'ils soient également espacés et symétriques par rapport à l'origine. Maintenant, connecter chacun des m sommets de l' axe des x à chacun des sommets sur l' axe des y et compter les croisements.]

L' **épaisseur** d'un graphe simple G est le plus petit nombre de sous-graphes plans de G qui ont G comme union.

30. Montrer que $K_{3,3}$ a 2 comme épaisseur.

* **31.** Trouvez l'épaisseur des graphiques dans l'exercice 27.

32. Montrer que si G est un graphe simple connecté avec v sommets et e bords, où $v \geq 3$, alors l'épaisseur de G est à au moins $\lceil e/(3v-6) \rceil$.

* **33.** Utilisez l'exercice 32 pour montrer que l'épaisseur de K_n est au moins $\lfloor (n+7)/6 \rfloor$ chaque fois que n est un entier positif.

34. Montrer que si G est un graphe simple connecté avec v sommets et e bords, où $v \geq 3$, et aucun circuit de longueur trois, alors l'épaisseur de G est au moins $\lceil e/(2v-4) \rceil$.

35. Utilisez l'exercice 34 pour montrer que l'épaisseur de $K_{m,n}$, où m et n ne sont pas tous les deux 1, est au moins $\lceil mn/(2m+2n-4) \rceil$ chaque fois que m et n sont des entiers positifs.

* **36.** Dessinez K_5 sur la surface d'un tore (un beignet en forme solide) afin qu'aucun bord ne se croise.

* **37.** Dessinez $K_{3,3}$ à la surface d'un tore de sorte qu'aucun bord ne se croise.

B g B C ré F UNE UNE C E E ré

FIGURE 1 **Deux cartes.**

Coloration graphique

introduction

Les problèmes liés à la coloration des cartes des régions, telles que les cartes de régions du monde, généré de nombreux résultats en théorie des graphes. Quand une carte* est coloré, deux régions avec un point commun les bordures se voient généralement attribuer différentes couleurs. Une façon de garantir que deux régions adjacentes ne jamais avoir la même couleur, c'est utiliser une couleur différente pour chaque région. Cependant, cela est inefficace, et sur des cartes comportant de nombreuses régions, il serait difficile de distinguer des couleurs similaires Au lieu de cela, un petit nombre de couleurs doivent être utilisées dans la mesure du possible. Considérez le problème de la détermination du moins de couleurs pouvant être utilisées pour colorer une carte afin que les régions adjacentes ne même couleur. Par exemple, pour la carte illustrée à gauche sur la figure 1, quatre couleurs suffisent, mais trois les couleurs ne suffisent pas. (Le lecteur doit vérifier cela.) Sur la carte de droite de la figure 1, trois les couleurs sont suffisantes (mais deux ne le sont pas).

Chaque carte dans le plan peut être représentée par un graphique. Pour mettre en place cette correspondance, chaque région de la carte est représentée par un sommet. Les arêtes relient deux sommets si les régions représentés par ces sommets ont une frontière commune. Deux régions qui se touchent en un seul point ne sont pas considérés comme adjacents. Le graphique résultant est appelé le **double graphique** de la carte. Au fait dans lequel des doubles graphiques de cartes sont construits, il est clair que toute carte dans le plan a un plan double graphique. La figure 2 affiche les graphiques doubles qui correspondent aux cartes illustrées à la figure 1.

Le problème de la coloration des régions d'une carte équivaut au problème de la coloration des sommets du graphique double de sorte qu'il n'y ait pas deux sommets adjacents dans ce graphique de la même couleurnous définissez maintenant une coloration graphique.

DÉFINITION 1 Une *coloration* d'un graphique simple est l'attribution d'une couleur à chaque sommet du graphique de sorte que deux sommets adjacents n'ont pas la même couleur.

B *C* *UNE* *ré* *g* *F* *E* *B* *UNE* *C* *E* *ré*

FIGURE 2 **Graphiques doubles des cartes de la figure 1.**

* Nous supposerons que toutes les régions d'une carte sont connectées Cela élimine tout problème présenté par ces entités géographiques comme Michigan.

Un graphique peut être coloré en attribuant une couleur différente à chacun de ses sommets. Cependant, pour la plupart graphiques une coloration qui utilise moins de couleurs que le nombre de sommets dans le graphique peut être trouvée. Quel est le moins de couleurs nécessaires?

DÉFINITION 2 Le *nombre chromatique* d'un graphique est le moins de couleurs nécessaires pour une coloration de ce graphique. Le nombre chromatique d'un graphe G est noté $\chi(G)$. (Ici χ est le grec lettre *chi* .)

Notez que demander le nombre chromatique d'un graphe planaire revient à demander le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorer une carte planaire de sorte qu'il n'y ait pas deux régions adjacentes assigné la même couleur. Cette question est étudiée depuis plus de 100 ans. La réponse est fourni par l'un des théorèmes les plus célèbres en mathématiques.

THÉORÈME 1 **LE THÉORÈME DES QUATRE COULEURS** Le nombre chromatique d'un graphe planaire n'est pas plus grand de quatre.

Le théorème des quatre couleurs a été initialement posé comme une conjecture dans les années 1850. C'était finalement prouvé par les mathématiciens américains Kenneth Appel et Wolfgang Haken en 1976. Avant 1976, de nombreuses épreuves incorrectes ont été publiées, souvent avec des erreurs difficiles à trouver. En outre, de nombreux des tentatives futiles ont été faites pour construire des contre-exemples en dessinant des cartes qui quatre couleurs. (Prouver le théorème des cinq couleurs n'est pas si difficile; voir l'exercice 36.)

La preuve fallacieuse la plus notoire de toutes les mathématiques est peut-être la preuve incorrecte de le théorème des quatre couleurs publié en 1879 par un avocat londonien et mathématicien amateur, Alfred Kempe. Les mathématiciens ont accepté sa preuve comme correcte jusqu'en 1890, lorsque Percy Heawood a trouvé une erreur qui a rendu l'argument de Kempe incomplet. Cependant, le raisonnement de Kempe s'est avéré être la base de la preuve réussie donnée par Appel et Haken. Leur preuve repose sur une analyse minutieuse au cas par cas effectuée par ordinateur. Ils ont montré que si les quatre couleurs théorème était faux, il devrait y avoir un contre-exemple de l'un des 2000 différents types, et ils ont ensuite montré qu'aucun de ces types n'existe. Ils ont utilisé plus de 1000 heures de temps informatique dans leur preuve. Cette preuve a généré une grande controverse, parce que les ordinateurs y jouaient un rôle si important. Par exemple, pourrait-il y avoir une erreur dans un programme informatique qui a conduit à des résultats incorrects? Leur argument était-il vraiment une preuve si cela dépendait sur ce qui pourrait être une sortie informatique non fiable? Depuis que leur preuve est apparue, des preuves plus simples compter sur la vérification de moins de types de contre-exemples possibles ont été trouvés et une preuve en utilisant un système d'épreuve automatisé a été créé. Cependant, aucune preuve ne reposant pas sur un ordinateur n'a encore été trouvé.

Notez que le théorème des quatre couleurs ne s'applique qu'aux graphes planaires. Les graphes non plans peuvent avoir des nombres chromatiques arbitrairement grands, comme le montre l'exemple 2.

Deux choses sont nécessaires pour montrer que le nombre chromatique d'un graphe est k. Nous devons d'abord montrer que le graphique peut être coloré avec k couleurs. Cela peut être fait en construisant un tel coloration. Deuxièmement, nous devons montrer que le graphique ne peut pas être coloré en utilisant moins de k couleurs. Les exemples 1 à 4 illustrent comment trouver des nombres chromatiques.

ALFRED BRAY KEMPE (1849–1922) Kempe était avocat et autorité de premier plan en droit ecclésiastique. Cependant, après avoir étudié les mathématiques à l'Université de Cambridge, il a conservé son intérêt pour elle, et plus tard dans la vie il a consacré un temps considérable à la recherche mathématique. Kempe a contribué à la cinématique, la branche des mathématiques traitant du mouvement, et à la logique mathématique. Cependant, Kempe est surtout connu pour son preuve fallacieuse du théorème des quatre couleurs.

b *e* *b* *e*

une *ré* *g* *une* *ré* *g*

c *F* *c* *F*
g *H*

FIGURE 3 La simple graphes *G* et *H* .

EXEMPLE 1 Quels sont les nombres chromatiques des graphiques *G* et *H* représentés sur la figure 3?

Solution: le nombre chromatique de *G* est d'au moins trois, car les sommets *a, b* et *c* doivent se voir attribuer différentes couleurs. Pour voir si *G* peut être coloré avec trois couleurs, affectez le rouge à *a* , le bleu à *b* et vert à *c* . Ensuite, *d* peut (et doit) être coloré en rouge car il est adjacent à *b* et *c* . De plus, *e* peut (et doit) être coloré en vert car il n'est adjacent qu'aux sommets colorés rouge et bleu, et *f* peut (et doit) être coloré en bleu car il n'est adjacent qu'aux sommets colorés rouge et vert. Enfin, *g* peut (et doit) être coloré en rouge car il n'est adjacent qu'aux sommets couleur bleu et vert. Cela produit une coloration de *G en* utilisant exactement trois couleurs. Figure 4 affiche une telle coloration.

Le graphe *H* est composé du graphe *G* avec une arête reliant *a* et *g* . Toute tentative de la couleur *H en* utilisant trois couleurs doit suivre le même raisonnement que celui utilisé pour la couleur *G* , sauf dernière étape, lorsque tous les sommets autres que *g* ont été colorés. Ensuite, parce que *g* est adjacent (en *H*) aux sommets colorés en rouge, bleu et vert, une quatrième couleur, disons marron, doit être utilisée. Par conséquent, *H* a un nombre chromatique égal à 4. Une coloration de *H* est représentée sur la figure 4. ▲

b Bleu *e* Vert *b* Bleu Vert *e*

une rouge *ré* rouge *g* Rouge *une* rouge *ré* rouge *g* marron

c Vert *f* Bleu *c* Vert *f* Bleu
g *H*

FIGURE 4 Colorants des graphes *G* et *H* .

NOTE HISTORIQUE En 1852, un ancien élève d'Augustus De Morgan, Francis Guthrie, a remarqué que le les comtés en Angleterre pouvaient être colorés en utilisant quatre couleurs de sorte qu’aucun comté adjacent n’ait été Couleur. Sur cette preuve, il a supposé que le théorème des quatre couleurs était vrai. Francis a dit à son frère Frederick, à l'époque un étudiant de De Morgan, à propos de ce problème. À son tour, Frédéric a demandé à son professeur De Morgan conjecture de son frère. De Morgan était extrêmement intéressé par ce problème et l'a fait connaître tout au long du communauté mathématique. En fait, la première référence écrite à la conjecture peut être trouvée dans une lettre de De Morgan à Sir William Rowan Hamilton. Bien que De Morgan pensait que Hamilton serait intéressé par cette problème, Hamilton n'était apparemment pas intéressé, car cela n'avait rien à voir avec les quaternions.

NOTE HISTORIQUE Bien qu'une preuve plus simple du théorème des quatre couleurs ait été trouvée par Robertson, Sanders, Seymour et Thomas en 1996, réduisant la partie informatique de la preuve à l'examen de 633 configurations, aucune preuve qui ne repose pas sur des calculs approfondis n'a encore été trouvée.

un rouge *b* Bleu

Brun *e* *c* Vert

d Jaune

FIGURE 5 **Une coloration de K_5.**

un rouge *b* Rouge *c* Rouge

d Bleu *e* Bleu *f* Bleu *g* Bleu

FIGURE 6 **Une coloration de $K_{3,4}$.**

EXEMPLE 2 Quel est le nombre chromatique de K_n ?

Solution: une coloration de K_n peut être construite à l'aide de n couleurs en attribuant une couleur différente à chaque sommet. Existe-t-il une coloration utilisant moins de couleurs? La réponse est non. Deux sommets ne peuvent pas avoir la même couleur, car tous les deux sommets de ce graphique sont adjacents. D'où le le nombre chromatique de K_n est n . Autrement dit, $\chi(K_n) = n$. (Rappelons que K_n n'est pas plan lorsque $n \geq 5$, donc ce résultat ne contredit pas le théorème des quatre couleurs.) Une coloration de K_5 utilisant cinq couleurs est illustré à la figure 5. ▲

EXEMPLE 3 Quel est le nombre chromatique du graphe bipartite complet $K_{m,n}$, où m et n sont positifs des entiers?

Solution: Le nombre de couleurs nécessaires peut sembler dépendre de m et n . Cependant, comme le théorème 4 dans la section 10.2 nous dit, seulement deux couleurs sont nécessaires, car $K_{m,n}$ est un graphe bipartite. Par conséquent, $\chi(K_{m,n}) = 2$. Cela signifie que nous pouvons colorer l'ensemble des m sommets avec une couleur et l'ensemble des n sommets avec une deuxième couleur. Parce que les arêtes ne connectent qu'un sommet de l'ensemble des m sommets et un sommet de l'ensemble de n sommets, deux sommets adjacents n'ont pas la même couleur. Une coloration de $K_{3,4}$ avec deux couleurs est affiché dans la figure 6. ▲

EXEMPLE 4 Quel est le nombre chromatique du graphe C_n , où $n \geq 3$? (Rappelons que C_n est le cycle avec n sommets.)

Solution: Nous examinerons d'abord certains cas individuels. Pour commencer, soit $n = 6$. Choisissez un sommet et colorez-le en rouge. Procéder dans le sens des aiguilles d'une montre dans la représentation plane de C_6 illustrée à la figure 7. Il est nécessaire de attribuer une deuxième couleur, disons bleu, au sommet suivant atteint. Continuez dans le sens horaire; le troisième sommet peut être coloré en rouge, le quatrième sommet en bleu et le cinquième sommet en rouge. Finalement, le le sixième sommet, qui est adjacent au premier, peut être coloré en bleu. Par conséquent, le nombre chromatique de C_6 est 2. La figure 7 montre la coloration construite ici.

une *b* *une* *b*

rouge Bleu rouge Bleu

F Bleu rouge *c* *e* Jaune rouge *c*

rouge Bleu Bleu

e *ré* *ré*

C_6 C_5

FIGURE 7 **Colorations de C_5 et C_6.**

Soit ensuite n = 5 et considérons C_5 . Choisissez un sommet et coloriez-le en rouge. Dans le sens horaire, il est nécessaire d'attribuer une deuxième couleur, disons bleu, au prochain sommet atteint. Poursuivant dans le dans le sens horaire, le troisième sommet peut être coloré en rouge et le quatrième sommet peut être coloré en bleu. Le cinquième sommet ne peut pas être coloré en rouge ou en bleu, car il est adjacent au quatrième sommet et le premier sommet. Par conséquent, une troisième couleur est requise pour ce sommet. Notez que nous ont également eu besoin de trois couleurs si nous avions des sommets colorés dans le sens antihoraire. Donc, le nombre chromatique de C_5 est 3. Une coloration de C_5 utilisant trois couleurs est affichée dans la figure 7.

En général, deux couleurs sont nécessaires pour colorer C_n lorsque n est pair. Pour construire une telle coloration, choisissez simplement un sommet et colorez-le en rouge. Parcourez le graphique dans le sens horaire (en utilisant une représentation plane du graphique) colorant le deuxième sommet bleu, le troisième sommet rouge, et bientôt. Le n ème sommet peut être coloré en bleu, car les deux sommets qui lui sont adjacents, à savoir la (n - 1) m et les premiers sommets sont tous deux colorés en rouge.

Lorsque n est impair et $n > 1$, le nombre chromatique de C_n est 3. Pour le voir, choisissez une initiale sommet. Pour n'utiliser que deux couleurs, il est nécessaire d'alterner les couleurs lorsque le graphique est parcouru dans le sens horaire. Cependant, le n ème sommet atteint est adjacent à deux sommets de couleurs, à savoir la première et (n - 1) m. Par conséquent, une troisième couleur doit être utilisée.

Nous avons montré que $\chi(C_n) = 2$ si n est un entier pair positif avec $n \geq 4$ et $\chi(C_n) = 3$ si n est un entier positif impair avec $n \geq 3$. ▲

Les meilleurs algorithmes connus pour trouver le nombre chromatique d'un graphe ont une exponentielle pire complexité temporelle (dans le nombre de sommets du graphique). Même le problème de trouver une approximation du nombre chromatique d'un graphe est difficile. Il a été démontré que étaient un algorithme avec la complexité du temps du pire cas polynomial qui pourrait se rapprocher de la nombre chromatique d'un graphique jusqu'à un facteur 2 (c'est-à-dire, construire une borne qui n'était plus que le double du nombre chromatique du graphe), puis un algorithme avec le pire des cas polynomiaux la complexité temporelle pour trouver le nombre chromatique du graphe existerait également.

Applications des colorations graphiques

La coloration des graphes a une variété d'applications aux problèmes impliquant la planification et les affectations. (Notez que, comme aucun algorithme efficace n'est connu pour la coloration des graphiques, cela ne conduit pas à algorithmes efficaces pour la planification et les affectations.) Des exemples de ces applications seront donné ici. La première application concerne la planification des examens finaux.

EXEMPLE 5 **Planification des examens finaux** Comment peut-on planifier les examens finaux dans une université l'élève a deux examens en même temps?

Solution: ce problème de planification peut être résolu à l'aide d'un modèle de graphe, avec des sommets représentant cours et avec un bord entre deux sommets s'il y a un étudiant commun dans les cours qu'ils représenter. Chaque créneau horaire pour un examen final est représenté par une couleur différente. Une planification de les examens correspondent à une coloration du graphe associé.

Par exemple, supposons qu'il y ait sept finales à programmer. Supposons que les cours soient bered 1 à 7. Supposons que les paires de cours suivantes ont des étudiants communs: 1 et 2, 1 et 3, 1 et 4, 1 et 7, 2 et 3, 2 et 4, 2 et 5, 2 et 7, 3 et 4, 3 et 6, 3 et 7, 4 et 5, 4 et 6, 5 et 6, 5 et 7, et 6 et 7. Dans la figure 8, le graphique associé à cet ensemble de classes est montré. Une planification consiste en une coloration de ce graphique.

Parce que le nombre chromatique de ce graphique est 4 (le lecteur doit le vérifier), quatre fois des emplacements sont nécessaires. Une coloration du graphique en utilisant quatre couleurs et le calendrier associé sont affichés dans la figure 9. ▲

1
sept 2
6 3
5 4

FIGURE 8 **Le graphique Représentant la planification des examens finaux.**

1 rouge
Marron 7 2 bleu
Rouge 6 3 Vert
5 Vert 4 Marron

Période de temps	Cours
je	1, 6
II	2
III	3, 5
IV	4, 7

FIGURE 9 **Utilisation d'un coloriage pour planifier les examens finaux.**

Considérons maintenant une application à l'attribution des chaînes de télévision.

EXEMPLE 6 **Attribution des fréquences Les** canaux de télévision 2 à 13 sont attribués aux stations du Nord L'Amérique afin qu'aucune station à moins de 150 miles ne puisse fonctionner sur le même canal.Comment le affectation des canaux modélisée par coloration des graphes?

Solution: créez un graphique en attribuant un sommet à chaque station.Deux sommets sont reliés par un bord s'ils sont situés à moins de 150 miles les uns des autres.Une affectation de canaux correspond à une coloration du graphique, où chaque couleur représente un canal différent. ▲

Une application de la coloration des graphes aux compilateurs est considérée dans l'exemple 7.

EXEMPLE 7 **Registres d'index** Dans les compilateurs efficaces, l'exécution des boucles est accélérée lorsque fréquemment les variables utilisées sont stockées temporairement dans les registres d'index de l'unité centrale, à la place de dans la mémoire régulière.Pour une boucle donnée, combien de registres d'index sont nécessaires? Ce problème peut être traité à l'aide d'un modèle de coloration de graphique.Pour configurer le modèle, laissez chaque sommet d'un graphique représentent une variable dans la boucle.Il y a un bord entre deux sommets si les variables qu'ils represent doit être stocké dans les registres d'index en même temps pendant l'exécution de la boucle. Ainsi, le nombre chromatique du graphique donne le nombre de registres d'index nécessaires, car différents registres doivent être affectés aux variables lorsque les sommets représentant ces variables sont adjacentes dans le graphique. ▲

Des exercices

Dans les exercices 1 à 4, construisez le double graphique de la carte illustrée. Ensuite, trouvez le nombre de couleurs nécessaires pour colorer la carte afin qu'aucune région adjacente n'a la même couleur.

1.

B
UNE *C*
ré *E*

2.

UNE *BCD*

3.

UNE
F *B* *E*
C *ré*

4.

B *ré*
UNE *F*
C *E*

Dans les exercices 5 à 11, trouvez le numéro chromatique du graphique.

5. *a* *b*
c *ré*

6. *b* *c*
une *g* *ré*
F *e*

sept. *une*
b *ré*
c

8.
une *b*
e
F
c *ré*

9. *une* *b*
e *c*
ré

dix. *une*
je *b*
h *c*
g *ré*
F *e*

11. *e* *h* *je* *n* *o*
une *j* *m*
ré *F* *g*
b *c* *k* *l*

12. Pour les graphiques des exercices 5 à 11, décidez s'il est possible de diminuer le nombre chromatique en supprimant un seul sommet et tous les bords qui lui sont associés.

13. Quels graphiques ont un nombre chromatique de 1?

14. Quel est le moins de couleurs nécessaires pour colorer une carte des États-Unis? Ne pas considérer les états adjacents qui se rencontrent seulement dans un coin. Supposons que le Michigan soit une région. Considérez les sommets représentant l'Alaska et Hawaï comme sommets isolés.

15. Quel est le nombre chromatique de W_n ?

16. Montrez qu'un graphique simple qui a un circuit avec un impair nombre de sommets ne peut pas être coloré en utilisant deux ors.

17. Planifiez les examens finaux pour Math 115, Math 116, Math 185, Math 195, CS 101, CS 102, CS 273 et CS 473, en utilisant le moins de créneaux horaires différents, s'il n'y a pas d'élèves prenant à la fois Math 115 et CS 473, Math 116 et CS 473, Math 195 et CS 101, Math 195 et CS 102, Math 115 et Math 116, à la fois Math 115 et Math 185, et Math 185 et Math 195, mais il y a des étudiants dans chaque autre paire de cours.

18. Combien de canaux différents sont nécessaires pour six stations situés aux distances indiquées dans le tableau, si deux stations ne peuvent pas utiliser le même canal lorsqu'elles se trouvent 150 miles les uns des autres?

	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
1	-	85	175	200	50	100
2	85	-	125	175	100	160
3	175	125	-	100	200	250
4	200	175	100	-	210	220
5	50	100	200	210	-	100
6	100	160	250	220	100	-

19. Le département de mathématiques compte six comités, chacun se réunissant une fois par mois. Combien d'heures de réunion différentes doit être utilisé pour garantir qu'aucun membre ne doit assister à deux réunions en même temps si les commissions sont C_1 = {Arlinghaus, Brand, Zaslavsky}, C_2 = {Brand, Lee, Rosen}, C_3 = {Arlinghaus, Rosen, Zaslavsky}, C_4 = {Lee, Rosen, Zaslavsky}, C_5 = {Arlinghaus, Marque} et C_6 = {Marque, Rosen, Zaslavsky}?

20. Un zoo veut créer des habitats naturels pour exposer ses animaux. Malheureusement, certains animaux en mangeront les autres lorsque l'occasion se présente. Comment un graphique modèle et une coloration être utilisé pour déterminer le nombre de différents habitats nécessaires et le placement des animaux dans ces habitats?

Une **coloration** des **bords** d'un graphique est une affectation de couleurs à arêtes de sorte que les arêtes incidentes avec un sommet commun soient signé différentes couleurs. Le **nombre chromatique de bord** d'un graphique est le plus petit nombre de couleurs pouvant être utilisées coloration des bords du graphique. Le nombre chromatique de bord d'un le graphe G est noté $\chi(G)$.

21. Trouvez le nombre chromatique de bord de chacun des graphiques dans Exercices 5–11.

22. Supposons que n appareils se trouvent sur une carte de circuit imprimé et que ces appareils sont connectés par des fils colorés. Express le nombre de couleurs nécessaires pour les fils, en termes de numéro chromatique du bord du graphique représentant ce carte de circuit imprimé, sous l'exigence que les fils quittant un appareil particulier doit être de couleurs différentes. Expliquez votre répondre.

23. Trouver les nombres chromatiques de bord de

a) C_n , où $n \geq 3$.
b) W_n , où $n \geq 3$.

24. Montrer que le nombre chromatique de bord d'un graphe doit être au moins aussi grand que le degré maximal d'un sommet de la graphique.

25. Montrer que si G est un graphe à n sommets, alors plus que $n / 2$ bords peuvent être colorés de la même manière dans une couleur de bord-ing de G .

∗ **26.** Trouver le nombre chromatique de bord de K_n lorsque n est un entier positif.

27. Sept variables se produisent dans une boucle d'un programme informatique. Les variables et les étapes au cours desquelles elles doivent être stockés sont t : étapes 1 à 6; u : étape 2; v : étapes 2 à 4; w : étapes 1, 3 et 5; x : étapes 1 et 6; y : étapes 3 à 6; et z : étapes 4 et 5. Combien de registres d'index différents sont nécessaires pour stocker ces variables pendant l'exécution?

28. Que dire du nombre chromatique d'un graphe qui a K_n comme sous-graphe?

Cet algorithme peut être utilisé pour colorer un graphique simple: d'abord, lister les sommets $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ par ordre décroissant de degré de sorte que $\deg(v_1) \geq \deg(v_2) \geq \cdots \geq \deg(v_n)$. Attribuer la couleur 1 à v_1 et au sommet suivant de la liste non adjacent à v_1 (si un existe) et successivement à chaque sommet de la liste non adjacent à un sommet déjà affecté à la couleur 1. Attribuez ensuite la couleur 2 à le premier sommet de la liste n'est pas déjà coloré. Successivement attribuer la couleur 2 aux sommets de la liste qui n'ont pas déjà été colorées et ne sont pas adjacentes aux sommets affectés à la couleur 2. Si les sommets non colorés restent, attribuez la couleur 3 au premier sommet la liste pas encore colorée, et utilisez la couleur 3 pour colorer successivement ces sommets qui ne sont pas déjà colorés et qui ne sont pas adjacents aux sommets

29. Construisez une coloration du graphique montré en utilisant cette algo-rithm.

une *b* *c*
ré *e* *F*
g *h* *je* *j*

∗ **30.** Utilisez un pseudocode pour décrire cet algorithme de coloration.

∗ **31.** Montrer que la coloration produite par cet algorithme peut utilisez plus de couleurs que nécessaire pour colorer un graphique.

Un graphe connecté G est appelé **chromatiquement *k*- critique** si le le nombre chromatique de G est k , mais pour chaque bord de G , le numéro chromatique du graphe obtenu en supprimant cette arête de G est k - 1.

32. Montrer que C_n est chromatiquement 3 critique chaque fois que n est un entier positif impair, $n \geq 3$.

33. Montrer que W_n est chromatiquement 4-critique chaque fois que n est un entier impair, $n \geq 3$.

34. Montrer que W_4 n'est pas chromatiquement 3 critique.

35. Montrer que si G est un graphe chromatiquement k- critique, alors le degré de chaque sommet de G est au moins k - 1.

Une **coloration *k*- tuple** d'un graphe G est une affectation d'un ensemble de k couleurs différentes à chacun des sommets de G *de* telle sorte qu'aucun deux sommets adjacents se voient attribuer une couleur commune. Nous dé-noter par $\chi_k(G)$ le plus petit entier positif n tel que G ait une coloration k- tuple utilisant n couleurs. Par exemple, $\chi_2(C_4) = 4$. Pour voir cela, notez qu'en utilisant seulement quatre couleurs, nous pouvons attribuer deux couleurs à chaque sommet de C_4 , comme illustré, de sorte qu'aucun les sommets adjacents ont la même couleur. De plus, aucun moins de quatre couleurs suffisent car les sommets v_1 et v_2 il faut attribuer à chacune deux couleurs, et une couleur commune ne peut pas être affecté à la fois à v_1 et à v_2 . (Pour plus d'informations sur k -tuple coloration, voir [MiRo91].)

{rouge, bleu} v_1 v_2 {vert, jaune}

{vert, jaune} v_4 v_3 {rouge, bleu}

36. Trouvez ces valeurs:

a) $\chi_2(K_3)$ **b)** $\chi_2(K_4)$ **c)** $\chi_2(W_4)$
d) $\chi_2(C_5)$ **e)** $\chi_2(K_{3,4})$ **f)** $\chi_3(K_5)$

couleur assignée 3. Continuez ce processus jusqu'à ce que tous les sommets soient coloré.

* **g)** $\chi_3(C_5)$ **h)** $\chi_3(K_{4,5})$

* **37.** Soit G et H les graphiques affichés dans la figure 3. Trouver

a) $\chi_2(G)$. **b)** $\chi_2(H)$.
c) $\chi_3(G)$. **d)** $\chi_3(H)$.

38. Qu'est-ce que $\chi_k(G)$ si G est un graphe biparti et k est un positif entier?

39. Les fréquences des téléphones radio mobiles (ou cellulaires) sont assigné par zones. Chaque zone se voit attribuer un ensemble de fréquences à utiliser par les véhicules de cette zone. Le même la fréquence ne peut pas être utilisée dans différentes zones des interférences peuvent se produire entre les téléphones de ces zones. Ex- comment un coloriage k- tuple peut être utilisé pour assigner k fre- à chaque zone radio mobile d'une région.

* **40.** Montrer que chaque graphe planaire G peut être coloré en utilisant six ou moins de couleurs. [*Astuce:* utilisez l'induction mathématique sur le nombre de sommets du graphique. Appliquer le corollaire 2 de Section 10.7 pour trouver un sommet v avec deg $(v) \leq 5$. Considérez le sous-graphe de G obtenu en supprimant v et toutes les arêtes incident avec elle.]

** **41.** Montrez que chaque graphique plan G peut être coloré en utilisant cinq ou moins de couleurs. [*Conseil:* utilisez le conseil fourni pour Exercise 40.]

Le célèbre problème de la galerie d'art demande combien de gardes sont nécessaire pour voir toutes les parties d'une galerie d'art, où la galerie est le intérieur et limite d'un polygone à n côtés. Pour énoncer cela problème plus précisément, nous avons besoin d'une terminologie. Un point x à l'intérieur ou à la limite d'un simple polygone P **couvre** ou **voit** un point y *à l'* intérieur ou sur P si tous les points du segment de ligne xy sont à l'intérieur ou sur la limite de P . Nous disons qu'un ensemble de points est un **ensemble** de **garde** d'un polygone simple P si pour chaque Point Y à l' intérieur de P ou sur la limite de P il existe un point x dans cet ensemble de garde qui voit y . Notons $G(P)$ le minimum nombre de points nécessaires pour garder le polygone simple P . le **problème de galerie d'art** demande la fonction $g(n)$, qui est la valeur maximale de $G(P)$ sur tous les polygones simples avec n vertices. Autrement dit, $g(n)$ est l'entier positif minimum pour lequel il est garanti qu'un simple polygone avec n sommets peut être gardé avec $g(n)$ ou moins de gardes.

42. Montrez que $g(3) = 1$ et $g(4) = 1$ en montrant que tous les les angles et les quadrilatères peuvent être protégés à l'aide d'un point.

* **43.** Montrer que $g(5) = 1$. Autrement dit, montrer que tous les pentagones peuvent être gardé en utilisant un point. [*Astuce:* Montrez qu'il y a either 0, 1 ou 2 sommets avec un angle intérieur supérieur à 180 degrés et que dans chaque cas, un garde suffit.]

* **44.** Montrez que $g(6) = 2$ en utilisant d'abord les exercices 42 et 43 comme ainsi que le lemme 1 dans la section 5.2 pour montrer que $g(6) \leq 2$ puis trouver un hexagone simple pour lequel deux gardes sont nécessaire.

* **45.** Montrez que $g(n) \geq \lfloor n/3 \rfloor$. [*Astuce:* Considérez le polygone avec $3k$ sommets qui ressemble à un peigne à k dents, comme le polygone à 15 côtés illustré ici.]

* **46.** Résoudre le problème de la **galerie d'art** en prouvant la **galerie d'art théorème** , qui stipule qu'au plus $\lfloor n/3 \rfloor$ gardes sont nécessaire pour garder l'intérieur et les limites d'un simple polygone avec n sommets. [*Astuce:* utilisez le théorème 1 dans la section 5.2 pour trianguler le polygone simple en $n - 2$ triangles. Montrez ensuite qu'il est possible de colorer les sommets des polygone triangulé utilisant trois couleurs de sorte que pas deux les sommets adjacents ont la même couleur. Utilisez l'induction et Exercice 23 à la section 5.2. Enfin, mettez des gardes à tout les couleurs rouges, où le rouge est la couleur la moins utilisée dans la coloration des sommets. Montrez que placer des gardes à ces points est tout ce qui est nécessaire.]

Termes et résultats clés

TERMES

arête non dirigée: arête associée à un ensemble $\{u, v\}$, où u et v sont des sommets

arête dirigée: arête associée à une paire ordonnée (u, v) , où u et v sont des sommets

arêtes multiples: arêtes distinctes reliant les mêmes sommets

arêtes dirigées multiples: arêtes dirigées distinctes associées

pseudographe: un graphique non orienté qui peut contenir plusieurs bords et boucles

graphe orienté: un ensemble de sommets avec un ensemble de sommets dirigés bords dont chacun est associé à une paire ordonnée de sommets

Multigraph dirigé: un graphique avec des bords dirigés qui peuvent contenir plusieurs bords dirigés

avec la même paire ordonnée *(u, v),* où u et v sont des sommets
boucle: une arête reliant un sommet à lui-même
graphe non orienté: un ensemble de sommets et un ensemble de sommets non orientés bords dont chacun est associé à un ensemble d'un ou deux de ces sommets
graphique simple: un graphique non orienté sans arêtes multiples ou boucles
multigraph: un graphique non orienté qui peut contenir plusieurs bords mais pas de boucles
graphe orienté simple: un graphe orienté sans boucles ni mul- arêtes dirigées multiples
adjacent: deux sommets sont adjacents s'il y a une arête entre leur
incident: une arête est incidente avec un sommet si le sommet est un point final de ce bord
deg v (degré du sommet v dans un graphe non orienté): le nombre d'arêtes incidentes avec v avec boucles comptées deux fois

Épisode 358

$\deg^-(v)$ (le degré du sommet v dans un graphe avec di- arêtes rectifiées): le nombre d'arêtes avec v comme terminal sommet
$\deg^+(v)$ (le degré extérieur du sommet v dans un graphe avec di- arêtes rectifiées): le nombre d'arêtes avec v comme valeur initiale sommet
sous-jacent graphique non orienté d'un graphique avec dirigé bords: le graphe non orienté obtenu en ignorant la di- rections des bords
K_n (graphe complet sur n sommets): le graphe non orienté avec n sommets où chaque paire de sommets est reliée par un bord
graphe bipartite: graphe avec ensemble de sommets qui peut être partitionné en sous-ensembles V_1 et V_2 de sorte que chaque bord relie un sommet en V_1 et un sommet en V_2. La paire (V_1, V_2) est appelée **bi- partition** de V.
$K_{m,n}$ (graphe biparti complet): le graphe avec ensemble de sommets divisé en un sous - ensemble de M éléments et un sous - ensemble de n el- éléments avec deux sommets reliés par une arête si et seulement si l'un est dans le premier sous-ensemble et l'autre dans le second sous-ensemble
C_n (cycle de taille n), $n \geq 3$: le graphe à n sommets $v_1, v_2, ..., v_n$ et arêtes $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, ..., \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}$
W_n (roue de taille n), $n \geq 3$: le graphe obtenu à partir de C_n par ajouter un sommet et des bords de ce sommet à l'original sommets en C_n
Q_n (n-cube), $n \geq 1$: le graphe qui a le 2^n chaînes de bits de longueur n comme ses sommets et bords reliant chaque paire de chaînes de bits qui diffèrent exactement d'un bit
correspondance dans un graphe G : un ensemble d'arêtes tel qu'il n'y ait pas deux arêtes avoir un point final commun
correspondance complète M de V_1 à V_2 : une correspondance telle que chaque sommet dans V_1 est un point d'extrémité d'une arête dans M
correspondance maximale: une correspondance contenant le plus d'arêtes parmi toutes les correspondances dans un graphique
sommet isolé: un sommet de degré zéro
sommet pendant: un sommet de degré un
graphe régulier: un graphe où tous les sommets ont le même degré

sous-graphe d'un graphe $G = (V, E)$: un graphe (W, F), où W

chemin de u à v dans un graphe à arêtes dirigées: une séquence des arêtes $e_1, e_2, ..., e_n$, où e_i est associé à (x_i, x_{i+1}) pour $i = 0, 1, ..., n$, où $x_0 = u$ et $x_{n+1} = v$
chemin simple: un chemin qui ne contient pas une arête de plus de une fois que
circuit: un chemin de longueur $n \geq 1$ qui commence et se termine en même temps sommet
graphe connecté: un graphe non orienté avec la propriété il y a un chemin entre chaque paire de sommets
sommet coupé de G : un sommet v tel que $G - v$ est déconnecté
bord coupé de G : un bord e tel que $G - e$ est déconnecté
graphe non séparable: graphe sans sommet coupé
coupe du sommet de G : un sous-ensemble V de l'ensemble des sommets de G tel que $G - V$ est déconnecté
$\kappa(G)$ (la connectivité au sommet de G): la taille d'un plus petit coupe du sommet de G
k-connect graph : un graphe qui a une connectivité de sommet non plus petit que k
coupe des bords de G : un ensemble de bords E de G tels que $G - E$ est débranché
$\lambda(G)$ (la connectivité des bords de G): la taille d'un plus petit bord coupe de G
composante connexe d'un graphe G : un maximum connecté sous-graphe de G
graphe orienté fortement connecté: un graphe orienté avec le propriété qu'il existe un chemin dirigé de chaque sommet vers chaque sommet
composante fortement connectée d'un graphe orienté G : a sous-graphe maximal fortement connecté de G
Chemin d'Euler: un chemin qui contient exactement chaque bord d'un graphique une fois que
Circuit d'Euler: un circuit qui contient chaque bord d'un graphe exactement une fois
Hamilton path: un chemin dans un graphique qui passe par chacun sommet exactement une fois
Circuit de Hamilton: un circuit dans un graphique qui passe à travers chaque sommet exactement une fois
graphique pondéré: un graphique avec des numéros attribués à ses bords
problème du chemin le plus court: le problème de la détermination du chemin dans un graphique pondéré tel que la somme des poids de les bords de ce chemin est un minimum sur tous les chemins entre

est un sous-ensemble de V et F est un sous-ensemble de E

$G_1 \cup G_2$ (union de G_1 et G_2): le graphe $(V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$, où $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$

matrice d'adjacence: une matrice représentant un graphe utilisant la contiguïté des sommets

matrice d'incidence: une matrice représentant un graphique utilisant cidence des arêtes et des sommets

graphes simples isomorphes: les graphes simples $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ sont isomorphes s'il existe un correspondance un à un f de V_1 à V_2 telle que $\{ f(v_1), f(v_2) \} \in E_2$ si et seulement si $\{ v_1, v_2 \} \in E_1$ pour tous v_1 et v_2 dans V_1

invariant pour l'isomorphisme du graphe: une propriété isomorphe les graphiques ont tous les deux ou n'ont pas les deux

chemin de u à v dans un graphe non orienté: une séquence de arêtes $e_1, e_2, ..., e_n$, où e_i est associé à $\{ x_i, x_{i+1} \}$ pour $i = 0, 1, ..., n$, où $x_0 = u$ et $x_{n+1} = v$

sommets spécifiés

problème du vendeur ambulant: le problème qui demande le circuit de la longueur totale la plus courte qui visite chaque sommet d'un graphique pondéré exactement une fois

graphe planaire: un graphe qui peut être dessiné dans le plan sans traversées

régions d'une représentation d'un graphe planaire: les régions le plan est divisé en par la représentation plane du graphique

subdivision élémentaire: suppression d'une arête $\{ u, v \}$ d'un graphe non orienté et l'ajout d'un nouveau sommet w ensemble avec les arêtes $\{ u, w \}$ et $\{ w, v \}$

homéomorphe: deux graphes non orientés sont homéomorphes si ils peuvent être obtenus à partir du même graphique par une séquence de subdivisions élémentaires

coloration du graphe: affectation de couleurs aux sommets d'un graphique de sorte qu'il n'y ait pas deux sommets adjacents de la même couleur

nombre chromatique: le nombre minimum de couleurs nécessaires dans une coloration d'un graphique

RÉSULTATS

Le théorème de prise de contact: si $G = (V, E)$ est un non orienté graphique avec m arêtes, puis $2m = \sum_{v \in V} \deg(v)$.

Théorème du mariage de Hall: le graphe bipartite $G = (V, E)$ avec bipartition (V_1, V_2) a une correspondance complète de V_1 à V_2 si et seulement si $|N(A)| \geq |A|$ pour tous les sous-ensembles A de V_1.

Il y a un circuit d'Euler dans un multigraphe connecté si et seulement si chaque sommet a un degré pair.

Il y a un chemin d'Euler dans un multigraphe connecté si et seulement si au plus deux sommets ont un degré impair.

L'algorithme de Dijkstra: une procédure pour trouver le chemin le plus court entre deux sommets dans un graphe pondéré (voir Section 10.6).

Formule d'Euler: $r = e - v + 2$ où r, e et v sont les nombres nombre de régions d'une représentation plane, le nombre de arêtes, et le nombre de sommets, respectivement, d'une con-graphe planaire connecté.

Théorème de Kuratowski: Un graphe est non planaire si et seulement s'il contient un sous-graphe homéomorphe à $K_{3,3}$ ou K_5. (Preuve au-delà de la portée de ce livre.)

Le théorème des quatre couleurs: chaque graphe planaire peut être coloré en utilisant pas plus de quatre couleurs. (Preuve bien au-delà de la portée de ce livre!)

Questions de révision

1. a) Définir un graphe simple, une multigraphe, un pseudographe, un graphique dirigé et une multigraphe dirigée.

b) Utilisez un exemple pour montrer comment chacun des types de graphique en partie (a) peut être utilisé dans la modélisation. Par exemple, expliquer comment modéliser différents aspects d'un ordinateur réseau ou lignes aériennes.

2. Donnez au moins quatre exemples d'utilisation des graphiques dans la modélisation.

3. Quelle est la relation entre la somme des degrés des sommets dans un graphique non orienté et le nombre de bords dans ce graphique? Expliquez pourquoi cette relation est valable.

4. Pourquoi doit-il y avoir un nombre pair de sommets impairs degré dans un graphique non orienté?

5. Quelle est la relation entre la somme des degrés

b) Qu'entend-on par invariant par rapport à l'isomorphisme phisme pour les graphiques simples? Donnez au moins cinq exemples de ces invariants.

c) Donnez un exemple de deux graphiques qui ont le même nombre de sommets, arêtes et degrés de sommets, mais qui ne sont pas isomorphes.

d) est un ensemble d'invariants connus qui peuvent être utilisés pour déterminer si deux graphiques simples sont iso-morphique?

11. a) Qu'est-ce que cela signifie pour un graphique d'être connecté?

b) Quels sont les composants connectés d'un graphe?

12. a) Expliquez comment une matrice d'adjacence peut être utilisée renvoyer un graphique.

b) Comment les matrices d'adjacence peuvent-elles être utilisées pour déterminer et la somme des degrés extérieurs des sommets dans une direction graphique? Expliquez pourquoi cette relation est valable.

6. Décrivez les familles de graphiques suivantes.

a) K_n, le graphe complet sur n sommets

b) $K_{m,n}$, le graphe bipartite complet sur m et n sommets

c) C_n, le cycle à n sommets

d) W_n, la roue de taille n

e) Q_n, le n- cube

7. Combien de sommets et combien d'arêtes y a-t-il dans chaque des graphiques dans les familles de la question 6?

8. a) Qu'est-ce qu'un graphe bipartite?

b) Parmi les graphes K_n, C_n et W_n, lesquels sont bipartis?

c) Comment pouvez-vous déterminer si un graphique non orienté est bipartite?

9. a) Décrivez trois méthodes différentes qui peuvent être utilisées pour représenter un graphique.

b) Tracez un graphique simple avec au moins cinq sommets et huit bords. Illustrer comment il peut être représenté à l'aide les méthodes que vous avez décrites dans la partie (a).

10. a) Que signifie que deux graphiques simples soient isomorphique?

si une fonction de l'ensemble de sommets d'un graphe G à l'ensemble de sommets d'un graphe H est un isomorphisme?

c) Comment utiliser la matrice d'adjacence d'un graphe pour déterminer le nombre de chemins de longueur r, où r est un entier positif, entre deux sommets d'un graphe?

13. a) Définissez un circuit d'Euler et un chemin d'Euler dans un graphique rectifié.

b) Décrivez le fameux problème du pont de Königsberg et expliquer comment le reformuler en termes de circuit d'Euler.

c) Comment peut-on déterminer si un graphique non orienté a un chemin Euler?

d) Comment peut-on déterminer si un graphique non orienté a un circuit Euler?

14. a) Définissez un circuit de Hamilton dans un graphique simple.

b) Donner quelques propriétés d'un graphique simple qui impliquent que il n'a pas de circuit à Hamilton.

15. Donnez des exemples d'au moins deux problèmes qui peuvent être résolus en trouvant le chemin le plus court dans un graphique pondéré.

16. a) Décrire l'algorithme de Dijkstra pour trouver le plus court chemin dans un graphique pondéré entre deux sommets.

b) Tracez un graphique pondéré avec au moins 10 sommets et 20 bords. Utilisez l'algorithme de Dijkstra pour trouver le plus court chemin entre deux sommets de votre choix dans le graphique.

17. a) Qu'est-ce que cela signifie pour un graphique d'être plan?

b) Donnez un exemple de graphe non planaire.

18. a) Quelle est la formule d'Euler pour les graphes planaires connectés?

b) Comment la formule d'Euler pour les graphes planaires peut-elle être utilisée pour montrer qu'un simple graphe est non planaire?

19. Théorème de Kuratowski sur la planarité des graphes et expliquer comment il caractérise quels graphiques sont plans.

20. a) Définissez le nombre chromatique d'un graphique.

b) Quel est le nombre chromatique du graphe K_n lorsque n est un entier positif?

c) Quel est le nombre chromatique du graphe C_n lorsque n est un entier supérieur à 2?

d) Quel est le nombre chromatique du graphe $K_{m,n}$ lorsque m et n sont des entiers positifs?

21. Énoncez le théorème des quatre couleurs. Y a-t-il des graphiques qui ne peuvent pas être coloré avec quatre couleurs?

22. Expliquez comment la coloration graphique peut être utilisée dans la modélisation. Utilisation au moins deux exemples différents.

Exercices supplémentaires

1. Combien d'arêtes un graphe 50-régulier avec 100 vertices ont?

2. Combien de sous-graphes non isomorphes possède K_3 ?

Dans les exercices 3 à 5, déterminez si deux graphiques donnés sont isomorphique.

3. u_1 u_2 u_3 u_4

∗ 5. v_1 v_2

v_5 v_6

v_8 v_7

v_4 v_3

u_5 u_6 u_7 u_8

v_1 v_2

v_6 v_7
v_5 v_8

v_4 v_3

4. u_1

u_8 u_2

u_7 u_3

u_6 u_4

u_5

v_1

v_8 v_2

v_7 v_3

v_6 v_4

v_5

u_1

u_8 u_2

u_7 u_3

u_6 u_4

u_5

Le **complet *m* graphe -partite** $K_{n_1, n_2, ..., n_m}$ a par- sommets positionnés en m sous-ensembles de n_1, n_2, ..., n_m éléments chacun, et les sommets sont adjacents si et seulement s'ils sont dans des sous-ensembles différents dans la partition.

6. Dessinez ces graphiques.

a) $K_{1, 2, 3}$ **b)** $K_{2, 2, 2}$ **c)** $K_{1, 2, 2, 3}$

∗ **7.** Combien de sommets et combien d'arêtes la com-

plet m -partite graphique $K_{n_1, n_2, ..., n_m}$ ont?

8. Prouver ou infirmer qu'il y a toujours deux sommets de le même degré dans une multigraphe finie ayant au moins deux sommets.

9. Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté et soit $A \subseteq V$ et $B \subseteq V$. Montre CA

a) $N(A \cup B) = N(A) \cup N(B)$.

b) $N(A \cap B) \subseteq N(A) \cap N(B)$, et donnez un exemple où $N(A \cap B) = N(A) \cap N(B)$.

10. Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. Montre CA

a) $|N(v)| \leq \deg(v)$ pour tout $v \in V$.

b) $|N(v)| = \deg v$ pour tout $v \in V$ si et seulement si G est un simple graphique.

Supposons que S_1, S_2, ..., S_n est un ensemble de sous-ensembles de un ensemble S où n est un entier positif. Un **système de dis- représentants tincts (SDR)** pour cette famille est un ordre n -tuple $(a_1, a_2, ..., a_n)$ avec la propriété que $a_i \in S_i$ pour $i = 1, 2, ..., n$ et $a_i = a_j$ pour tout $i = j$.

11. Trouver un SDR pour les ensembles $S_1 = \{a, c, m, e\}$, $S_2 = \{m, a, c, e\}$, $S_3 = \{a, p, e, x\}$, $S_4 = \{x, e, n, a\}$, $S_5 = \{n, a, m, e\}$ et $S_6 = \{e, x, a, m\}$.

12. Utilisez le théorème du mariage de Hall pour montrer qu'une collection de sous-ensembles finis S_1, S_2, ..., S_n d'un ensemble S a un SDR $(a_1, a_2, ..., a_n)$ si et seulement si $|\bigcup_{i \in I} S_i| \geq |Je|$ pour tous les sous-fixe I de $\{1, 2, ..., n\}$.

Une **clique** dans un graphique simple non orienté est un sous-graphique complet qui n'est contenue dans aucun sous-graphe complet plus grand. Dans Ex- les exercices 19 à 21 trouvent toutes les cliques dans le graphique ci-dessous.

19. a b c

g

ré e F

20. *une* F

b e g

c h

13. a) Utilisez l'exercice 12 pour montrer que la collection d'ensembles $S_1 = \{ a, b, c \}$, $S_2 = \{ b, c, d \}$, $S_3 = \{ a, b, d \}$, $S_4 = \{ b, c, d \}$ a un SDR sans en trouver explicitement un.

b) Trouvez un DTS pour la famille de quatre ensembles dans la partie (a).

14. Utilisez l'exercice 12 pour montrer que la collection d'ensembles $S_1 = \{ a, b, c \}$, $S_2 = \{ a, c \}$, $S_3 = \{ c, d, e \}$, $S_4 = \{ b, c \}$, $S_5 = \{ d, e, f \}$, $S_6 = \{ a, c, e \}$, et $S_7 = \{ a, b \}$ n'a pas un DTS.

Le **coefficient de regroupement** *C (G)* d'un graphe simple *G* est le probabilité que si *u* et *v* sont voisins et que *v* et *w* soient voisins bors, alors *u* et *w* sont voisins, où *u* , *v* et *w* sont distincts sommets du *G* .

15. On dit que trois sommets *u* , *v* et *w* d'un graphe simple *G* forme un triangle s'il y a des bords reliant les trois paires de ces sommets. Trouver une formule pour *C (G)* en termes du nombre de triangles en *G* et du nombre de chemins de longueur deux dans le graphique. [*Astuce:* comptez chaque triangle dans le graphique une fois pour chaque ordre de trois sommets le former.]

16. Trouvez le coefficient de regroupement de chacun des graphiques dans Exercice 20 de la section 10.2

17. Expliquez ce que le coefficient de regroupement mesure dans chaque de ces graphiques.

a) le graphe hollywoodien

b) le graphique des amis Facebook

c) le graphique de collaboration académique pour les chercheurs la théorie des graphes

d) le graphique d'interaction des protéines pour une cellule humaine

e) le graphique représentant les routeurs et les communications liens qui constituent l'Internet mondial

18. Pour chacun des graphiques de l'exercice 17, expliquez si vous vous attendez à ce que son coefficient de clustering soit plus proche de 0 . 01 ou à 0 . 10 et pourquoi vous vous y attendez.

ré *je*

21. *b*

une *c*

k *ré*

j *je* *e*

h *g* *F*

Un **ensemble dominant** de sommets dans un graphique simple est un ensemble de sommets tels que tous les autres sommets soient adjacents à au moins un sommet de cet ensemble. Un ensemble dominant avec le moins de sommets est appelé un **ensemble dominant minimum** . Dans les exercices 22–24 trouvent un ensemble dominant minimum pour le graphique donné.

22. *une* *b*

e

c *ré*

23. *une* *e*

c *ré*

b *F*

24. *a* *b* *c* *ré*

e *F* *g* *h*

je *j* *k* *l*

Épisode 362

Un graphique simple peut être utilisé pour déterminer le nombre minimum des reines sur un échiquier qui contrôlent l'ensemble de l'échiquier. Un échiquier $n \times n$ a n^2 carrés dans une configuration $n \times n$. Une reine dans une position donnée contrôle toutes les cases de la même ligne, la même colonne, et sur les deux diagonales contenant ce carré, comme illustré. Le graphique simple approprié a n^2 sommets, un pour chaque carré, et deux sommets sont adjacents si une reine dans le carré représenté par l'un des sommets contrôle le carré représenté par l'autre sommet.

b) avec un nombre chromatique égal à quatre?

c) qui sont non plans?

Un graphe orienté est **auto-inversé** s'il est isomorphe à son converser.

33. Déterminez si les graphiques suivants sont auto-converser.

une) *une* *b*

c *e*

ré

b) *une* *b*

Les carrés
Contrôlé
par une reine

c *e*

ré

25. Construisez le graphique simple représentant les $n \times n$ échecs carte avec des bords représentant le contrôle des carrés par reines pour

a) $n = 3$. **b)** $n = 4$.

26. Expliquer comment le concept d'un ensemble dominant minimum s'applique au problème de la détermination du nombre ber de reines contrôlant un échiquier $n \times n$.

** **27.** Trouver le nombre minimum de reines contrôlant un $n \times n$ échiquier pour

a) $n = 3$. **b)** $n = 4$. **c)** $n = 5$.

28. Supposons que G_1 et H_1 soient isomorphes et que G_2 et H_2 sont isomorphes. Prouver ou infirmer que $G_1 \cup G_2$ et $H_1 \cup H_2$ sont isomorphes.

29. Montrer que chacune de ces propriétés est un invariant qui iso- graphiques simples morphiques ont tous les deux ou les deux ne le font pas avoir.

a) connectivité

b) l'existence d'un circuit à Hamilton

c) l'existence d'un circuit d'Euler

d) ayant le numéro de passage C

e) ayant n sommets isolés

f) être bipartite

30. Comment trouver la matrice d'adjacence de G à partir de matrice d'adjacence de G , où G est un simple graphe?

31. Combien de bipartites connectés non isomorphes simples les graphiques sont là avec quatre sommets?

* **32.** Combien de graphes simples non isomorphes connectés avec cinq sommets sont là

a) sans sommet de degré supérieur à deux?

34. Montrer que si le graphe orienté G est auto-inversé et H est un graphe orienté isomorphe à G , alors H est également auto-conversation.

L' **orientation** d'un graphe simple non orienté est une affectation des directions sur ses bords de telle sorte que la di- Le graphique rectifié est fortement connecté. Lorsqu'une orientation de il existe un graphe non orienté, ce graphe est appelé **orientable** . Dans Les exercices 35 à 37 déterminent si le graphique simple donné est orientable.

35. *a* *b* *c*

e *ré*

36. *une* *F*

b *c* *ré* *e*

37. *une* *b* *e*

c

ré *F*

h *g*

38. Parce que le trafic devient de plus en plus lourd dans la partie centrale ville, les ingénieurs de la circulation prévoient de changer toutes les rues, qui sont actuellement à double sens, dans des rues à sens unique. Ex-

les listes d'ennemis sont A (D, G, P), B (K, P, T), D (A, G, L), G (A, D, T), K (B, L, P), L (D, K, T), P (A, B, K), T (B, G, L), où nous avons représenté chaque chevalier par comment modéliser ce problème.

* **39.** Montrez qu'un graphique n'est pas orientable s'il a un bord coupé.

Un **tournoi** est un simple graphique dirigé tel que si u et v sont des sommets distincts dans le graphique, exactement l'un de (u, v) et (v, u) est un bord du graphique.

40. Combien de tournois différents sont là avec n vertices?

41. Quelle est la somme des degrés en et hors d'un tex dans un tournoi?

* **42.** Montrez que chaque tournoi a un parcours à Hamilton.

43. Étant donné deux poulets dans un troupeau, l'un d'eux est dominant. Ceci définit l' **ordre** de picage du troupeau. Comment un tournoi servir à modéliser l'ordre hiérarchique?

44. Supposons qu'un graphe connexe G ait n sommets et verconnectivité tex $\kappa(G) = k$. Montrer que G doit avoir à moins $\lceil kn/2 \rceil$ bords.

Un graphe connecté $G = (V, E)$ avec n sommets et m arêtes est dit avoir **une connectivité optimale** si $\kappa(G) = \lambda(G) = \min_{v \in V} \deg v = 2m/n$.

45. Montrer qu'un graphe connecté avec une connectivité optimale doit être régulier.

46. Montrer que ces graphiques ont une connectivité optimale.

a) C_n pour $n \geq 3$
b) K_n pour $n \geq 3$
c) $K_{r,r}$ pour $r \geq 2$

* **47.** Trouvez les deux graphes simples non isomorphes avec six veret neuf bords qui ont une connectivité optimale.

48. Supposons que G est un multigraphe connecté avec $2k$ sommets de degré impair. Montrer qu'il existe k sous-graphes qui ont G comme leur union, où chacun de ces sous-graphiques a un Chemin d'Euler et où pas deux de ces sous-graphiques ont un bord en commun. [*Astuce:* Ajoutez k arêtes au graphique necter des paires de sommets de degrés impairs et utiliser un Euler circuit dans ce graphique plus grand.]

Dans les exercices 49 et 50, nous considérons un casse-tête posé par Petkovic dans [Pe09] (basé sur un problème dans [AvCh80]). Supposer que Le roi Arthur a réuni ses $2n$ chevaliers de la table ronde pour un conseil important. Tous les deux chevaliers sont amis ou ennemis, et chaque chevalier n'a pas plus de $n - 1$ ennemis parmi les $2n - 1$ autres chevaliers. Le puzzle demande si Le roi Arthur peut asseoir ses chevaliers autour de la table ronde afin que chaque chevalier a deux amis pour ses voisins.

49. a) Montrer que le casse-tête peut être réduit à déterminer s'il y a un circuit de Hamilton dans le graphique où chaque chevalier est représenté par un sommet et deux les chevaliers sont connectés dans le graphique s'ils sont amis.
b) Répondez à la question posée dans le puzzle. [*Astuce:* utiliser Théorème de Dirac.]

50. Supposons qu'il y ait huit chevaliers Alynore, Bedivere, Degore, Gareth, Kay, Lancelot, Perceval et Tristan. Leur la première lettre de son nom et montré la liste des ennemis de ce chevalier après cette première lettre. Dessinez le graphique représentant ces huit chevaliers et leurs amis et trouver une disposition des sièges où chaque chevalier est assis à côté de deux copains.

* **51.** Soit G un simple graphe à n sommets. La **bande passante** de G , notée $B(G)$, est le minimum, sur toutes les permutations. tions $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des sommets de G , de max $\{|i - j| \text{ un}_i$ et a_j sont adjacents$\}$. Autrement dit, la bande passante est le minisur toutes les listes des sommets de la différence maximale la différence dans les indices attribués aux sommets adjacents. Trouver les largeurs de bande de ces graphiques.

a) K_5	**b)** $K_{1,3}$	**c)** $K_{2,3}$
d) $K_{3,3}$	**e)** Q_3	**f)** C_5

* **52.** La **distance** entre deux sommets distincts v_1 et v_2 d'un graphique simple connecté est la longueur (nombre d'arêtes) de le chemin le plus court entre v_1 et v_2 . Le **rayon** d'un graphique est le minimum sur tous les sommets v de la distance maximale de v à un autre sommet. Le **diamètre** d'un graphique est la distance maximale entre deux sommets distincts. Trouver le rayon et le diamètre de

a) K_6 . **b)** $K_{4,5}$. **c)** Q_3 . **d)** C_6 .

* **53. a)** Montrer que si le diamètre du graphe simple G est à au moins quatre, alors le diamètre de son complément $\overline{G}$ est pas plus de deux.
b) Montrer que si le diamètre du graphe simple G est à au moins trois, alors le diamètre de son complément $\overline{G}$ est pas plus de trois.

* **54.** Supposons qu'un multigraphe possède $2m$ sommets de degrés impairs. Montrez que tout circuit qui contient chaque bord du graphique doit contenir au moins m bords plus d'une fois.

55. Trouvez le deuxième chemin le plus court entre les sommets a et z dans la figure 3 de la section 10.6.

56. Concevoir un algorithme pour trouver le deuxième chemin le plus court entre deux sommets dans un simple pondéré connecté graphique.

57. Trouvez le chemin le plus court entre les sommets a et z qui passe par le sommet f du graphe pondéré dans Ex-Exercice 3 dans la section 10.6.

58. Concevoir un algorithme pour trouver le chemin le plus court entre deux sommets dans un graphique pondéré connecté simple qui passe par un troisième sommet spécifié.

* **59.** Montrez que si G est un graphique simple avec au moins 11 sommets, alors G ou $\overline{G}$, le complément de G , est non planaire.

Un ensemble de sommets dans un graphe est appelé **indépendant** s'il n'y en a pas deux les sommets de l'ensemble sont adjacents. Le **nombre d'indépendance** des un graphique est le nombre maximal de sommets dans un indépendant ensemble de sommets pour le graphique.

* **60.** Quel est le nombre d'indépendances

a) K_n ? **b)** C_n ? **c)** Q_n ? **d)** $K_{m,n}$?

61. Montrer que le nombre de sommets dans un graphique simple est moins supérieur ou égal au produit du numéro d'indépendance et le numéro chromatique du graphique.

62. Montrer que le nombre chromatique d'un graphique est inférieur ou égal à $n - i + 1$, où n est le nombre de sommets dans le graphique et i est le numéro d'indépendance de ce graphique.

63. Supposons que pour générer un graphe simple aléatoire avec n sommets on choisit d'abord un nombre réel p avec $0 \leq p \leq 1$. Pour chacune des paires $C(n, 2)$ de sommets distincts, nous générons résumer un nombre aléatoire x compris entre 0 et 1. Si $0 \leq x \leq p$, nous connectons ces deux sommets avec une arête; autrement ces sommets ne sont pas connectés.

a) Quelle est la probabilité qu'un graphe à m arêtes où $0 \leq m \leq C(n, 2)$ est généré?

b) Quel est le nombre attendu d'arêtes dans un graphique généré avec n sommets si chaque arête est compris avec probabilité p ?

c) Montrer que si $p = 1/2$, alors chaque graphique simple avec n les sommets sont également susceptibles d'être générés.

Une propriété conservée chaque fois que des arêtes supplémentaires sont ajoutées à un graphique simple (sans ajouter de sommets) est appelé **monotone croissante** , et une propriété qui est conservée chaque fois que les bords sont supprimé d'un graphique simple (sans supprimer les sommets) est appelé **monotone décroissant** .

64. Pour chacune de ces propriétés, déterminez s'il s'agit monotone augmentant et déterminer s'il est monoton décroissant.

a) Le graphe G est connecté.

b) Le graphe G n'est pas connecté.

c) Le graphe G a un circuit d'Euler.

d) Le graphique G a un circuit de Hamilton.

e) Le graphe G est plan.

f) Le graphique G a le numéro chromatique quatre.

g) Le graphique G a un rayon de trois.

h) Le graphique G a un diamètre de trois.

65. Montrer que la propriété graphique P est monotone augmentant si et seulement si la propriété du graphe Q est monotone décroissante où Q est la propriété de ne pas avoir la propriété P .

****66.** Supposons que P est une propriété monotone croissante de simple graphiques. Montrer que la probabilité d'un graphe aléatoire avec n sommets a la propriété P est un non décroissant monotone fonction de p , la probabilité qu'un bord soit choisi pour être en le graphique.

Projets informatiques

Écrivez des programmes avec ces entrées et sorties.

1. Étant donné les paires de sommets associées aux bords d'un graphique rectifié, trouver le degré de chaque sommet.

2. Étant donné les paires ordonnées de sommets associées aux arêtes d'un graphique orienté, déterminer le degré et la sortie degré de chaque sommet.

3. Étant donné la liste des bords d'un graphique simple, déterminez si le graphique est bipartite.

4. Étant donné les paires de sommets associées aux bords d'un graphique, construire une matrice d'adjacence pour le graphique. (Produire un version qui fonctionne lorsque des boucles, des bords multiples ou dirigés des bords sont présents.)

5. Étant donné une matrice d'adjacence d'un graphique, énumérez les bords de ce graphique et donnez le nombre de fois où chaque arête apparaît.

6. Étant donné les paires de sommets associées aux bords d'un graphique rectifié et le nombre de fois où chaque arête apparaît, construire une matrice d'incidence pour le graphique.

7. Étant donné une matrice d'incidence d'un graphique non orienté, bords et donnez le nombre de fois que chaque bord apparaît.

8. Étant donné un entier positif n , générez un graphe simple avec n sommets en produisant une matrice d'adjacence pour le graphique de sorte que tous les graphiques simples avec n sommets sont également susceptibles à générer.

9. Étant donné un entier positif n , générer un simple dirigé graphe à n sommets en produisant une matrice d'adjacence pour le graphique de sorte que tous les graphiques dirigés simples avec n les sommets sont également susceptibles d'être générés.

10. Étant donné les listes d'arêtes de deux graphiques simples sans plus de six sommets, déterminez si les graphiques sont isomorphe.

11. Étant donné une matrice d'adjacence d'un graphe et une intégration positive ger n , trouver le nombre de chemins de longueur n entre deux sommets. (Produire une version qui fonctionne pour dirigé et graphiques non dirigés.)

***12.** Étant donné la liste des bords d'un graphique simple, déterminez s'il est connecté et trouver le nombre de connectés composants s'il n'est pas connecté.

13. Étant donné les paires de sommets associées aux bords d'un graphique, déterminer s'il a un circuit d'Euler et, si non, s'il a un chemin Euler. Construire un chemin d'Euler ou circuit s'il existe.

***14.** Étant donné les paires ordonnées de sommets associées aux arêtes d'un multigraphe dirigé, construire un chemin d'Euler ou Euler circuit, si un tel chemin ou circuit existe.

****15.** Étant donné la liste des bords d'un graphe simple, produire un Hamilcircuit de tonnes, ou déterminer que le graphique n'a pas une telle un circuit.

****16.** Étant donné la liste des bords d'un graphe simple, produire un Hamilchemin de tonnes, ou déterminer que le graphique n'a pas une telle un chemin.

17. Étant donné la liste des arêtes et des poids de ces arêtes d'un graphique simple connecté pondéré et deux sommets dans ce graphique, trouver la longueur d'un chemin le plus court entre eux en utilisant l'algorithme de Dijkstra. Trouvez également le chemin le plus court.

18. Étant donné la liste des bords d'un graphe non orienté, trouvez une ce graphique en utilisant l'algorithme donné dans l'exercice ensemble de la section 10.8.

19. Compte tenu de la liste des étudiants et des cours qu'ils suivent enroulé, construire un calendrier des examens finaux.

20. Étant donné les distances entre les paires de stations de télévision et la distance minimale autorisée entre les stations, assigner des fréquences à ces stations.

Calculs et explorations

Utilisez un ou plusieurs programmes informatiques que vous avez écrits pour effectuer ces exercices.

1. Affichez tous les graphiques simples avec quatre sommets.

2. Affichez un ensemble complet de graphiques simples non isomorphes avec six sommets.

3. Affichez un ensemble complet de graphiques dirigés non isomorphes avec quatre sommets.

4. Générez au hasard 10 graphiques simples différents, chacun avec 20 sommets de sorte que chacun de ces graphiques est également susceptible d'être généré.

5. Construisez un code Gray où les mots de code sont des chaînes de bits de longueur six.

6. Construisez des tours de chevalier sur des échiquiers de différentes tailles.

7. Déterminez si chacun des graphiques que vous avez générés dans L'exercice 4 de cet ensemble est planaire. Si vous le pouvez, déterminez le épaisseur de chacun des graphes qui ne sont pas plans.

8. Déterminez si chacun des graphiques que vous avez générés dans L'exercice 4 de cet ensemble est connecté. Si un graphe n'est pas con-connectés, déterminer le nombre de composants connectés du graphique.

9. Générez au hasard des graphiques simples avec 10 sommets. Arrêtez quand vous en avez construit un avec un circuit Euler. Dis-jouer un circuit d'Euler dans ce graphique.

10. Générez au hasard des graphiques simples avec 10 sommets. Arrêtez quand vous en avez construit un avec un circuit de Hamilton. Affichez un circuit de Hamilton dans ce graphique.

11. Trouvez le nombre chromatique de chacun des graphiques que vous généré dans l'exercice 4 de cet ensemble.

**** 12.** Trouvez le chemin le plus court qu'un vendeur itinérant peut emprunter visiter chacune des capitales des 50 États des États-Unis Unis, voyageant par avion entre les villes en ligne droite.

*** 13.** Estimer la probabilité qu'un simple généré aléatoirement graphe avec n sommets est connecté pour chaque entier positif n ne dépassant pas dix en générant un ensemble de simples aléatoires graphiques et déterminer si chacun est connecté.

**** 14.** Travailler sur le problème de déterminer si la traversée nombre de $K_{7,7}$ est 77, 79 ou 81. On sait qu'il est égal à l'une de ces trois valeurs.

Projets d'écriture

Répondez à ces questions par des essais en utilisant des sources extérieures.

1. Décrire les origines et le développement de la théorie des graphes avant l'année 1900.

2. Discuter des applications de la théorie des graphes à l'étude des les écosystèmes.

3. Discuter des applications de la théorie des graphes à la sociologie et psychologie.

4. Discutez de ce qui peut être appris en recherchant la bonne liens du graphique Web.

5. Expliquez la structure de la communauté dans un graphique représentant l'envoi d'un réseau, tel qu'un réseau social, un ordinateur réseau, un réseau d'information ou un réseau biologique. Définir ce qu'est une communauté dans un tel graphique et expliquer ce que les communautés représentent dans les graphiques représentant la types de réseaux répertoriés.

6. Décrivez certains des algorithmes utilisés pour détecter les dans des graphiques représentant des réseaux des types énumérés à la question 5.

7. Décrire les algorithmes pour dessiner un graphique sur papier ou sur un affichage étant donné les sommets et les bords du graphique. Quoi des considérations se posent lors de la création d'un graphique afin qu'il meilleure apparence pour comprendre ses propriétés?

8. Expliquez comment la théorie des graphes peut aider à découvrir des réseaux criminels ou terroristes en étudiant les aspects sociaux et Réseaux de communication.

9. Quelles sont les capacités d'un outil logiciel pour la saisie, l'affichage et la manipulation de graphiques avoir? Laquelle de ces capacités les outils disponibles ont-ils?

10. Décrivez certains des algorithmes disponibles pour déterminer si deux graphiques sont isomorphes et le calcul complexité de ces algorithmes. Quel est le plus efficace un tel algorithme actuellement connu?

11. Quel est le problème d'isomorphisme sous-graphique et ce sont certaines de ses applications importantes, y compris celles chimie, bioinformatique, conception de circuits électroniques et vision par ordinateur?

12. Expliquez ce que le domaine de l'exploration graphique, un domaine important de l'exploration de données, est et décrit certaines des niques utilisées dans le graph mining.

13. Décrire comment les chemins Euler peuvent être utilisés pour aider à déterminer Séquences d'ADN.

14. Définissez les *séquences de Bruijn* et discutez de leur origine dans les applications. Expliquer comment les séquences de Bruijn peuvent être construit en utilisant des circuits d'Euler.

15. Décrivez le *problème du facteur chinois* et expliquez comment pour résoudre ce problème.

16. Décrivez certaines des différentes conditions qui impliquent que un graphique a un circuit de Hamilton.

17. Décrivez certaines des stratégies et algorithmes utilisés pour résoudre le problème du vendeur itinérant.

18. Décrire plusieurs algorithmes différents pour déterminer si un graphique est plan. Quelle est la computation plexité de chacun de ces algorithmes?

19. En modélisation, les graphiques d'intégration à très grande échelle (VLSI) sont parfois intégrés dans un livre, avec les sommets sur le dos et les bords des pages. Définissez le *numéro de livre ber* d'un graphique et trouver le numéro de livre de divers graphiques y compris K_n pour $n = 3$, 4 , 5 et 6.

20. Discutez de l'histoire du théorème des quatre couleurs.

21. Décrivez le rôle joué par les ordinateurs dans la preuve de la théorème des quatre couleurs. Comment être sûr qu'une preuve s'appuie sur un ordinateur est correct?

22. Décrire et comparer plusieurs algorithmes différents pour colorier un graphique, pour savoir s'ils produisent une couleur oring avec le moins de couleurs possible et en termes de leur complexité.

23. Expliquez comment les graphiques multicolores peuvent être utilisés dans une variété de différents modèles.

24. Décrire certaines des applications des colorations de bord.

25. Expliquez comment la théorie des graphes aléatoires peut être preuves d'existence non constructives de graphiques avec certains Propriétés.

CHAPITRE

Des arbres

11.1 Introduction aux arbres

11.2 Applications des arbres

11.3 Traversée des arbres

11.4 Étendue Des arbres

11,5 minimum Enjambant Des arbres

Un graphe connecté qui ne contient aucun circuit simple est appelé un arbre.Les arbres ont été utilisés aussi longtemps il y a 1857, lorsque le mathématicien anglais Arthur Cayley les a utilisés pour compter certains types de composés chimiques. Depuis lors, des arbres ont été employés pour résoudre des problèmes une grande variété de disciplines, comme le montrent les exemples de ce chapitre.

Les arbres sont particulièrement utiles en informatique, où ils sont employés dans un large éventail d'algorithmes. Par exemple, les arbres sont utilisés pour construire des algorithmes efficaces pour localiser les éléments dans une liste. Ils peuvent être utilisés dans des algorithmes, tels que le codage Huffman, qui construisent des codes efficaces réduction des coûts de transmission et de stockage des données.Les arbres peuvent être utilisés pour étudier des jeux tels que les dames et les échecs et peut aider à déterminer les stratégies gagnantes pour jouer à ces jeux.Les arbres peuvent être utilisés de modéliser les procédures effectuées en utilisant une séquence de décisions.La construction de ces modèles peut aider à déterminer la complexité de calcul des algorithmes sur la base d'une séquence de décisions, tels que les algorithmes de tri.

Procédures de construction d'arbres contenant tous les sommets d'un graphique, y compris la recherche en profondeur d'abord et la recherche en largeur d'abord, peuvent être utilisées pour explorer systématiquement les sommets d'un graphiqueExplor- Les sommets d'un graphe via une recherche en profondeur d'abord, également connue sous le nom de recherche systématique de solutions à une grande variété de problèmes, comme déterminer comment huit les reines peuvent être placées sur un échiquier afin qu'aucune reine ne puisse en attaquer une autre.

Nous pouvons attribuer des poids aux bords d'un arbre pour modéliser de nombreux problèmes.Par exemple, en utilisant arbres pondérés, nous pouvons développer des algorithmes pour construire des réseaux contenant les moins chers ensemble de lignes téléphoniques reliant différents nœuds de réseau.

Introduction aux arbres

Au chapitre 10, nous avons montré comment les graphiques peuvent être utilisés pour modéliser et résoudre de nombreux problèmesDans ce chapitre, nous allons nous concentrer sur un type particulier de graphique appelé**arbre** , ainsi nommé parce que tel les graphiques ressemblent à des arbres. Par exemple, *les arbres* généalogiques sont des graphiques qui représentent des tableaux généalogiques. Les arbres généalogiques utilisent des sommets pour représenter les membres d'une famille et des arêtes pour représenter le parent–les relations avec les enfants. L'arbre généalogique des membres masculins de la famille Bernoulli des Suisses mathématiciens est illustré à la figure 1. Le graphique non orienté représentant un arbre généalogique (restreint aux personnes d'un seul sexe et sans consanguinité) est un exemple d'arbre.

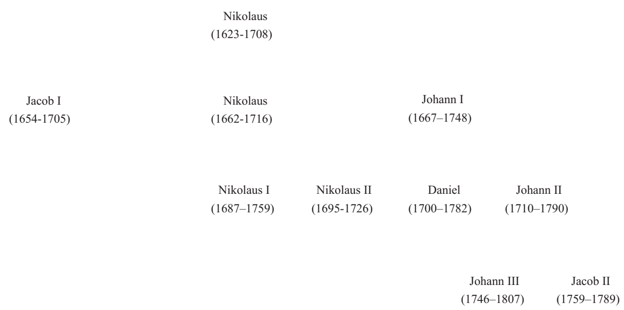


FIGURE 1 **La famille Bernoulli de mathématiciens.**

une *b* *une* *b* *une* *b* *une* *b*

ré *c* *ré* *c*

c *ré* *c* *ré*

e *F* *e* *F* *e* *F* *e* *F*

G_1 G_2 G_3 G_4

FIGURE 2 Exemples d'arbres et de graphiques qui ne sont pas des arbres.

DÉFINITION 1 Un *arbre* est un graphe connecté non orienté sans circuits simples.

Puisqu'un arbre ne peut pas avoir un circuit simple, un arbre ne peut pas contenir plusieurs arêtes ou boucles. Par conséquent, tout arbre doit être un simple graphique.

EXEMPLE 1 Parmi les graphiques représentés sur la figure 2, lesquels sont des arbres?

Solution: G_1 et G_2 sont des arbres, car les deux sont des graphes connectés sans circuits simples. G_3 est pas un arbre parce que e , b , a , d , e est un circuit simple dans ce graphique. Enfin, G_4 n'est pas un arbre car il n'est pas connecté. ▲

Tout graphe connecté qui ne contient aucun circuit simple est un arbre. Qu'en est-il des graphiques contenant pas de circuits simples qui ne sont pas forcément connectés? Ces graphiques sont appelés **forêts** et ont la propriété que chacun de leurs composants connectés est un arbre. La figure 3 montre une forêt.

Les arbres sont souvent définis comme des graphiques non orientés avec la propriété qu'il existe un simple chemin entre chaque paire de sommets. Le théorème 1 montre que cette définition alternative est équivalente à notre définition.

THÉORÈME 1 Un graphe non orienté est un arbre si et seulement s'il existe un chemin simple unique entre deux ses sommets.

Il s'agit d'un graphique avec trois composants connectés.

FIGURE 3 Exemple d'une forêt.

Preuve: supposons d'abord que T est un arbre. Alors T est un graphe connecté sans circuits simples.Soit x et y avoir deux sommets de T . Parce que T est connecté, par le théorème 1 de la section 10.4, il y a un chemin simple entre x et y . De plus, ce chemin doit être unique, car s'il y avait un second un tel chemin, le chemin formé en combinant le premier chemin de x à y suivi du chemin de y à x obtenu en inversant l'ordre du deuxième chemin de x à y formerait un circuit. Cette implique, en utilisant l' exercice 59 de l' article 10.4, qu'il ya un circuit simple T . Il existe donc un chemin simple unique entre deux sommets d'un arbre.

Maintenant , supposons qu'il existe un chemin unique etsimple entre deux sommets d'un graphe T . Alors T est connecté, car il existe un chemin entre deux de ses sommetsEn outre, T ne peut pas avoir de circuits simples.Pour voir que cela est vrai, supposons que T avait un circuit simple qui contenait les sommets x et y . Il y aurait alors deux chemins simples entre x et y , car le simple Le circuit est composé d'un chemin simple de x à y et d'un second chemin simple de y à x . Par conséquent, un graphique avec un chemin simple unique entre deux sommets est un arbre.

Arbres enracinés

Dans de nombreuses applications d'arbres, un sommet particulier d'un arbre est désigné comme **racine** . Une fois nous spécifiez une racine, nous pouvons assigner une direction à chaque arête comme suit.Parce qu'il y a un chemin unique de la racine à chaque sommet du graphique (par le théorème 1), nous dirigeons chaque arête loin du racine. Ainsi, un arbre avec sa racine produit un graphe orienté appelé **arbre enraciné** .

DÉFINITION 2 Un *arbre enraciné* est un arbre dans lequel un sommet a été désigné comme racine et chaque arête est dirigé loin de la racine.

Les arbres enracinés peuvent également être définis de manière récursive.Reportez-vous à la section 5.3 pour voir comment cela peut être fait. Nous pouvons changer un arbre non racine en un arbre enraciné en choisissant n'importe quel sommet comme racine.Notez que différents choix de la racine produisent différents arbres enracinés. Par exemple, la figure 4 affiche le arbres enracinés formés en désignant respectivement a pour racine et c pour racine dans le arbre T . Nous dessinons généralement un arbre enraciné avec sa racine en haut du graphique.Les flèches indiquant les directions des bords dans un arbre enraciné peuvent être omises, car le choix de la racine détermine les directions des bords.

La terminologie des arbres a des origines botaniques et généalogiques.Supposons que T soit un enraciné arbre. Si v est un sommet de T autre que la racine, le **parent** de v est le sommet unique u tel qu'il est une arête dirigée de u vers v (le lecteur doit montrer qu'un tel sommet est unique).Lorsque u est le parent de v , v est appelé un **enfant** de u . Les sommets avec le même parent sont appelés **frères et sœurs** . le **les ancêtres** d'un sommet autre que la racine sont les sommets sur le chemin de la racine à ce sommet, en excluant le sommet lui-même et en incluant la racine (c'est-à-dire son parent, le parent de son parent, etc.) jusqu'à ce que la racine soit atteinte). Les **descendants** d'un sommet v sont les sommets qui ont v comme

FIGURE 4 **Un arbre et des arbres enracinés formés en désignant deux racines différentes.**

T une

b F g

c h je j

ré e k l m

FIGURE 5 Un arbre Enraciné T .

g

h je j

k l m

FIGURE 6 Le Sous-arbre enraciné en g .

un ancêtre. Un sommet d'un arbre enraciné est appelé une **feuille** s'il n'a pas d'enfants. Sommets qui ont les enfants sont appelés **sommets internes** . La racine est un sommet interne à moins qu'il ne soit le seul sommet dans le graphique, auquel cas il s'agit d'une feuille.

Si a est un sommet dans un arbre, le **sous - arbre** avec a comme racine est le sous-graphique de l'arbre composé d' *un* et de ses descendants et de toutes les arêtes incidentes à ces descendants.

EXEMPLE 2 Dans l'arbre enraciné T (avec la racine a) montré dans la figure 5, trouvez le parent de c , les enfants de g , le les frères et sœurs de h , tous les ancêtres de e , tous les descendants de b , tous les sommets internes et toutes les feuilles. Quoi le sous-arbre est-il enraciné en g ?

Solution: le parent de c est b . Les enfants de g sont h , i et j . Les frères et sœurs de h sont i et j . Les ancêtres de e sont c , b et a . Les descendants de b sont c , d et e . Les sommets internes sont a , b , c , g , h et j . Les feuilles sont d , e , f , i , k , l et m . Le sous-arbre enraciné en g est montré dans la figure 6. ▲

Arbres enracinés avec la propriété que tous leurs sommets internes ont le même nombre de les enfants sont utilisés dans de nombreuses applications différentes. Plus loin dans ce chapitre, nous utiliserons ces arbres pour étudier les problèmes de recherche, de tri et de codage.

DÉFINITION 3 Un arbre enraciné est appelé arbre *m-aire* si chaque sommet interne n'a pas plus de m enfants. L'arbre est appelé un arbre *m-aire complet* si chaque sommet interne a exactement m enfants. Un m -ary arbre avec m = 2 est appelé *arbre binaire* .

EXEMPLE 3 Les arbres enracinés de la figure 7 sont- ils des arbres m -ary complets pour un entier m positif ?

T_1 T_2 T_3 T_4

FIGURE 7 **Quatre arbres enracinés.**

Épisode 371

Solution: T_1 est un arbre binaire complet car chacun de ses sommets internes a deux enfants. T_2 est un arbre 3-aires complet car chacun de ses sommets internes a trois enfants. En T_3 chaque sommet interne a cinq enfants, donc T_3 est un arbre complet à 5 aires. T_4 n'est pas un arbre m -ary complet pour tout m car certains ses sommets internes ont deux enfants et d'autres ont trois enfants. ▲

ARBRES RACINÉS ORDONNÉS Un **arbre enraciné ordonné** est un arbre enraciné où les enfants de chaque sommet interne sont ordonnés. Les arbres enracinés ordonnés sont dessinés de sorte que les enfants de chaque le sommet interne est affiché dans l'ordre de gauche à droite. Notez qu'une représentation d'un arbre enraciné dans la manière conventionnelle détermine un ordre pour ses bords. Nous utiliserons de tels ordres de bords dans les dessins sans mentionner explicitement que nous envisageons de commander un arbre enraciné.

Dans un arbre binaire ordonné (généralement appelé juste un **arbre binaire**), si un sommet interne a deux enfants, le premier enfant est appelé l'**enfant gauche** et le deuxième enfant est appelé l'**enfant droit** . L'arbre enraciné à l'enfant gauche d'un sommet est appelé le **sous - arbre gauche** de ce sommet, et l'arbre enraciné à l'enfant droit d'un sommet est appelé le **sous - arbre droit** du sommet. Le lecteur doit notez que pour certaines applications, chaque sommet d'un arbre binaire, autre que la racine, est désigné comme un enfant droit ou gauche de son parent. Cela se fait même lorsque certains sommets n'ont qu'un seul enfant. Nous procéderons à ces désignations chaque fois que cela sera nécessaire, mais pas autrement.

Les arbres enracinés ordonnés peuvent être définis récursivement. Arbres binaires, un type d'arbres enracinés ordonnés, ont été définis de cette façon dans la section 5.3.

EXEMPLE 4 Quels sont les enfants gauche et droit de d dans l'arbre binaire T montré sur la figure 8 (a) (où le l'ordre est-il impliqué par le dessin)? Quels sont les sous-arbres gauche et droit de c ?

Solution: l' enfant gauche de d est f et l'enfant droit est g . Nous montrons les sous-arbres gauche et droit de c sur les figures 8 (b) et 8 (c), respectivement. ▲

T *une* *h* *je*

b *c*

ré *e* *h* *je* *k* *l*

j

F *g* *j* *k* *l* *m*

m

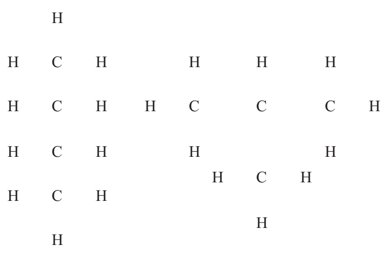
(une) b) (c)

FIGURE 8 **Un arbre binaire *T* et les sous-arbres gauche et droit du sommet *c* .**

Tout comme dans le cas des graphiques, il n'y a pas de terminologie standard utilisée pour décrire les arbres, enracinés des arbres, des arbres enracinés ordonnés et des arbres binaires.Cette terminologie non standard se produit parce que les arbres sont largement utilisés dans l'informatique, qui est un domaine relativement jeune. Le lecteur devrait soigneusement vérifier la signification donnée aux termes traitant des arbres chaque fois qu'ils se produisent.

Les arbres comme modèles

Les arbres sont utilisés comme modèles dans des domaines aussi divers que l'informatique, la chimie, la géologie, la botanique, et psychologie. Nous décrirons une variété de ces modèles basés sur des arbres.



Butane Isobutane

FIGURE 9 **Les deux isomères du butane.**

EXEMPLE 5: Des graphiques d' **hydrocarbures saturés et d'arbres** peuvent être utilisés pour représenter des molécules, où des atomes sont représentés par des sommets et des liaisons entre eux par des arêtes.Le mathématicien anglais Arthur Cayley a découvert des arbres en 1857 alors qu'il tentait d'énumérer les isomères des composés de sous la forme $C_n H_{2n+2}$, appelés *hydrocarbures saturés* .

Dans les modèles graphiques d'hydrocarbures saturés, chaque atome de carbone est représenté par un sommet de degré 4, et chaque atome d'hydrogène est représenté par un sommet de degré 1. Il y a $3n + 2$ sommets dans un graphique représentant un composé de la forme $C_n H_{2n+2}$. Le nombre d'arêtes dans un tel graphique est la moitié de la somme des degrés des sommets.Il y a donc $(4n + 2n + 2)/2 = 3n + 1$ bords dans ce graphique. Parce que le graphique est connecté et que le nombre d'arêtes est inférieur de un le nombre de sommets, ce doit être un arbre (voir exercice 15).

Les arbres non isomorphes avec n sommets de degré 4 et $2n + 2$ de degré 1 représentent le différents isomères de $C_n H_{2n+2}$. Par exemple, lorsque $n = 4$, il y a exactement deux non isomorphes des arbres de ce type (le lecteur doit le vérifier).Par conséquent, il existe exactement deux isomères différents de $C_4 H_{10}$. Leurs structures sont illustrées à la figure 9. Ces deux isomères sont appelés butane et isobutane. ▲

EXEMPLE 6 **Représentation d'organisations** La structure d'une grande organisation peut être modélisée à l'aide d'un arbre enraciné. Chaque sommet de cet arbre représente une position dans l'organisation.Un bord d'un sommet à un autre indique que la personne représentée par le sommet initial est le patron (direct) de la personne représentée par le sommet terminal.Le graphique de la figure 10 affiche une telle arbre. Dans l'organisation représentée par cet arbre, le directeur du développement matériel travaille directement pour le vice-président de la R&D. ▲

EXEMPLE 7 **Systèmes de** fichiers **informatiques Les** fichiers en mémoire d'ordinateur peuvent être organisés en répertoires.UNE Le répertoire peut contenir à la fois des fichiers et des sous-répertoires.Le répertoire racine contient le fichier entier

ARTHUR CAYLEY (1821–1895) Arthur Cayley, le fils d'un marchand, déploya ses talents de mathématique à un âge précoce avec une habileté incroyable dans les calculs numériques. Cayley est entré au Trinity College de Cambridge lorsque il avait 17 ans. Au collège, il a développé une passion pour la lecture de romans. Cayley a excellé à Cambridge et a été élu pour une nomination de 3 ans en tant que Fellow of Trinity et assistant tuteur. Pendant ce temps, Cayley a commencé son étude de la géométrie à n dimensions et a apporté une variété de contributions à la géométrie et à l'analyse. Il a également développé un intérêt pour l'alpinisme, qu'il a apprécié pendant les vacances en Suisse. Parce que non poste de mathématicien était disponible pour lui, Cayley a quitté Cambridge, entrant dans la profession juridique et l'admission au barreau en 1849. Bien que Cayley ait limité son travail juridique pour pouvoir continuer son recherche en mathématiques, il s'est forgé une réputation de juriste. Au cours de sa carrière juridique, il a pu écrire plus de 300 articles mathématiques. En 1863, l'Université de Cambridge a créé un nouveau poste en mathématiques et l'a proposé à Cayley. Il a accepté ce poste, même s'il payait moins d'argent qu'il n'en gagnait en tant qu'avocat.

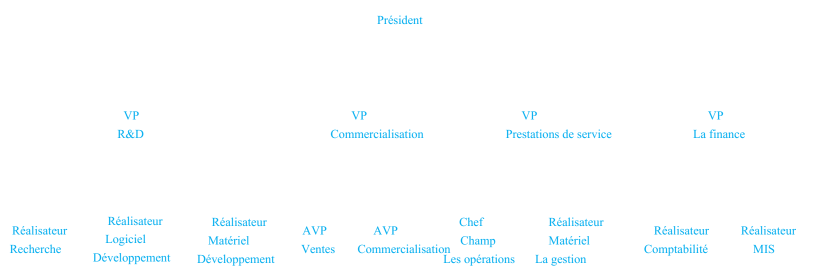
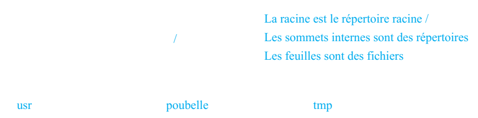


FIGURE 10 **Un arbre organisationnel pour une société informatique.**

système. Ainsi, un système de fichiers peut être représenté par un arbre enraciné, où la racine représente le répertoire racine, les sommets internes représentent les sous-répertoires et les feuilles représentent les fichiers ordinaires ou répertoires vides. Un tel système de fichiers est illustré à la figure 11. Dans ce système, le fichier khr est le répertoire rje. (Notez que les liens vers des fichiers où le même fichier peut avoir plusieurs chemins d'accès peut conduire à des circuits dans les systèmes de fichiers informatiques.) ▲



poubelle rje bobine ls courrier qui déchet

ed nroff vi khr opr uucp

fichier imprimante

FIGURE 11 **Un système de fichiers informatiques.**

EXEMPLE 8 **Processeurs parallèles connectés à un arbre** Dans l'exemple 17 de la section 10.2, nous avons décrit plusieurs réseaux d'interconnexion pour traitement parallèle. Un **réseau connecté à** un **arbre** est un autre moyen efficace d'interconnecter les processeurs. Le graphe représentant un tel réseau est un binaire complet arbre, c'est-à-dire un arbre binaire complet où chaque racine est au même niveau. Un tel réseau interconnecte $n = 2^k - 1$ processeurs, où k est un entier positif. Un processeur représenté par le sommet v qui n'est pas une racine ou une feuille a trois connexions bidirectionnelles, une avec le processeur représenté par le parent de v et deux aux processeurs représentés par les deux enfants de v. Le processeur représentée par la racine a deux connexions bidirectionnelles avec les processeurs représentés par ses deux les enfants. Un processeur représenté par une feuille v possède une seule connexion bidirectionnelle avec le parent de v. Nous affichons un réseau connecté à un arbre avec sept processeurs dans la figure 12.

P_1

P_2 P_3

P_4 P_5 P_6 P_7

FIGURE 12 **A Connecté à l'arbre Réseau de sept Processeurs.**

Nous illustrons maintenant comment un réseau connecté à un arbre peut être utilisé pour le calcul parallèle Dans en particulier, nous montrons comment les processeurs de la figure 12 peuvent être utilisés pour ajouter huit nombres, en utilisant trois étapes. Dans la première étape, nous ajoutons x_1 et x_2 en utilisant P_4, x_3 et x_4 en utilisant P_5, x_5 et x_6 en utilisant P_6,

et x_7 et x_8 en utilisant P_7. Dans la deuxième étape, nous ajoutons $x_1 + x_2$ et $x_3 + x_4$ en utilisant P_2 et $x_5 + x_6$ et $x_7 + x_8$ en utilisant P_3. Enfin, dans la troisième étape, nous ajoutons $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ et $x_5 + x_6 + x_7 + x_8$ en utilisant P_1. Les trois étapes utilisées pour ajouter huit chiffres se comparent favorablement aux sept étapes nécessaire d'ajouter huit numéros en série, où les étapes consistent à ajouter un numéro au somme des numéros précédents de la liste. ▲

Propriétés des arbres

Nous aurons souvent besoin de résultats concernant le nombre d'arêtes et de sommets de divers types dans les arbres.

THÉORÈME 2 Un arbre à n sommets a $n - 1$ arêtes.

Preuve: Nous utiliserons l'induction mathématique pour prouver ce théorème. Notez que pour tous les arbres ici nous pouvons choisir une racine et considérer l'arbre enraciné.

ÉTAPE DE BASE: Lorsque $n = 1$, un arbre avec $n = 1$ sommet n'a pas d'arêtes. Il s'ensuit que le théorème

est vrai pour $n = 1$.
ÉTAPE INDUCTIVE: L'hypothèse inductive stipule que chaque arbre avec k sommets a $k - 1$ bords, où k est un entier positif. Supposons qu'un arbre T a $k + 1$ sommets et que v est un feuille de T (qui doit exister car l'arbre est fini), et soit w le parent de v . Suppression à partir de T, le sommet v et le bord reliant w à v produisent un arbre T avec k sommets, car le graphe résultant est toujours connecté et n'a pas de circuits simples. Par l'hypothèse inductive, T a $k - 1$ bords. Il s'ensuit que T a k arêtes car il a une arête de plus que T , l'arête connexion v et w . Ceci termine l'étape inductive.

Rappelons qu'un arbre est un graphe connecté non orienté sans circuits simples. Donc, quand G est un graphe non orienté à n sommets, le théorème 2 nous dit que les deux conditions *(i)* G sont liées et *(ii)* G n'a pas de circuits simples, implique *(iii)* G a $n - 1$ bords. De plus, lorsque *(i)* et *(iii)* tiennent, alors *(ii)* doit également tenir, et lorsque *(ii)* et *(iii)* tiennent, *(i)* doit également tenir. Autrement dit, si G est connecté et G a $n - 1$ arêtes, alors G n'a pas de circuits simples, de sorte que G est un arbre (voir exercice 15 (a)), et si G n'a pas de circuits simples et G a $n - 1$ arêtes, alors G est connecté, tout comme un arbre (voir Exercice 15 (b)). Par conséquent, lorsque deux des *points (i)* , *(ii)* et *(iii) sont* réunis, la troisième condition doit également maintenez, et G doit être un arbre.

COMPTAGE DES VERTICES EN ARBRES COMPLETS *m* -ARY Nombre de sommets dans un m -ary complet L'arbre avec un nombre spécifié de sommets internes est déterminé, comme le montre le théorème 3. Un péché Théorème 2, nous utiliserons n pour désigner le nombre de sommets dans un arbre.

THÉORÈME 3 Un arbre m -ary complet avec i sommets internes contient $n = mi + 1$ sommets.

Preuve: chaque sommet, à l'exception de la racine, est l'enfant d'un sommet interne. Parce que chacun des i les sommets internes ont m enfants, il y a des mi sommets dans l'arbre autre que la racine. Donc, l'arbre contient $n = mi + 1$ sommets.

Supposons que T soit un arbre m -ary complet . Soit i le nombre de sommets internes et l le nombre de feuilles dans cet arbre. Une fois que l'un de n , i et l est connu, les deux autres quantités sont déterminées. Le théorème 4 explique comment trouver les deux autres quantités à partir de celle qui est connue.

THÉORÈME 4 Un arbre m -ary complet avec

(*i*) n sommets a $i = (n - 1) / m$ sommets internes et $l = [(m - 1) n + 1] / m$ feuilles,
(*ii*) i sommets internes a $n = mi + 1$ sommets et $l = (m - 1) i + 1$ feuilles,
(*iii*) l feuilles a $n = (ml - 1) / (m - 1)$ sommets et $i = (l - 1) / (m - 1)$ vertices.

Preuve: Soit n le nombre de sommets, i le nombre de sommets internes et l le nombre de feuilles. Les trois parties du théorème peuvent toutes être prouvées en utilisant l'égalité donnée dans le théorème 3, c'est-à-dire, $n = mi + 1$, ainsi que l'égalité $n = l + i$, ce qui est vrai parce que chaque sommet est soit une feuille ou un sommet interne. Nous allons prouver la partie (*i*) ici. Les preuves des parties (*ii*) et (*iii*) sont laissés comme exercices pour le lecteur.

La résolution de i dans $n = mi + 1$ donne $i = (n - 1) / m$. Puis en insérant cette expression pour i dans l'équation $n = l + i$ montre que $l = n - i = n - (n - 1) / m = [(m - 1) n + 1] / m$.

L'exemple 9 illustre comment le théorème 4 peut être utilisé.

EXEMPLE 9 Supposons que quelqu'un commence une chaîne de lettres. Chaque personne qui reçoit la lettre est invitée à envoyer à quatre autres personnes. Certaines personnes le font, mais d'autres n'envoient aucune lettre. Combien les gens ont vu la lettre, y compris la première personne, si personne ne reçoit plus d'une lettre et si la chaîne se termine après qu'il y ait eu 100 personnes qui l'ont lue mais ne l'ont pas envoyée? Combien de personnes ont envoyé la lettre?

Solution: la chaîne de lettres peut être représentée à l'aide d'un arbre à 4 zones. Les sommets internes correspondent aux personnes qui ont envoyé la lettre, et les feuilles correspondent aux personnes qui ne l'ont pas envoyée en dehors. Parce que 100 personnes n'ont pas envoyé la lettre, le nombre de feuilles de cet arbre enraciné est $l = 100$. Par conséquent, la partie (*iii*) du théorème 4 montre que le nombre de personnes qui ont vu la lettre est $n = (4 \cdot 100 - 1) / (4 - 1) = 133$. En outre, le nombre de sommets internes est de 133 - 100 = 33, donc 33 personnes ont envoyé la lettre. ▲

une

b *j* *k*

c *e* *F* *l*

ré *g* *je suis* *n*

h

FIGURE 13 A Arbre enraciné.

ÉQUILIBRÉ *m* ARBRES -aire Il est souvent souhaitable d'utiliser desarbres enracinés qui sont « équilibrés » afin que les sous-arbres à chaque sommet contiennent des chemins d'environ la même longueur. Quelques définitions rendra ce concept clair. Le **niveau** d'un sommet v dans un arbre enraciné est la longueur de l'unique chemin de la racine à ce sommet. Le niveau de la racine est défini comme étant nul. La **hauteur** d'un l'arbre enraciné est le maximum des niveaux de sommets. En d'autres termes, la hauteur d'un arbre enraciné est la longueur du chemin le plus long de la racine à un sommet.

EXEMPLE 10 Trouvez le niveau de chaque sommet dans l'arbre enraciné montré dans la figure 13. Quelle est la hauteur de ce arbre?

Solution: la racine a est au niveau 0. Les sommets b, j et k sont au niveau 1. Les sommets c, e, f et l sont à niveau 2. Les sommets d, g, i, m et n sont au niveau 3. Enfin, le sommet h est au niveau 4. Parce que le plus grand le niveau d'un sommet est de 4, cet arbre a une hauteur de 4. ▲

Un arbre m enraciné de hauteur h est **équilibré** si toutes les feuilles sont aux niveaux h ou $h - 1$.

EXEMPLE 11 Lesquels des arbres enracinés montrés dans la figure 14 sont équilibrés?

Solution: T_1 est équilibré, car toutes ses feuilles sont aux niveaux 3 et 4. Cependant, T_2 n'est pas équilibré, parce qu'il a des feuilles aux niveaux 2, 3 et 4. Enfin, T_3 est équilibré, car toutes ses feuilles sont à niveau 3. ▲

T_1 T_2 T_3

FIGURE 14 **Quelques arbres enracinés.**

UNE LIMITE POUR LE NOMBRE DE FEUILLES DANS UN *M* -ARYTREE Il est souvent utile d'avoir une limite supérieure pour le nombre de feuilles dans unarbre m -ary. Le théorème 5 fournit une telle limite dans en termes de hauteur de l'arbre m -ary.

THÉORÈME 5 Il y a au plus m^h feuilles dans un arbre m -ary de hauteur h .

Preuve: La preuve utilise une induction mathématique sur la hauteur. Tout d'abord, considérons les arbres m -ary de hauteur 1. Ces arbres sont constitués d'une racine avec pas plus de m enfants, dont chacun est une feuille. Par conséquent, il n'y a pas plus de $m^1 = m$ feuilles dans un arbre m -ary de hauteur 1. C'est l'étape de base de l'argument inductif.

Supposons maintenant que le résultat est vrai pour tous lesarbres m -ary de hauteur inférieure à h ; c'est l'inductif hypothèse. Soit T un arbre m -ary de hauteur h . Les feuilles de T sont les feuilles des sous-arbres de T obtenu en supprimant les bords de la racine à chacun des sommets au niveau 1, comme indiqué dans Figure 15.

Chacun de ces sous-arbres a une hauteur inférieure ou égale à h - 1. Donc, selon l'hypothèse inductive, chacun de ces arbres enracinés a au plus m^{h-1} feuilles. Parce qu'il existe au plus m *de* tels sous-arbres, chacun avec un maximum de m^{h-1} feuilles, il y a au plus $m \cdot m^{h-1} = m^h$ feuilles dans les racines arbre. Ceci termine l'argument inductif.

COROLLARY 1 Si un arbre m -ary de hauteur h a l feuilles, alors $h \geq \lceil \log_m l \rceil$. Si l' arbre m -ary est plein et équilibré, alors $h = \lceil \log_m l \rceil$. (Nous utilisons ici la fonction plafond. Rappelons que $\lceil x \rceil$ est le plus petit entier supérieur ou égal à x .)

Preuve: On sait que $l \leq m^h$ du Théorème 5. Prendre des logarithmes à la base m montre que $\log_m l \leq h$. Parce que h est un entier, nous avons $h \geq \lceil \log_m l \rceil$. Supposons maintenant que l'arbre est équilibré.

1er sous-arbre de hauteur h - 1	2e sous-arbre de hauteur h - 1	3e sous-arbre de hauteur h - 1	…	(m - 1) st sous-arbre de hauteur h - 1	m e sous-arbre de hauteur h - 1

FIGURE 15 **L'étape inductive de la preuve.**

Ensuite, chaque feuille est au niveau h ou h - 1, et comme la hauteur est h , il y a au moins une feuille au niveau h .
Il s'ensuit qu'il doit y avoir plus de m^{h-1} feuilles (voir exercice 30). Parce que $l \leq m^h$, on a $m^{h-1} < l \leq m^h$. La prise de logarithmes à la base m dans cette inégalité donne $h - 1 < \log_m l \leq h$.
Par conséquent, $h = \lceil \log_m l \rceil$.

Des exercices

1. Lequel de ces graphiques sont des arbres?

une) **b)**

c) **ré)**

e) **F)**

2. Lequel de ces graphiques sont des arbres?

une) **b)**

c) **ré)**

e) **F)**

3. Répondez à ces questions sur l'arbre enraciné illustré.

une

b *c* *ré*

F *h* *j*
e *g* *je* *k*

q
l *m* *n* *o* *p* *r*

s *t*

u

a) Quel sommet est la racine?
b) Quels sommets sont internes?
c) Quels sommets sont des feuilles?
d) Quels sommets sont les enfants de j ?
e) Quel sommet est le parent de h ?
f) Quels sommets sont les frères et sœurs de o ?
g) Quels sommets sont les ancêtres de m ?
h) Quels sommets descendent de b ?

4. Répondez aux mêmes questions que celles énumérées dans l'exercice 3 arbre enraciné illustré.

une

b *ré*
c

e *g* *h* *je*
F

o
j *kl* *mn* *p*

q *r* *s*

5. L'arbre enraciné dans l'exercice 3 est-il un arbre m -ary complet pour certains entier positif m ?

6. L'arbre enraciné dans l'exercice 4 est-il un arbre m -ary complet pour certains entier positif m ?

7. Quel est le niveau de chaque sommet de l'arbre enraciné dans Ex- exercice 3?

8. Quel est le niveau de chaque sommet de l'arbre enraciné dans Ex- exercice 4?

9. Dessinez le sous-arbre de l'arbre dans l'exercice 3 qui est enraciné à

a) a . **b)** c . **c)** e .

10. Dessinez le sous-arbre de l'arbre dans l'exercice 4 qui est enraciné à

a) a . **b)** c . **c)** e .

11. a) Combien y a-t-il d'arbres non racinés non isomorphes avec trois sommets?
b) Combien y a-t-il d'arbres à racines non isomorphes avec trois sommets (en utilisant l'isomorphisme pour dirigé graphiques)?

∗ 12. a) Combien y a-t-il d'arbres non racinés non isomorphes avec quatre sommets?
b) Combien y a-t-il d'arbres à racines non isomorphes avec quatre sommets (en utilisant l'isomorphisme pour dirigé graphiques)?

∗ **13.** **a)** Combien y a-t-il d'arbres non racinés non isomorphes avec cinq sommets?

b) Combien y a-t-il d'arbres à racines non isomorphes avec cinq sommets (en utilisant l'isomorphisme pour les graphes dirigés)?

∗ **14.** Montrer qu'un graphe simple est un arbre si et seulement s'il est connecté, mais la suppression de l'un de ses bords produit un graphique qui n'est pas connecté.

∗ **15.** Soit *G* un simple graphe à *n* sommets. Montre CA

a) *G* est un arbre si et seulement s'il est connecté et a n - 1 bords.

b) *G* est un arbre si et seulement si *G* n'a pas de circuits simples et a n - 1 bords. [*Astuce:* pour montrer que *G* est connecté s'il n'a pas de circuits simples et n - 1 bords, montrer que *G* ne peut pas avoir plus d'un composant connecté.]

16. Quels graphes bipartis complets $K_{m,n}$, où m et n sont des entiers positifs, sont des arbres?

17. Combien d'arêtes possède un arbre de 10 000 sommets?

18. Combien de sommets un arbre complet à 5 aires avec 100 internes vertices ont?

19. Combien d'arêtes un arbre binaire complet avec 1000 internes vertices ont?

20. Combien de feuilles un arbre complet à 3 aires avec 100 sommets avoir?

21. Supposons que 1000 personnes entrent dans un tournoi d'échecs. Utiliser un modèle d'arbre enraciné du tournoi pour déterminer comment de nombreux jeux doivent être joués pour déterminer un champion, si un joueur est éliminé après une défaite et des matchs sont joués jusqu'à ce qu'un seul participant n'ait pas perdu. (Supposons qu'il n'y ait pas cravates.)

22. Une chaîne de lettres commence lorsqu'une personne envoie une lettre à cinq autres. Chaque personne qui reçoit la lettre l'envoie à cinq autres personnes qui ne l'ont jamais reçu ou ne le reçoivent pas l'envoyer à n'importe qui. Supposons que 10 000 personnes envoient la lettre avant la fin de la chaîne et que personne ne reçoit plus d'une lettre. Combien de personnes reçoivent la lettre, et combien ne l'envoient pas?

23. Une chaîne de lettres commence par l'envoi d'une lettre par une personne à 10 autres. Chaque personne est invitée à envoyer la lettre à 10 autres, et chaque lettre contient une liste des précédents six personnes dans la chaîne. À moins qu'il y en ait moins de six noms dans la liste, chaque personne envoie un dollar au premier personne dans cette liste, supprime le nom de cette personne de dans la liste, remonte chacun des cinq autres noms d'une position et insère son nom à la fin de cette liste. Si personne ne rompt la chaîne et personne ne reçoit plus de une lettre, combien d'argent une personne dans la chaîne recevoir finalement?

∗ **24.** Soit dessiner un arbre m -ary complet avec 76 feuilles et hauteur 3, où m est un entier positif, ou montre qu'aucun tel arbre existe.

∗ **25.** Soit dessiner un arbre m -ary complet avec 84 feuilles et hauteur 3, où m est un entier positif, ou montre qu'aucun tel arbre existe.

∗ **26.** Un arbre m -ary complet T a 81 feuilles et hauteur 4.

a) Donnez les bornes supérieure et inférieure de m .

b) Que vaut m si T est également équilibré?

Un **complet *m* arbre -aire** est plein m arbre -aire dans lequel chaque feuille est au même niveau.

27. Construisez un arbre binaire complet de hauteur 4 et une com- arbre à 3 arêtes plein de hauteur 3.

28. Combien de sommets et combien de feuilles fait un complet m -ary arbre de hauteur h ont?

29. Prouver

a) partie (*ii*) du théorème 4.

b) partie (*iii*) du théorème 4.

30. Montrer qu'un arbre équilibré m -ary complet de hauteur h a plus que m^{h-1} feuilles.

31. Combien de bords sont là dans une forêt de t arbres contenant un total de n sommets?

32. Expliquez comment un arbre peut être utilisé pour représenter le tableau contenu d'un livre organisé en chapitres, où chaque chapitre est organisé en sections et chaque section est ganized en sous-sections.

33. Combien d'isomères différents ces hydro- les carbones ont?

a) C_3H_8 **b)** C_5H_{12} **c)** C_6H_{14}

34. Que représente chacun de ces éléments dans une organisation arbre?

a) le parent d'un sommet

b) un enfant d'un sommet

c) un frère d'un sommet

d) les ancêtres d'un sommet

e) les descendants d'un sommet

f) le niveau d'un sommet

g) la hauteur de l'arbre

35. Répondez aux mêmes questions que celles données dans l'exercice 34 pour un arbre enraciné représentant un système de fichiers informatique.

36. **a)** Dessine l'arbre binaire complet avec 15 sommets qui représente un réseau arborescent de 15 processeurs.

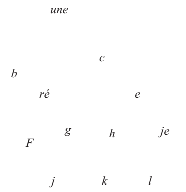
b) Montrez comment 16 numéros peuvent être ajoutés en utilisant les 15 pro- cesseurs dans la partie (a) en quatre étapes.

37. Soit n une puissance de 2. Montrer que n nombres peuvent être ajoutés en log n étapes en utilisant un réseau arborescent de n - 1 processeurs.

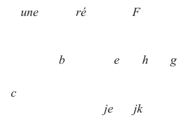
∗ **38.** Un **arbre étiqueté** est un arbre auquel chaque sommet est affecté d'un étiquette. Deux arbres étiquetés sont considérés comme isomorphes lorsque il y a un isomorphisme entre eux qui préserve la étiquettes de sommets. Combien d'arbres non isomorphes sont là avec trois sommets étiquetés avec différents entiers de l'ensemble {1 , 2 , 3}? Combien d'arbres non isomorphes existe-t-il avec quatre sommets étiquetés avec des gers de l'ensemble {1 , 2 , 3 , 4}?

L' **excentricité** d'un sommet dans un arbre non racine est la longueur du chemin simple le plus long commençant à ce sommet. Un sommet est appelé **centre** si aucun sommet de l'arbre n'a une excentricité plus petite que ce sommet. Dans les exercices 39 à 41, trouvez chaque sommet qui est un centre dans l'arbre donné.

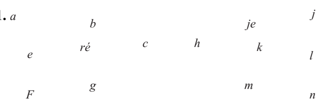
39.



40.



41.



42. Montrer qu'un centre doit être choisi comme racine pour produire un arbre enraciné d'une hauteur minimale à partir d'un arbre non raciné.

* **43.** Montrez qu'un arbre a un centre ou deux centres qui sont adjacentes.

44. Montrez que chaque arbre peut être coloré en utilisant deux couleurs.

Les **arbres de Fibonacci enracinés** T_n sont définis récursivement dans le manière suivante. T_1 et T_2 sont tous deux l'arbre enraciné composé d'un seul sommet, et pour $n = 3, 4, \ldots,$ l'arbre enraciné T_n est construit à partir d'une racine avec T_{n-1} comme sous-arbre gauche et T_{n-2} comme son sous-arbre droit.

45. Dessinez les sept premiers arbres Fibonacci enracinés.

* **46.** Combien de sommets, de feuilles et de sommets internes le arbre de Fibonacci enraciné T_n ont, où n est un entier positif ger? Quelle est sa hauteur?

47. Quel est le problème avec la «preuve» suivante en utilisant des induction matique de l'énoncé que tout arbre avec n sommets a un chemin de longueur $n - 1$. *Étape de base:* chaque arbre avec un sommet a clairement un chemin de longueur 0. *Inductif étape:* Supposons qu'un arbre avec n sommets a un chemin de longueur $n - 1$, qui a u comme sommet terminal. Ajouter un sommet v et le bord de u à v. L'arbre résultant a $n + 1$ sommets et a un chemin de longueur n. Ceci termine l'étape inductive.

* **48.** Montrer que la profondeur moyenne d'une feuille dans un arbre binaire avec n sommets est $(\log n)$.

Applications des arbres

introduction

Nous discuterons de trois problèmes qui peuvent être étudiés en utilisant des arbres. Le premier problème est: comment les éléments d'une liste soient-ils stockés de manière à pouvoir localiser facilement un élément? Le deuxième problème est: une série de décisions doivent être prises pour trouver un objet avec une certaine propriété dans une collection de des objets d'un certain type? Le troisième problème est: comment un ensemble de caractères doit-il être efficace codé par des chaînes de bits?

Arbres de recherche binaires

La recherche d'éléments dans une liste est l'une des tâches les plus importantes qui se pose en informatique. Notre objectif principal est de mettre en œuvre un algorithme de recherche qui trouve les éléments efficacement lorsque le les articles sont totalement commandés. Cela peut être accompli grâce à l'utilisation d'un **arbre de recherche binaire** , qui est un arbre binaire dans lequel chaque enfant d'un sommet est désigné comme un enfant droit ou gauche, non sommet a plus d'un enfant droit ou enfant gauche, et chaque sommet est étiqueté avec une clé, qui est l'un des éléments. De plus, les sommets se voient attribuer des clés de sorte que la clé d'un sommet soit à la fois plus grand que les clés de tous les sommets dans son sous-arbre gauche et plus petit que les clés de tous les sommets dans son sous-arbre droit.

Cette procédure récursive est utilisée pour former l'arborescence de recherche binaire d'une liste d'éléments. Commencer avec un arbre contenant un seul sommet, à savoir la racine. Le premier élément de la liste est affecté comme clé de la racine. Pour ajouter un nouvel élément, comparez-le d'abord avec les clés de sommets déjà présentes dans l'arborescence, commençant à la racine et se déplaçant vers la gauche si l'élément est inférieur à la clé du sommet respectif si ce sommet a un enfant gauche, ou se déplaçant vers la droite si l'élément est supérieur à la clé du sommet respectif si ce sommet a un enfant droit. Lorsque l'élément est inférieur au sommet respectif et ce sommet n'a pas d'enfant gauche, puis un nouveau sommet avec cet élément comme clé est inséré en tant que nouvel enfant gauche. De même, lorsque l'élément est supérieur au sommet respectif et que ce sommet a aucun enfant droit, puis un nouveau sommet avec cet élément comme clé est inséré en tant que nouvel enfant droitnous illustrer cette procédure avec l'exemple 1.

EXEMPLE 1 Former un arbre de recherche binaire pour les mots*mathématiques, physique, géographie, zoologie, météorologie, géologie, psychologie* et *chimie* (par ordre alphabétique).

Solution: la figure 1 affiche les étapes utilisées pour construire cet arbre de recherche binaire. Le mot *mathe-matics* est la clé de la racine. Parce que la *physique* vient après les *mathématiques* (par ordre alphabétique), ajouter un enfant droit de la racine avec la*physique* clé . Parce que la *géographie* précède les *mathématiques ics* , ajoutez un enfant gauche de la racine avec la*géographie* clé . Ensuite, ajoutez un enfant droit du sommet avec *physique* clé , et lui assigner la *zoologie* clé , parce que la *zoologie* vient après les *mathématiques* et après *la physique* . De même, ajoutez un enfant gauche du sommet avec la*physique* clé et affectez à ce nouveau sommet le *météorologie* clé . Ajouter un enfant droit du sommet avec une *géographie* clé et attribuer ce nouveau sommet la *géologie* clé . Ajoutez un enfant gauche du sommet avec la *zoologie* clé et affectez-lui la *psychologie* clé . Ajoutez un enfant gauche du sommet avec la*géographie* clé et affectez-lui la *chimie* clé . (Le lecteur devrait fonctionner à travers toutes les comparaisons nécessaires à chaque étape.) ▲

Une fois que nous avons un arbre de recherche binaire, nous avons besoin d'un moyen de localiser les éléments dans l'arbre de recherche binaire, ainsi qu'un moyen d'ajouter de nouveaux éléments. L'algorithme 1, un algorithme d'insertion, fait en fait les deux ces tâches, même s'il peut sembler qu'il est uniquement conçu pour ajouter des sommets à une recherche binaire arbre. Autrement dit, l'algorithme 1 est une procédure qui localise un élément x dans un arbre de recherche binaire s'il est présent, et ajoute un nouveau sommet avec x comme clé si x n'est pas présent. Dans le pseudocode, v est le le sommet en cours d'examen et l'*étiquette* (v) représente la clé de ce sommet. L'algorithme commence par examiner la racine. Si x est égal à la clé de v , alors l'algorithme a trouvé l'emplacement de x et se termine; si x est inférieur à la clé de v , nous nous déplaçons vers l'enfant gauche de v et répétons la procédure; et si x est supérieur à la clé de v , nous passons au bon enfant de v et répétons la procédure. Si, à quelque étape que ce soit, nous essayons de passer à un enfant qui n'est pas présent, nous savons que x n'est pas présent dans l'arbre, et nous ajoutons un nouveau sommet comme cet enfant avec x comme clé.

FIGURE 1 Construction d'un arbre de recherche binaire.

ALGORITHME 1 Localisation d'un élément dans ou ajout d'un élément à une arborescence de recherche binaire.

insertion de **procédure** (T : arbre de recherche binaire, x : item)
v : = racine de T
{un sommet non présent dans T a la valeur *null* }
tandis que v = *null* et *label (v)* = x
  si x <*label (v)* **alors**
    si enfant gauche de v = *null* **alors** v : = enfant gauche de v
    sinon ajouter un *nouveau sommet* comme enfant gauche de v et définir v : = *null*
  autre
    si enfant droit de v = *null* **alors** v : = enfant droit de v
    sinon ajouter un *nouveau sommet en* tant qu'enfant droit de v et définir v : = *null*
si la racine de T = *null* **puis** ajouter un sommet v à l'arbre et l' étiquette avec x
sinon si v est nul ou *label (v)* = x **alors** étiqueter le *nouveau sommet* avec x et soit v ce nouveau sommet
retourner v { v = emplacement de x }

L'exemple 2 illustre l'utilisation de l'algorithme 1 pour insérer un nouvel élément dans une arborescence de recherche binaire.

EXEMPLE 2 Utilisez l'algorithme 1 pour insérer le mot*océanographie* dans l'arbre de recherche binaire de l'exemple 1.

Solution: l' algorithme 1 commence par v , le sommet examiné, égal à la racine de$T$, donc *label (v)* = *mathématiques* . Parce que v = *nul* et *label (v)* = *mathématiques* <*océanographie* , nous examinez ensuite le bon enfant de la racine.Cet enfant droit existe, donc nous mettons v , le sommet sous examen, pour être ce bon enfant. À cette étape, nous avons v = *null* et *label (v)* = *physique*> *l'océanographie* , nous examinons donc l'enfant gauche de$v$. Cet enfant gauche existe, donc nous mettons v , le sommet sous examen, à cet enfant gauche. À cette étape, nous avons également v = *null* et *label (v)* = *metereology* < *l'océanographie* , nous essayons donc d'examiner le bon enfant de$v$. Cependant, ce bon enfant n'existe pas, nous ajoutons donc un nouveau sommet comme l'enfant droit de$v$ (qui à ce stade est le sommet avec la clé *météorologie*) et nous définissons v : = *null* . Nous quittons maintenant **en** boucle parce que v = *null* . Parce que le racine de T n'est pas *nulle* et v = *nulle* , nous utilisons l' instruction **else if** à la fin de l'algorithme pour étiqueter notre nouveau sommet avec l' *océanographie* clé . ▲

Nous allons maintenant déterminer la complexité de calcul de cette procédure.Supposons que nous ayons un arbre de recherche binaire T pour une liste de n éléments. On peut former un arbre binaire complet U *à* partir de T en ajoutant les sommets sans étiquette chaque fois que nécessaire afin que chaque sommet avec une clé ait deux enfants.C'est illustré dans la figure 2. Une fois que nous avons fait cela, nous pouvons facilement localiser ou ajouter un nouvel élément comme clé sans ajouter de sommet.

Le plus de comparaisons nécessaires pour ajouter un nouvel élément est la longueur du chemin le plus long en$U$ *à* partir de la racine à une feuille. Les sommets internes du U sont les sommets de T . Il s'ensuit que U a n interne sommets. Nous pouvons maintenant utiliser la partie (*ii*) du théorème 4 de la section 11.1 pour conclure que$U$ a $n + 1$ feuilles. En utilisant le corollaire 1 de la section 11.1, nous voyons que la hauteur de$U$ est supérieure ou égale à $h = \lceil \log (n + 1) \rceil$. Par conséquent, il est nécessaire d'effectuer au moins $\lceil \log(n + 1) \rceil$ comparaisons pour ajouter un élément. Notez que si U est équilibré, sa hauteur est $\lceil \log(n + 1) \rceil$ (par le corollaire 1 de Section 11.1). Ainsi, si un arbre de recherche binaire est équilibré, localiser ou ajouter un élément ne nécessite aucun plus de $\lceil \log (n + 1) \rceil$ comparaisons. Un arbre de recherche binaire peut devenir déséquilibré en tant qu'éléments y sont ajoutés. Parce que les arbres de recherche binaires équilibrés donnent une complexité optimale dans le pire des cas pour recherche binaire, des algorithmes ont été conçus pour rééquilibrer les arbres de recherche binaire ajoutée. Le lecteur intéressé peut consulter les références sur les structures de données pour la description de telles algorithmes.

T *U*

Sommets non étiquetés entourés

FIGURE 2 **Ajout de sommets sans étiquette pour rendre un arbre de recherche binaire plein.**

Arbres de décision

Les arbres enracinés peuvent être utilisés pour modéliser des problèmes dans lesquels une série de décisions mène à une solution. Par exemple, un arbre de recherche binaire peut être utilisé pour localiser des éléments sur la base d'une série de comparaisons, où chaque comparaison nous indique si nous avons localisé l'article, ou si nous devons aller droite ou gauche dans un sous-arbre. Un arbre enraciné dans lequel chaque sommet interne correspond à une décision, avec un sous-arbre à ces sommets pour chaque résultat possible de la décision, est appelé une**décision arbre** . Les solutions possibles du problème correspondent aux chemins vers les feuilles de cette racine arbre. L'exemple 3 illustre une application d'arbres de décision.

EXEMPLE 3 Supposons qu'il y ait sept pièces, toutes avec le même poids, et une pièce contrefaite qui pèse moins que les autres. Combien de pesées sont nécessaires à l'aide d'une balance pour déterminer laquelle des huit pièces est la contrefaçon? Donnez un algorithme pour trouver cette pièce contrefaite.

Solution: Il existe trois possibilités pour chaque pesée sur une balance. Les deux casseroles peuvent ont un poids égal, la première casserole peut être plus lourde, ou la deuxième casserole peut être plus lourdePar conséquent, l'arbre de décision pour la séquence de pesées est un arbre à 3 aires. Il y a au moins huit feuilles dans l'arbre de décision car il y a huit résultats possibles (car chacune des huit pièces peut être la pièce la plus légère contrefaite), et chaque résultat possible doit être représenté par au moins un feuille. Le plus grand nombre de pesées nécessaires pour déterminer la pièce contrefaite est la hauteur de l'arbre de décision. Du corollaire 1 de la section 11.1, il s'ensuit que la hauteur de l'arbre de décision est au moins $\lceil \log_3 8 \rceil = 2$. Par conséquent, au moins deux pesées sont nécessaires.

Il est possible de déterminer la pièce contrefaite à l'aide de deux pesées. L'arbre de décision illustre comment cela se fait est illustré à la figure 3. ▲

LA COMPLEXITÉ DE COMPARAISON À BASE DE TRIAGE ALGORITHMES Beaucoup différents algorithmes de tri ont été développés. Pour décider si un algorithme de tri particulier est efficace, sa complexité est déterminée. En utilisant des arbres de décision comme modèles, une borne inférieure la complexité la plus défavorable des algorithmes de tri basés sur des comparaisons binaires peut être trouvée.

Nous pouvons utiliser des arbres de décision pour modéliser des algorithmes de tri et pour déterminer une estimation de la pire complexité de ces algorithmes. Notez que compte tenu de n éléments, il y en a n ! possible l'ordre de ces éléments, car chacun des n ! permutations de ces éléments peuvent être bon ordre. Les algorithmes de tri étudiés dans ce livre et le tri le plus couramment utilisé algorithmes, sont basés sur des comparaisons binaires, c'est-à-dire la comparaison de deux éléments à la fois. Le résultat de chacune de ces comparaisons réduit l'ensemble des ordonnances possibles. Ainsi, un tri algorithme basé sur des comparaisons binaires peut être représenté par un arbre de décision binaire dans lequel chaque sommet interne représente une comparaison de deux éléments. Chaque feuille représente l'un des n ! permutations de n éléments.

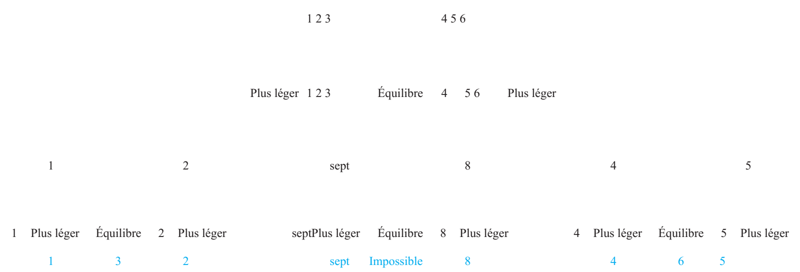


FIGURE 3 Un arbre de décision pour localiser une pièce contrefaite. La pièce contrefaite est représentée en couleur en dessous de chaque pesée finale.

EXEMPLE 4 Nous montrons sur la figure 4 un arbre de décision qui ordonne les éléments de la liste a , b , c . ▲

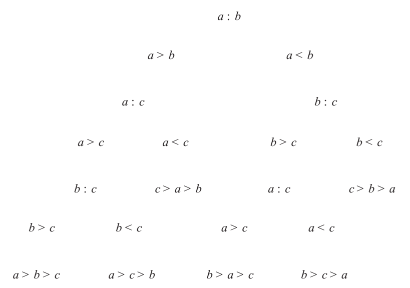


FIGURE 4 Un arbre de décision pour trier trois éléments distincts.

La complexité d'un tri basé sur des comparaisons binaires est mesurée en termes de nombre de ces comparaisons utilisées. Le plus grand nombre de comparaisons binaires jamais nécessaires pour trier une liste avec n éléments donne les performances les plus défavorables de l'algorithme. Le plus de comparaisons utilisées est égal à la plus longue longueur de chemin dans l'arbre de décision représentant la procédure de tri En d'autre mots, le plus grand nombre de comparaisons jamais nécessaires est égal à la hauteur de la décision arbre. Parce que la hauteur d'un arbre binaire avec n ! feuilles est au moins $\lceil \log n ! \rceil$ (en utilisant le corollaire 1 dans Section 11.1), au moins $\lceil \log n ! \rceil$ des comparaisons sont nécessaires, comme indiqué dans le théorème 1.

THÉORÈME 1 Un algorithme de tri basé sur des comparaisons binaires nécessite au moins $\lceil \log n ! \rceil$ comparaisons.

Nous pouvons utiliser le théorème 1 pour fournir une estimation en gros oméga du nombre de comparaisons utilisées par un algorithme de tri basé sur une comparaison binaire. Il suffit de noter que par l'exercice 72

Section 3.2 nous savons que ⌈log n ! ⌉ est *(n* log *n)* , l'une des fonctions de référence les plus utilisées pour la complexité de calcul des algorithmes. Le corollaire 1 est une conséquence de cette estimation.

COROLLARY 1 Le nombre de comparaisons utilisées par un algorithme de tri pour trier n éléments en fonction du binaire les comparaisons est *(n* log *n)* .

Une conséquence du corollaire 1 est qu'un algorithme de tri basé sur des comparaisons binaires qui utilise *(n* log *n) des* comparaisons, dans le pire des cas, pour trier n éléments est optimal, dans le sens où aucun autre algorithme de ce type n'a une meilleure complexité dans le pire des cas. Notez que par le théorème 1 dans la section 5.4 nous voyons que l'algorithme de tri par fusion est optimal dans ce sens.

Nous pouvons également établir un résultat similaire pour la complexité de cas moyen des algorithmes de tri. Le nombre moyen de comparaisons utilisées par un algorithme de tri basé sur des comparaisons binaires est la profondeur moyenne d'une feuille dans l'arbre de décision représentant l'algorithme de tri. Par l'exercice 48 dans la section 11.1, nous savons que la profondeur moyenne d'une feuille dans un arbre binaire avec N sommets est *(* log *N)* . On obtient l'estimation suivante quand on laisse $N = n$! et notez qu'une fonction is *(* log n ! *)* is also *(n* log *n)* because log n ! est *(n* log *n)* .

THÉORÈME 2 Nombre moyen de comparaisons utilisées par un algorithme de tri pour trier n éléments en fonction de les comparaisons binaires sont *(n* log *n)* .

Codes de préfixe

Considérez le problème de l'utilisation de chaînes de bits pour coder les lettres de l'alphabet anglais (où aucune distinction n'est faite entre les minuscules et les majuscules). Nous pouvons représenter chaque lettre avec une chaîne de bits de cinq, car il n'y a que 26 lettres et il y a 32 chaînes de bits de longueur cinq. Le nombre total de bits utilisés pour coder les données est cinq fois le nombre de caractères dans le texte lorsque chaque caractère est codé sur cinq bits. Est-il possible de trouver un schéma de codage de ces lettres de telle sorte que, lorsque les données sont codées, moins de bits sont utilisés? Nous pouvons économiser de la mémoire et réduire le temps de transmission si cela est possible.

Pensez à utiliser des chaînes de bits de différentes longueurs pour coder les lettres. Lettres qui se produisent plus fréquemment devraient être codés en utilisant des chaînes de bits courtes, et des chaînes de bits plus longues devraient être utilisées pour encoder des lettres rares. Lorsque les lettres sont codées en utilisant différents nombres de bits, certains doit être utilisée pour déterminer où les bits de chaque caractère commencent et se terminent. Par exemple, si e était codé avec 0, a avec 1 et t avec 01, alors la chaîne de bits 0101 pourrait correspondre à *manger, thé, eaea* ou *tt.*

Une façon de garantir qu'aucune chaîne de bits ne correspond à plus d'une séquence de lettres est pour coder des lettres afin que la chaîne de bits d'une lettre ne se produise jamais comme première partie de la chaîne de bits pour une autre lettre. Les codes avec cette propriété sont appelés **codes de préfixe** . Par exemple, l'encodage de e 0, a comme 10, et t comme 11 est un code de préfixe. Un mot peut être récupéré à partir du bit unique chaîne qui code ses lettres. Par exemple, la chaîne 10110 est le codage de *ate* . Pour voir ça, notez que le 1 initial ne représente pas un caractère, mais 10 représente *un* (et n'a pas pu être la première partie de la chaîne de bits d'une autre lettre). Ensuite, le 1 suivant ne représente pas un personnage, mais 11 représente t . Le dernier bit, 0, représente e .

0 1
e 0 1
une 0 1

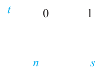


FIGURE 5 A Arbre binaire avec un Code de préfixe.

Un code préfixe peut être représenté à l'aide d'un arbre binaire, où les caractères sont les étiquettes de les feuilles de l'arbre. Les bords de l'arbre sont étiquetés de sorte qu'un bord menant à un enfant gauche soit affecté un 0 et un bord menant à un enfant droit est attribué un 1. La chaîne de bits utilisée pour coder un caractère est la séquence d'étiquettes des bords dans le chemin unique de la racine à la feuille qui a ce caractère comme étiquette. Par exemple, l'arbre de la figure 5 représente le codage de *e* de 0, *a* de 10, *t* de 110, *n* de 1110 et *s* de 1111.

L'arbre représentant un code peut être utilisé pour décoder une chaîne de bits. Par exemple, considérez le mot codé par 11111011100 en utilisant le code de la figure 5. Cette chaîne de bits peut être décodée par en commençant à la racine, en utilisant la séquence de bits pour former un chemin qui s'arrête quand une feuille est atteinte.

Chaque bit 0 prend le chemin vers le bord menant à l'enfant gauche du dernier sommet du chemin, et chaque 1 bit correspond à l'enfant droit de ce sommet. Par conséquent, le 1111 initial correspond au chemin commençant à la racine, allant quatre fois à droite, menant à une feuille dans le graphique qui a *s* comme son étiquette, car la chaîne 1111 est le code de *s* . En poursuivant avec le cinquième bit, nous atteignons un feuille suivante après être allé à droite puis à gauche, lorsque le sommet marqué d'*un* , qui est codé par 10, est a visité. En commençant par le septième bit, nous atteignons une feuille après avoir été à droite trois fois, puis à gauche, lorsque le sommet marqué de *n* , qui est codé par 1110, est visité. Enfin, le dernier bit, 0, conduit à la feuille qui est étiquetée avec *e* . Par conséquent, le mot d'origine est *sain d'esprit* .

Nous pouvons construire un code préfixe à partir de n'importe quel arbre binaire où le bord gauche à chaque interne le sommet est étiqueté par 0 et le bord droit par un 1 et où les feuilles sont étiquetées par des caractères. Les caractères sont codés avec la chaîne de bits construite à l'aide des étiquettes des bords dans l'unique chemin de la racine aux feuilles.

HUFFMAN CODING Nous introduisons maintenant un algorithme qui prend en entrée les fréquences (qui sont les probabilités d'occurrences) des symboles dans une chaîne et produit en sortie un code de préfixe qui code la chaîne en utilisant le moins de bits possible, parmi tous les binaires possibles codes de préfixe pour ces symboles. Cet algorithme, connu sous **le** nom de **codage Huffman** , a été développé par David Huffman dans un article à terme qu'il a écrit en 1951 alors qu'il était étudiant diplômé au MIT. (Notez que ce algorithme suppose que nous savons déjà combien de fois chaque symbole apparaît dans la chaîne, donc nous peut calculer la fréquence de chaque symbole en divisant le nombre de fois où ce symbole se produit par la longueur de la chaîne.) Le codage Huffman est un algorithme fondamental dans *la compression de données* , le sujet consacré à la réduction du nombre de bits requis pour représenter l'information. Huffman le codage est largement utilisé pour compresser les chaînes de bits représentant le texte et il joue également un rôle important rôle dans la compression des fichiers audio et image.

L'algorithme 2 présente l'algorithme de codage de Huffman. Étant donné les symboles et leurs fréquences, notre objectif est de construire un arbre binaire enraciné où les symboles sont les étiquettes des feuilles. Le l'algorithme commence par une forêt d'arbres consistant chacun en un sommet, où chaque sommet a un symbole comme son étiquette et où le poids de ce sommet est égal à la fréquence du symbole c'est son étiquette. À chaque étape, nous combinons deux arbres ayant le moins de poids total en un seul l'arbre en introduisant une nouvelle racine et en plaçant l'arbre avec un poids plus important comme sous-arbre gauche et arbre avec un poids plus petit que son sous-arbre droit. De plus, nous attribuons la somme des poids de les deux sous-arbres de cet arbre comme le poids total de l'arbre. (Bien que les procédures de rupture les liens en choisissant entre des arbres de poids égaux peuvent être spécifiés, nous ne ici.) L'algorithme est terminé lorsqu'il a construit un arbre, c'est-à-dire lorsque le la forêt est réduite à un seul arbre.

DAVID A. HUFFMAN (1925–1999) David Huffman a grandi en Ohio. À l'âge de 18 ans, il a reçu son BS en génie électrique de l'Ohio State University. Par la suite, il a servi dans l'US Navy comme radar officier de maintenance sur un destroyer qui avait pour mission de nettoyer les mines dans les eaux asiatiques après la Seconde Guerre mondiale. Plus tard, il a obtenu sa maîtrise de l'État de l'Ohio et son doctorat. en génie électrique du MIT. Huffman a rejoint la faculté du MIT en 1953, où il est resté jusqu'en 1967, date à laquelle il est devenu le membre fondateur de l'ordinateur département des sciences de l'Université de Californie à Santa Cruz. Il a joué un rôle important dans le développement de cette département et y a passé le reste de sa carrière, prenant sa retraite en 1994.

Huffman est connu pour ses contributions à la théorie et au codage de l'information, à la conception de signaux pour les pour les communications et les procédures de conception des circuits logiques asynchrones. Son travail sur des surfaces à zéro la courbure l'a amené à développer des techniques originales pour plier le papier et le vinyle dans des formes inhabituelles considérées comme des œuvres d'art par de nombreux et affiché publiquement dans plusieurs expositions. Cependant, Huffman est surtout connu pour son développement de ce qui est maintenant appelé Huffman codage, un résultat d'un article de terminologie qu'il a écrit au cours de ses études supérieures au MIT.

Huffman aimait explorer le plein air, faire de la randonnée et voyager beaucoup. Il a été certifié plongeur quand il était à la fin des années 60. Il a gardé des serpents venimeux comme animaux de compagnie.

ALGORITHME 2 Codage Huffman.

procédure *Huffman* (C : symboles a_i avec fréquences w_i , $i = 1, ..., n$)
F : = forêt de n arbres enracinés, chacun consistant en un seul sommet a_i et un poids assigné w_i
alors que F n'est pas un arbre
Remplacer les arbres enracinés T et T des poids les plus faibles de F par $w(T) \geq w(T)$ par un arbre ayant une nouvelle racine qui a T comme sous-arbre gauche et T comme sous-arbre droit. Étiqueter le nouveau bord à T avec 0 et le nouveau bord à T avec 1.
Attribuez $w(T) + w(T)$ comme poids du nouvel arbre.
{le Huffman codant pour le symbole a_i est la concaténation des étiquettes des bords dans le chemin unique de la racine au sommet a_i }

L'exemple 5 illustre comment l'algorithme 2 est utilisé pour coder un ensemble de cinq symboles.

EXEMPLE 5 Utilisez le codage Huffman pour coder les symboles suivants avec les fréquences listées: A: 0,08, B: 0,10, C: 0,12, D: 0,15, E: 0,20, F: 0,35. Quel est le nombre moyen de bits utilisés pour coder un personnage?

Solution: la figure 6 affiche les étapes utilisées pour coder ces symboles. L'encodage produit code A par 111, B par 110, C par 011, D par 010, E par 10 et F par 00. Le nombre moyen des bits utilisés pour coder un symbole en utilisant ce codage est

$$3 \cdot 0.08 + 3 \cdot 0.10 + 3 \cdot 0.12 + 3 \cdot 0.15 + 2 \cdot 0.20 + 2 \cdot 0.35 = 2.45.$$ ▲

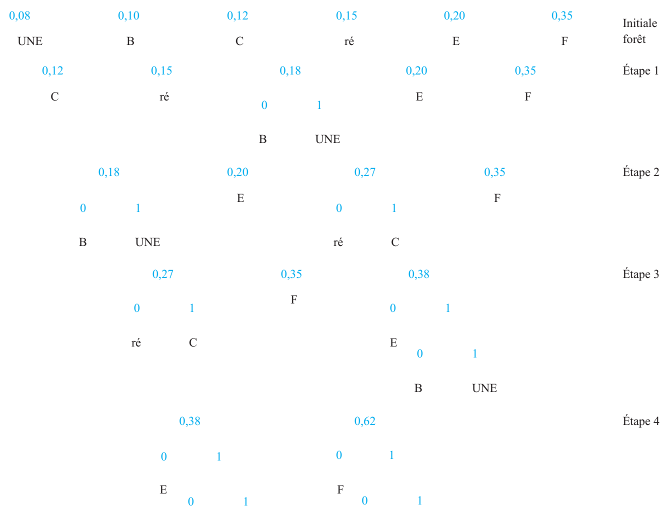
Notez que le codage Huffman est un algorithme gourmand. Remplacement des deux sous-arbres par le le plus petit poids à chaque étape conduit à un code optimal dans le sens où aucun code de préfixe binaire car ces symboles peuvent coder ces symboles en utilisant moins de bits. Nous laissons la preuve que Huffman les codes sont optimaux comme l'exercice 32.

Le codage Huffman est utilisé dans le codage d'image JPEG

Il existe de nombreuses variantes du codage Huffman. Par exemple, au lieu d'encoder un seul symboles, nous pouvons encoder des blocs de symboles d'une longueur spécifiée, tels que des blocs de deux symboles. Cela peut réduire le nombre de bits requis pour coder la chaîne (voir l'exercice 30). nous pouvons utilisez également plus de deux symboles pour coder les symboles originaux dans la chaîne (voir le préambule à l'exercice 28). De plus, une variation connue sous le nom de codage adaptatif de Huffman (voir [Sa00]) peut être utilisé lorsque la fréquence de chaque symbole dans une chaîne n'est pas connue à l'avance, de sorte que le codage se fait en même temps que la chaîne est lue.

Arbres à gibier

Les arbres peuvent être utilisés pour analyser certains types de jeux tels que le tic-tac-toe, le nim, les dames et les échecs. Dans chacun de ces jeux, deux joueurs se relaient à tour de rôle. Chaque joueur connaît les mouvements faite par l'autre joueur et aucun élément de chance n'entre dans le jeu. Nous modélisons de tels jeux à l'aide d' **arbres à gibier** ; les sommets de ces arbres représentent les positions dans lesquelles un jeu peut être progresse; les bords représentent des mouvements légaux entre ces positions. Parce que les arbres à gibier sont généralement grand, nous simplifions les arbres de jeu en représentant toutes les positions symétriques d'un jeu par le même sommet. Cependant, la même position d'un jeu peut être représentée par des sommets différents



B UNE ré C

1,00 Étape 5

0 1

0 1 0 1

F 0 1 E 0 1

ré C B UNE

FIGURE 6 Codage Huffman des symboles dans l'exemple 4.

si différentes séquences de mouvements conduisent à cette position. La racine représente la position de départ. La convention habituelle est de représenter les sommets aux niveaux pairs par des cases et les sommets aux niveaux impairs par cercles. Lorsque le jeu est dans une position représentée par un sommet à un niveau pair, c'est le premier mouvement du joueur; lorsque le jeu est dans une position représentée par un sommet à un niveau impair, c'est le coup du deuxième joueur. Les arbres de jeu peuvent être infinis lorsque les jeux qu'ils représentent ne finissent jamais, comme les jeux qui peuvent entrer dans des boucles infinies, mais pour la plupart des jeux, il existe des règles qui arbres à gibier.

Les feuilles d'un arbre de jeu représentent les positions finales d'un jeu.Nous attribuons une valeur à chacun feuille indiquant le gain au premier joueur si le jeu se termine dans la position représentée par cette feuille. Pour les jeux gagnant-perdant, nous étiquetons un sommet terminal représenté par un cercle avec un 1 pour indiquer une victoire par le premier joueur et nous étiquetons un sommet terminal représenté par une boîte avec un -1 pour indiquer une victoire du deuxième joueur. Pour les jeux où les tirages sont autorisés, nous étiquetons un sommet terminal correspondant à une position de tirage avec un 0. Notez que pour les parties gagnant-perdant, nous ont attribué des valeurs aux sommets terminaux de sorte que plus la valeur est élevée, meilleur est le résultat pour le premier joueur.

Dans l'exemple 6, nous affichons un arbre de jeu pour un jeu bien connu et bien étudié.

2 2 1

2 2 2 1 1 2 1

2 1 2 2 1 1 1 1 1 1 2 1 1 1

-1

2 1 1 1 1 2 1 1 1 1 1 1 1 1

+1 +1 +1 +1 +1 +1

Les sommets terminaux sont étiquetés

1 1 1 1 1 avec +1 si le premier joueur gagne

-1 -1 -1 -1 -1 et –1 si le deuxième joueur gagne

FIGURE 7 **L'arbre de jeu pour un jeu de Nim.**

EXEMPLE 6 **Nim** Dans une version du jeu de **nim** , au début d'un jeu, il y a un certain nombre de piles de des pierres. Deux joueurs se relaient pour faire des mouvements; une décision légale consiste à supprimer un ou plusieurs pierres de l'un des pieux, sans enlever toutes les pierres restantes. Un joueur sans mouvement légal perd. (Une autre façon de voir les choses est que le joueur qui retire la dernière pierre perd parce que le position sans tas de pierres n'est pas autorisée.) L'arbre de jeu illustré à la figure 7 représente ceci version de nim étant donné la position de départ où il y a trois tas de pierres en contenant deux, deux et une pierre chacun, respectivement. Nous représentons chaque poste avec une liste non ordonnée des nombre de pierres dans les différents tas (l'ordre des tas n'a pas d'importance). Le mouvement initial par le premier joueur peut conduire à trois positions possibles car ce joueur peut retirer une pierre à partir d'une pile avec deux pierres (laissant trois piles contenant une, une et deux pierres); deux pierres à partir d'un tas contenant deux pierres (laissant deux tas contenant deux pierres et une pierre); ou une pierre de la pile contenant une pierre (laissant deux piles de deux pierres). Quand un seul empiler avec une pierre est laissé, aucun mouvement légal n'est possible, donc ces positions sont des positions terminales. Parce que nim est un jeu gagnant-perdant, nous étiquetons les sommets terminaux avec +1 lorsqu'ils représentent gagne pour le premier joueur et -1 quand ils représentent des victoires pour le deuxième joueur. ▲

Bien que nim soit un jeu ancien, Charles Bouton a inventé son moderne nom en 1901 après une mot anglais archaïque ce qui signifie «voler».

EXEMPLE 7 **Tic-tac-toe** L'arbre de jeu pour tic-tac-toe est extrêmement grand et ne peut pas être dessiné ici, bien que un ordinateur pourrait facilement construire un tel arbre. Nous montrons une partie du jeu tic-tac-toe dans la figure 8 (a). Notez qu'en considérant des positions symétriques équivalentes, nous n'avons qu'à considérer trois possibles mouvements initiaux, comme le montre la figure 8 (a). Nous montrons également un sous-arbre de cet arbre de jeu menant à positions terminales sur la figure 8 (b), où un joueur qui peut gagner fait un geste gagnant. ▲

Nous pouvons définir récursivement les valeurs de tous les sommets dans une arborescence de jeu d'une manière qui permet nous pour déterminer le résultat de ce jeu lorsque les deux joueurs suivent des stratégies optimales. Par un **stratégie,** nous entendons un ensemble de règles qui indique au joueur comment sélectionner les coups pour gagner la partie. Un stratégie optimale pour le premier joueur est une stratégie qui maximise le gain pour ce joueur et pour le deuxième joueur est une stratégie qui minimise ce gain. Nous définissons maintenant récursivement la valeur d'un sommet.

(une)

b)

...

X X O
O
O X

X X

X

XX O
O

X X O
X O

XX O
O X

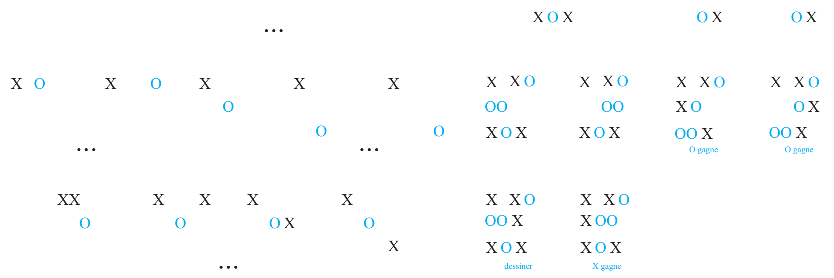


FIGURE 8 **Une partie de l'arbre de jeu pour Tic-Tac-Toe.**

DÉFINITION 1 La *valeur d'un sommet dans un arbre de jeu* est définie récursivement comme:

(*i*) la valeur d'une feuille est le gain pour le premier joueur lorsque le jeu se termine dans le position représentée par cette feuille.

(*ii*) la valeur d'un sommet interne à un niveau pair est le maximum des valeurs de son enfants, et la valeur d'un sommet interne à un niveau impair est le minimum de la valeurs de ses enfants.

La stratégie où le premier joueur se déplace vers une position représentée par un enfant avec un maximum valeur et le deuxième joueur se déplace vers une position d'un enfant avec une valeur minimale est appelée la **stratégie minmax** . Nous pouvons déterminer qui gagnera le match lorsque les deux joueurs suivront stratégie minmax en calculant la valeur de la racine de l'arbre;cette valeur est appelée la **valeur** de l'arbre. C'est une conséquence du théorème 3.

THÉORÈME 3 La valeur d'un sommet d'un arbre de jeu nous indique le gain pour le premier joueur si les deux joueurs suivent la stratégie et le jeu minmax commencent à partir de la position représentée par ce sommet.

Preuve: Nous utiliserons l'induction pour prouver ce théorème.

ÉTAPE DE BASE: Si le sommet est une feuille, par définition, la valeur attribuée à ce sommet est le gain au premier joueur.

Épisode 390

+1 2 2 1 max

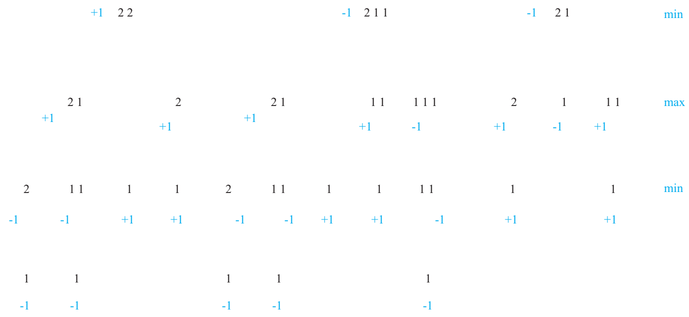


FIGURE 9 **Affichage des valeurs des sommets dans le jeu de Nim.**

ÉTAPE INDUCTIVE: L'hypothèse inductive est l'hypothèse que les valeurs des enfants d'un sommet sont les gains du premier joueur, en supposant que le jeu commence à chacune des positions représentés par ces sommets. Nous devons considérer deux cas, quand c'est le tour du premier joueur et quand c'est le tour du deuxième joueur.

Quand c'est le tour du premier joueur, ce joueur suit la stratégie minmax et se déplace vers le position représentée par l'enfant avec la plus grande valeur. Par l'hypothèse inductive, cette valeur est le gain pour le premier joueur lorsque le jeu commence à la position représentée par cet enfant et suit la stratégie minmax. Par l'étape récursive de la définition de la valeur d'un sommet à un niveau pair (comme la valeur maximale de ses enfants), la valeur de ce sommet est le gain lorsque le jeu commence à la position représentée par ce sommet.

Quand c'est le tour du deuxième joueur, ce joueur suit la stratégie minmax et se déplace vers la position représentée par l'enfant avec la plus petite valeur. Par l'hypothèse inductive, cette valeur est le gain pour le premier joueur lorsque le jeu commence à la position représentée par cet enfant et les deux joueurs suivent la stratégie minmax. Par la définition récursive de la valeur d'un sommet à un niveau impair comme la valeur minimale de ses enfants, la valeur de ce sommet est le gain lorsque le jeu commence à la position représentée par ce sommet.

Remarque: En étendant la preuve du Théorème 3, on peut montrer que la stratégie minmax est la stratégie optimale pour les deux joueurs.

L'exemple 8 illustre le fonctionnement de la procédure minmax. Il affiche les valeurs affectées à les sommets internes dans l'arbre de jeu de l'exemple 6. Notez que nous pouvons raccourcir le calcul requis en notant que pour les parties gagnant-perdant, une fois un enfant d'un sommet carré de valeur +1 est trouvée, la valeur du sommet carré est également +1 car +1 est le plus grand gain possible. De même, une fois qu'un enfant d'un sommet de cercle de valeur -1 est trouvé, c'est la valeur du cercle sommet aussi.

EXEMPLE 8 Dans l'exemple 6, nous avons construit l'arbre de jeu pour nim avec une position de départ où il y a trois piles contenant deux, deux et une pierre. Dans la figure 9, nous montrons les valeurs des sommets de cet arbre de jeu. Les valeurs des sommets sont calculées en utilisant les valeurs des feuilles et travailler un niveau à la fois. Dans la marge de droite de cette figure, nous indiquons si nous utilisons le maximum ou le minimum des valeurs des enfants pour trouver la valeur d'un sommet interne à chaque niveau. Par exemple, une fois que nous avons trouvé les valeurs des trois enfants de la racine, qui sont 1, -1 et -1, nous trouvons la valeur de la racine en calculant max$(1, -1, -1) = 1$. Parce que la valeur de la racine est 1, il s'ensuit que le premier joueur gagne lorsque les deux joueurs suivent un minmax stratégie. ▲

Programmes d'échecs sur les smartphones peuvent désormais jouer au niveau du grand maître.

Les arbres de jeu de certains jeux bien connus peuvent être extrêmement volumineux, car ces jeux ont de nombreux mouvements différents possibles. Par exemple, l'arbre de jeu pour les échecs a été estimé à avoir jusqu'à 10^{100} sommets! Il peut être impossible d'utiliser directement le théorème 3 pour étudier un jeu en raison de la taille de l'arbre de jeu.Par conséquent, diverses approches ont été conçues pour aider déterminer de bonnes stratégies et déterminer l'issue de tels jeux.Une technique utile, appelé *élagage alpha-bêta* , élimine beaucoup de calculs en élaguant des parties de l'arbre de jeu qui ne peut pas affecter les valeurs des sommets des ancêtres.(Pour plus d'informations sur l'élagage alpha-bêta, consulter [Gr90].) Une autre approche utile consiste à utiliser des *fonctions d'évaluation* , qui estiment la valeur des sommets internes dans l'arborescence du jeu lorsqu'il n'est pas possible de calculer exactement ces valeurs.Pour Par exemple, dans le jeu du tic-tac-toe, comme fonction d'évaluation d'une position, nous pouvons utiliser le nombre de fichiers (lignes, colonnes et diagonales) ne contenant pas d'Os (utilisé pour indiquer les mouvements du deuxième joueur) moins le nombre de fichiers ne contenant pas de X (utilisé pour indiquer les mouvements du premier joueur). Cette fonction d'évaluation fournit une indication du joueur qui a l'avantage le jeu. Une fois les valeurs d'une fonction d'évaluation insérées, la valeur du jeu peut être calculé selon les règles utilisées pour la stratégie minmax.Programmes informatiques créés pour jouer Les échecs, comme le célèbre programme Deep Blue, sont basés sur des fonctions d'évaluation sophistiquées. Pour plus d'informations sur la façon dont les ordinateurs jouent aux échecs, voir [Le91].

Des exercices

1. Construisez un arbre de recherche binaire pour les mots *banane, pêche, pomme, poire, noix de coco, mangue* et *papaye en* utilisant l'alphabet ordre ical.

2. Construisez un arbre de recherche binaire pour les mots *œnologie, phrénologie, campanologie, ornithologie, ichtyologie* , *limnologie, alchimie* et *astrologie* par ordre alphabétique.

3. Combien de comparaisons sont nécessaires pour localiser ou ajouter chacun de ces mots dans l'arbre de recherche de l'exercice 1, frais à chaque fois?

a) *poire* **b)** *banane*
c) *kumquat* **d)** *orange*

4. Combien de comparaisons sont nécessaires pour localiser ou ajouter chacun des mots de l'arborescence de recherche de l'exercice 2, frais à chaque fois?

a) *chiromancie* **b)** *étymologie*
c) *paléontologie* **d)** *glaciologie*

5. En utilisant l'ordre alphabétique, construisez un arbre de recherche binaire pour les mots de la phrase « *Le renard brun rapide saute sur le chien paresseux.* "

6. Combien de pesées d'une balance sont nécessaires pour trouver une contrefaçon plus légère parmi quatre pièces? Décrivez un algorithme pour trouver la pièce la plus légère en utilisant ce nombre de pesées.

7. Combien de pesées d'une balance sont nécessaires pour trouver une pièce contrefaite parmi quatre pièces si la contrefeit coin peut être plus lourd ou plus léger que les autres? Décrire un algorithme pour trouver la pièce contrefaite à l'aide ce nombre de pesées.

∗ **8.** Combien de pesées d'une balance sont nécessaires pour trouver une pièce contrefaite parmi huit pièces si le pays la pièce de monnaie est-elle plus lourde ou plus légère que les autres? Décrire un algorithme pour trouver la pièce contrefaite à l'aide ce nombre de pesées.

∗ **9.** Combien de pesées d'une balance sont nécessaires pour trouver une pièce contrefaite parmi 12 pièces si la contrefaçon pièce est plus légère que les autres? Décrire un algorithme pour trouver la pièce la plus légère en utilisant ce nombre de pesées.

∗ **10.** Une des quatre pièces peut être contrefaite. S'il s'agit d'une contrefaçon, il peut être plus léger ou plus lourd que les autres. Combien des pesées sont nécessaires, à l'aide d'une balance, pour déterminer s'il y a une pièce contrefaite, et s'il y en a, si il est plus léger ou plus lourd que les autres? Décrivez un algorithm pour trouver la pièce contrefaite et déterminer si il est plus léger ou plus lourd en utilisant ce nombre de pesées.

11. Trouvez le moins de comparaisons nécessaires pour trier quatre éléments et concevoir un algorithme qui trie ces éléments en utilisant ce nombre de comparaisons.

∗ **12.** Trouvez le moins de comparaisons nécessaires pour trier cinq éléments et concevoir un algorithme qui trie ces éléments en utilisant ce nombre de comparaisons.

Le **tri par tournoi** est un algorithme de tri qui fonctionne par la construction d'un arbre binaire ordonné. Nous représentons les éléments être triés par sommets qui deviendront les feuilles. Nous construisons l'arbre un niveau à la fois, comme nous construirions l'arbre envoyer les gagnants des matchs d'un tournoi. Travailler à gauche à droite, nous comparons des paires d'éléments consécutifs, en ajoutant un sommet parent étiqueté avec le plus grand des deux éléments sous Comparaison. Nous faisons des comparaisons similaires entre les étiquettes de sommets à chaque niveau jusqu'à ce que nous atteignions la racine de l'arbre qui est étiqueté avec le plus grand élément. L'arbre construit par le tournoi de type 22, 8, 14, 17, 3, 9, 27, 11 est illustré dans partie (a) de la figure. Une fois que le plus grand élément a été terminées, la feuille portant cette étiquette est renommée par $-\infty$, ce qui est défini comme étant inférieur à chaque élément. Les étiquettes de tous les sur le chemin de ce sommet à la racine de l'arbre sont recalculé, comme indiqué dans la partie (b) de la figure. Cela produit le deuxième plus grand élément. Ce processus se poursuit jusqu'au la liste entière a été triée.

13. Complétez le type de tournoi de la liste 22, 8, 14, 17, 3, 9, 27, 11. Affichez les étiquettes des sommets à chaque étape.

14. Utilisez le tri par tournoi pour trier la liste 17, 4, 1, 5, 13, 10, 14, 6.

15. Décrivez le tri du tournoi en utilisant le pseudocode.

16. En supposant que n , le nombre d'éléments à trier, est égal à 2^k pour un entier positif k , déterminer le nombre nombre de comparaisons utilisées par le type de tournoi pour trouver le plus grand élément de la liste utilisant le tri par tournoi.

17. Combien de comparaisons le tournoi utilise-t-il pour trouver le deuxième plus grand, le troisième plus grand, et ainsi de suite, jusqu'à le *(n* - 1 *)* st plus grand (ou deuxième plus petit) élément?

18. Montrer que le tournoi a besoin de tri *(n* log *n)* comparisons pour trier une liste de n éléments. [*Astuce:* en insérant le nombre approprié d'éléments fictifs définis pour être plus petit que tous les entiers, tels que $-\infty$, supposons que $n = 2^k$ pour un entier positif k .]

19. Lequel de ces codes est un préfixe?

a) a : 11, e : 00, t : 10, s : 01

b) a : 0, e : 1, t : 01, s : 001

c) a : 101, e : 11, t : 001, s : 011, n : 010

d) a : 010, e : 11, t : 011, s : 1011, n : 1001, i : 10101

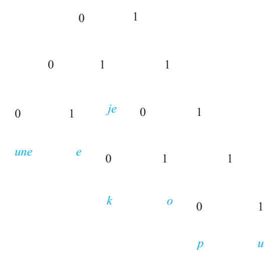
20. Construire l'arbre binaire avec des codes de préfixe représentant ces schémas de codage.

a) a : 11, e : 0, t : 101, s : 100

b) a : 1, e : 01, t : 001, s : 0001, n : 00001

c) a : 1010, e : 0, t : 11, s : 1011, n : 1001, i : 10001

21. Quels sont les codes pour *a, e, i, k, o, p* et u si le codage schéma est représenté par cet arbre?



22. Compte tenu du schéma de codage a : 001, b : 0001, e : 1, r : 0000, s : 0100, t : 011, x : 01010, recherchez le mot représenté par

a) 01110100011. **b)** 0001110000.

c) 0100101010. **d)** 01100101010.

23. Utilisez le codage Huffman pour coder ces symboles avec fréquences: a : 0,20, b : 0,10, c : 0,15, d : 0,25, e : 0,30. Quel est le nombre moyen de bits requis pour coder un personnage?

24. Utilisez le codage Huffman pour coder ces symboles avec fréquences: A: 0,10, B: 0,25, C: 0,05, D: 0,15, E: 0,30, F: 0,07, G: 0,08. Quel est le nombre moyen de bits requis pour coder un symbole?

25. Construisez deux codes Huffman différents pour ces symboles et fréquences: t : 0,2, u : 0,3, v : 0,2, w : 0,3.

26. a) Utilisez le codage Huffman pour coder ces symboles avec fréquences a : 0,4, b : 0,2, c : 0,2, d : 0,1, e : 0,1 en deux différentes manières en brisant les liens dans l'algorithme avec férocité. Premièrement, parmi les arbres de poids minimum sélectionner deux arbres avec le plus grand nombre de sommets à combiner à chaque étape de l'algorithme. Seconde, parmi les arbres de poids minimum, sélectionnez deux arbres avec le plus petit nombre de sommets à chaque étape.

b) Calculez le nombre moyen de bits requis pour coder un symbole avec chaque code et calculer la variance ances de ce nombre de bits pour chaque code. Lequel la procédure de bris d'égalité a produit la plus petite variance dans le nombre de bits requis pour coder un symbole?

27. Construisez un code Huffman pour les lettres de l'alphabet anglais phabet où les fréquences des lettres en anglais typique le texte est comme indiqué dans ce tableau.

Fréquence des lettres		*Fréquence des lettres*	
UNE	0,0817	N	0,0662
B	0,0145	O	0,0781
C	0,0248	P	0,0156
ré	0,0431	Q	0,0009
E	0,1232	R	0,0572
F	0,0209	S	0,0628
g	0,0182	T	0,0905
H	0,0668	U	0,0304
je	0,0689	V	0,0102
J	0,0010	W	0,0264
K	0,0080	X	0,0015
L	0,0397	Oui	0,0211
M	0,0277	Z	0,0005

Supposons que m est un entier positif avec $m \geq 2$. Un m -ary Le code Huffman pour un ensemble de N symboles peut être construit ogieusement à la construction d'un code binaire Huffman. Au étape initiale, $((N - 1) \textbf{ mod } (m - 1)) + 1$ arbres composé d'un sommet unique avec le moins de poids sont combinés en un enraciné arbre avec ces sommets comme feuilles. À chaque étape suivante, les m arbres de moindre poids sont combinés en un arbre m -ary.

28. Décrire l' algorithme de codage m -ary Huffman dans pseudocode.

29. En utilisant les symboles 0, 1 et 2, utilisez ternaire $(m = 3)$ Codage de Huffman pour coder ces lettres avec le donné fréquences: A: 0,25, E: 0,30, N: 0,10, R: 0,05, T: 0,12, Z: 0,18.

30. Considérez les trois symboles A, B et C avec des fréquences A: 0,80, B: 0,19, C: 0,01.

a) Construisez un code Huffman pour ces trois symboles.

b) Formez un nouvel ensemble de neuf symboles en les regroupant blocs de deux symboles, AA, AB, AC, BA, BB, BC, CA, CB et CC. Construire un code Huffman pour ces neuf symboles, en supposant que les occurrences de symboles bols du texte d'origine sont indépendants.

c) Comparez le nombre moyen de bits requis pour texte de code en utilisant le code Huffman pour les trois symboles bols dans la partie (a) et le code Huffman pour les neuf blocs de deux symboles construits dans la partie (b). Lequel est plus efficace?

31. Étant donné $n + 1$ symboles $x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}$ apparaissant 1, $f_1, f_2, ..., f_n$ fois dans une chaîne de symboles, respectivement, où f_j est le j ème nombre de Fibonacci, quelle est la nombre minimal de bits utilisés pour coder un symbole lorsque tous les sélections possibles pour briser l'égalité sont examinées à chaque étape de l'algorithme de codage Huffman?

∗ 32. Montrer que les codes Huffman sont optimaux dans le sens où ils représentent une chaîne de symboles utilisant le moins de bits parmi tous les codes préfixes binaires.

33. Dessinez un arbre de jeu pour nim si la position de départ consiste de deux piles avec deux et trois pierres, respectivement. Quand le dessin de l'arbre représente par le même sommet symétrique positions qui résultent du même mouvement. Trouvez la valeur de chaque sommet de l'arbre de jeu. Qui gagne le match si les deux joueurs suivent une stratégie optimale?

34. Dessinez un arbre de jeu pour nim si la position de départ consiste de trois piles avec une, deux et trois pierres, respectivement. Lors du dessin, l'arbre est représenté par le même symétriques positions métriques résultant du même mouvement. Trouvez le valeur de chaque sommet de l'arbre de jeu. Qui gagne le match si les deux joueurs suivent une stratégie optimale?

35. Supposons que nous modifions le gain au joueur gagnant dans le jeu de nim de sorte que le gain est de n dollars lorsque n est le nombre de déplacements légaux effectués avant un terminal la position est atteinte. Trouvez le gain pour le premier joueur si la position initiale consiste en

a) deux piles avec respectivement une et trois pierres.

b) deux piles avec deux et quatre pierres, respectivement.

c) trois piles avec une, deux et trois pierres, respectivement.

36. Supposons que dans une variante du jeu de nim nous autorisons un joueur pour retirer une ou plusieurs pierres d'une pile ou fusionner les pierres de deux piles en une seule pile aussi longtemps qu'au il reste au moins une pierre. Dessinez l'arbre de jeu pour cette ation de nim si la position de départ se compose de trois pieux contenant respectivement deux, deux et une pierre. Trouvez le les valeurs de chaque sommet dans l'arbre de jeu et déterminer la gagnant si les deux joueurs suivent une stratégie optimale.

37. Dessinez le sous-arbre de l'arbre de jeu pour commencer tic-tac-toe-à chacun de ces postes. Déterminez la valeur de chacun de ces sous-arbres.

une) O X X
X OO
X

b) X O X
O X X
O

c) X O
OO
X X

ré) O X
X O
X O

38. Supposons que les quatre premiers mouvements d'un jeu tic-tac-toe soient comme montré. Le premier joueur (dont les coups sont marqués par Xs) ont une stratégie qui gagnera toujours?

une) X O X
O

b) X O X
O

c) O X
X
O

ré) X
X O
O

39. Montrez que si un jeu de nim commence par deux piles contenant avec le même nombre de pierres, tant que ce nombre est au moins deux, puis le deuxième joueur gagne lorsque les deux joueurs suivre des stratégies optimales.

40. Montrez que si un jeu de nim commence par deux piles, contenant différents nombres de pierres, le premier joueur gagne lorsque les deux joueurs suivent des stratégies optimales.

41. Pour combien d'enfants la racine de l'arbre à gibier les dames ont? Combien de petits-enfants a-t-il?

42. Pour combien d'enfants la racine de l'arbre à gibier nim ont et combien de petits-enfants at-il si le la position de départ est

a) des piles de quatre et cinq pierres, respectivement.

b) des piles de deux, trois et quatre pierres, respectivement.

c) des pieux à une, deux, trois et quatre pierres, respectivement activement.

d) des piles de deux, deux, trois, trois et cinq pierres, spectralement.

43. Dessinez l'arbre de jeu pour le jeu de tic-tac-toe pour le els correspondant aux deux premiers mouvements. Attribuer la valeur de la fonction d'évaluation mentionnée dans le texte qui signe à une position le nombre de fichiers ne contenant pas d'Os moins le nombre de fichiers ne contenant pas de X comme valeur de chaque sommet à ce niveau et calculer la valeur de l'arbre pour les sommets comme si la fonction d'évaluation donnait la bonne valeurs pour ces sommets.

44. Utilisez un pseudocode pour décrire un algorithme de valeur d'un arbre de jeu lorsque les deux joueurs suivent un stratégie minmax.

Traversée des arbres

introduction

Les arbres enracinés ordonnés sont souvent utilisés pour stocker des informations. Nous avons besoin de procédures pour visiter chacun sommet d'un arbre enraciné ordonné pour accéder aux données. Nous décrirons plusieurs algorithmes importants pour visiter tous les sommets d'un arbre enraciné ordonné. Les arbres enracinés ordonnés peuvent également être utilisés pour représenter différents types d'expressions, telles que des expressions arithmétiques impliquant des nombres, variables et opérations. Les différentes listes des sommets des arbres enracinés ordonnés utilisés pour Les expressions de représentation sont utiles dans l'évaluation de ces expressions.

Systèmes d'adresses universels

Les procédures pour parcourir tous les sommets d'un arbre enraciné ordonné reposent sur les ordres des enfants. Dans les arbres enracinés ordonnés, les enfants d'un sommet interne sont représentés de gauche à droite dans le dessins représentant ces graphiques dirigés.

Nous décrirons une façon dont nous pouvons totalement ordonner les sommets d'un arbre enraciné ordonné. À produire cet ordre, nous devons d'abord étiqueter tous les sommets. Nous le faisons récursivement:

1. Etiquetez la racine avec l'entier 0. Etiquetez ensuite ses k enfants (au niveau 1) de gauche à droite avec $1, 2, 3, ..., k$.
2. Pour chaque sommet v au niveau n avec l'étiquette A, étiquetez ses k_v enfants, tels qu'ils sont dessinés à partir de la gauche à droite, avec $A.1, A.2, \ldots, Ak_c$.

À la suite de cette procédure, un sommet v au niveau n, pour $n \geq 1$, est appelé $x_1.x_2.....x_n$, où le chemin unique de la racine à v passant par le x_1 er sommet au niveau 1, le x_2 e sommet au niveau 2, etc. Cet étiquetage est appelé le **système d'adresse universel** de l'arbre enraciné ordonné.

Nous pouvons totalement ordonner les sommets en utilisant l'ordre lexicographique de leurs étiquettes dans système d'adresse sal. Le sommet étiqueté $x_1.x_2.....x_n$ est inférieur au sommet étiqueté $y_1.y_2.....y_m$ s'il y a un i, $0 \leq i \leq n$, avec $x_1 = y_1, x_2 = y_2, ..., x_{i-1} = y_{i-1}$, et $x_i < y_i$; ou si $n < m$ et $x_i = y_i$ pour $i = 1, 2, ..., n$.

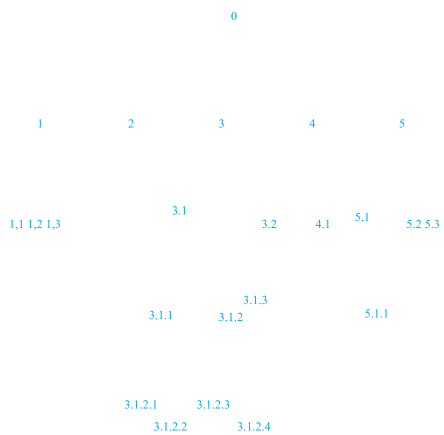


FIGURE 1 **Le système d'adresse universel d'un arbre enraciné ordonné.**

EXEMPLE 1 Nous affichons les étiquetages du système d'adresse universel à côté des sommets dans la racine ordonnée arbre illustré à la figure 1. L'ordre lexicographique des étiquettes est

$$0 < 1 < 1.1 < 1.2 < 1.3 < 2 < 3 < 3.1 < 3.1.1 < 3.1.2 < 3.1.2.1 < 3.1.2.2 < 3.1.2.3 < 3.1.2.4 < 3.1.3 < 3.2 < 4 < 4.1 < 5 < 5.1 < 5.1.1 < 5.2 < 5.3$$ ▲

Algorithmes de traversée

Les procédures pour visiter systématiquement chaque sommet d'un arbre enraciné ordonné sont appelées **traversal algorithmes** . Nous allons décrire trois des plus couramment utilisés tels algorithmes, **pré - commande traversée** , **traversée** en ordre et **traversée post-ordre** . Chacun de ces algorithmes peut être défini récursivement. Nous définissons d'abord la traversée de précommande.

DÉFINITION 1 Soit T un arbre enraciné ordonné avec racine r . Si T n'est composé que de r , alors r est la *précommande Traversal* de T . Sinon, supposons que $T_1, T_2, ..., T_n$ sont les sous-arbres à r de gauche à droite dans T . La *traversée en précommande* commence par la visite de r . Il continue en parcourant T_1 en précommande, puis T_2 en précommande, et ainsi de suite, jusqu'à ce que T_n soit parcouru en précommande.

Le lecteur doit vérifier que la traversée en précommande d'un arbre enraciné ordonné donne la même classement des sommets comme le classement obtenu à l'aide d'un système d'adresse universel.Figure 2 indique comment un parcours de précommande est effectué.

L'exemple 2 illustre la traversée de précommande.

EXEMPLE 2 Dans quel ordre une traversée de précommande visite-t-elle les sommets de l'arbre enraciné ordonné T montré dans Figure 3?

Solution: Les étapes de la traversée en précommande de T sont illustrées à la figure 4. Nous parcourons T en précommander en listant d'abord la racine a , suivi de la liste de précommande du sous-arbre avec la racine b , le liste de précommande du sous-arbre avec racine c (qui est juste c) et la liste de précommande du sous-arbre avec racine d .

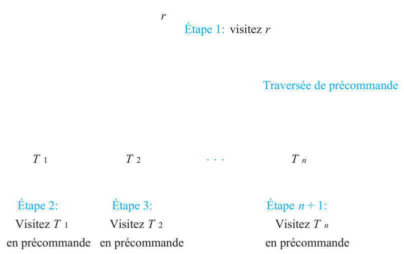


FIGURE 2 **Pré-commande Traversal.**

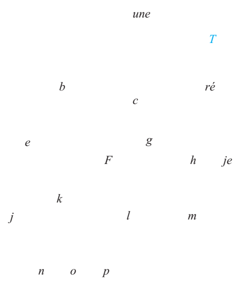


FIGURE 3 **Le Commandé Enracinée Arbre *T* .**

FIGURE 4 **La Preorder Traversal de *T* .**

r
Étape 2: visitez r

Traversée dans l'ordre

T_1 T_2 ... T_n

Étape 1: Visitez T_1 en en ordre

Étape 3: Visitez T_2 en en ordre

Étape $n+1$: Visitez T_n en en ordre

FIGURE 5 Traversée dans l'ordre.

La liste de précommande du sous-arbre avec la racine b commence par lister b , puis les sommets du sous-arbre avec racine e en précommande, puis le sous-arbre avec racine f en précommande (qui est juste f). La liste de précommande du sous-arbre avec la racine d commence par la liste d , suivie de la liste de précommande de le sous-arbre avec la racine g , suivi du sous-arbre avec la racine h (qui est juste h), suivi du sous-arbre avec racine i (qui est juste i).

La liste de précommande du sous-arbre avec la racine e commence par la liste e , suivie de la précommande liste du sous-arbre avec la racine j (qui est juste j), suivie de la liste de précommande du sous-arbre avec la racine k . La liste de précommande du sous-arbre avec la racine g est g suivi de l , suivi de m . La liste de précommande du sous-arbre avec la racine k est k , n , o , p . Par conséquent, la traversée en précommande de T est a , b , e , j , k , n , o , p , f , c , d , g , l , m , h , i . ▲

Nous allons maintenant définir la traversée inverse.

DÉFINITION 2 Soit T un arbre enraciné ordonné avec racine r . Si T *se* compose uniquement de r , alors r est l' *inordre Traversal* de T . Sinon, supposons que T_1 , T_2 , ..., T_n sont les sous-arbres à r de gauche à droite. La *traversée dans l'ordre* commence par la traversée de T_1 dans l'ordre, puis visite r . Il se poursuit par traversant T_2 dans l'ordre, puis T_3 dans l'ordre, ..., et enfin T_n dans l'ordre.

La figure 5 indique comment la traversée dans l'ordre est effectuée.L'exemple 3 montre comment la traversée est effectuée pour un arbre particulier.

EXEMPLE 3 Dans quel ordre une traversée inordonnée visite-t-elle les sommets de l'arbre enraciné ordonné T sur la figure 3?

Solution: Les étapes de la traversée inordonnée de l'arbre enraciné ordonné T sont illustrées à la figure 6. La traversée dans l'ordre commence par une traversée dans l'ordre du sous-arbre avec la racine b , la racine a , la liste inorder du sous-arbre avec la racine c , qui est juste c , et liste inorder du sous-arbre avec racine d .

La liste inorder du sous-arbre avec la racine b commence par la liste inorder du sous-arbre avec la racine e , la racine b et f . La liste inorder du sous-arbre avec la racine d commence par le liste inorder du sous-arbre avec la racine g , suivi de la racine d , suivi de h , suivi de i .

La liste inorder du sous-arbre avec la racine e est j , suivie de la racine e , suivie de la liste inorder du sous-arbre avec la racine k . La liste inorder du sous-arbre avec la racine g est l , g , m . La liste inorder du sous-arbre avec la racine k est n , k , o , p . Par conséquent, la liste des l'arbre enraciné ordonné est j , e , n , k , o , p , b , f , a , c , l , g , m , d , h , i .

▲

Épisode 398

FIGURE 6 **La Inorder Traversal de *T* .**

Nous définissons maintenant la traversée post-commande.

DÉFINITION 3 Soit T un arbre enraciné ordonné avec racine r . Si T n'est composé que de r , alors r est le *post-ordre Traversal* de T . Sinon, supposons que T_1 , T_2 , ..., T_n sont les sous-arbres à r de gauche à droite. La *traversée post-commande* commence par la traversée de T_1 en post-commande, puis de T_2 en post-commande , ..., puis T_n en post-commande, et finit par visiter r .

La figure 7 illustre comment la traversée post-commande est effectuée.L'exemple 4 illustre comment la post-commande travaux de traversée.

r Étape n + 1: visitez r

Traversée post-commande

T_1 T_2 • • • T_n

Étape 1: Visitez T_1 en post-commande

Étape 2: Visitez T_2 en post-commande

Étape n : Visitez T_n en post-commande

FIGURE 7 Traversée post-commande.

EXEMPLE 4 Dans quel ordre un parcours post-ordre visite-t-il les sommets de l'arbre enraciné ordonné T montré dans la figure 3?

Solution: Les étapes de la traversée post-commande de l'arbre enraciné ordonné T sont illustrées à la figure 8. La traversée de post-ordre commence par la traversée de post-ordre du sous-arbre avec la racine b , le post-ordre traversée du sous-arbre avec la racine c , qui est juste c , la traversée post-ordre du sous-arbre avec racine d , suivie de la racine a .

La traversée en post-ordre du sous-arbre avec la racine b commence par la traversée en post-ordre de la sous-arbre avec la racine e , suivi de f , suivi de la racine b . La traversée post-ordre de l'enracinement l'arbre avec la racine d commence par la traversée post-commande du sous-arbre avec la racine g , suivi de h , suivi de i , suivi de la racine d .

La traversée en post-ordre du sous-arbre avec la racine e commence par j , suivi du post-ordre traversée du sous-arbre avec la racine k , suivie de la racine e . La traversée post-commande du sous-arbre avec la racine g est l , m , g . La traversée post-ordre du sous-arbre avec la racine k est n , o , p , k . Donc, la traversée post-ordre de T est j , n , o , p , k , e , f , b , c , l , m , g , h , i , d , a . ▲

Il existe des moyens simples de répertorier les sommets d'un arbre enraciné ordonné en précommande, en ordre et post-commande. Pour ce faire, dessinez d'abord une courbe autour de l'arbre enraciné ordonné en commençant à la racine, en vous déplaçant le long des bords, comme le montre l'exemple de la figure 9. Nous pouvons lister les sommets en précommande par

listant chaque sommet la première fois que cette courbe passe. Nous pouvons lister les sommets dans l'ordre en listant
une feuille la première fois que la courbe la passe et listant chaque sommet interne la deuxième fois que la courbe
passe. On peut lister les sommets en post-ordre en listant un sommet la dernière fois qu'il est passé sur le
retour à son parent. Lorsque cela est fait dans l'arbre enraciné de la figure 9, il s'ensuit que le
la traversée en précommande donne *a* , *b* , *d* , *h* , *e* , *i* , *j* , *c* , *f* , *g* , *k* , la traversée en ordre donne *h* , *d* , *b* , *i* , *e* , *j* , *a* , *f* , *c* , *k* , *g* ; et la traversée post-ordre donne *h* , *d* , *i* , *j* , *e* , *b* , *f* , *k* , *g* , *c* , *a* .

Les algorithmes pour parcourir les arbres enracinés ordonnés en précommande, en ordre ou en post-commande sont les plus s'exprime facilement de manière récursive.

ALGORITHM 1 Preorder Traversal.

précommande de **procédure** (*T* : arbre enraciné ordonné)
r : = racine de *T*
liste *r*
pour chaque enfant *c* de *r* de gauche à droite
    T (c) : = sous-arbre avec *c* comme racine
    précommande (T (c))

Page 400

T *une*

b *ré*
c
g
e
F *h* *je*

Traversée post-commande: Visite
sous-arbres de gauche à droite; visiter root

k
j *l* *m*

n *o* *p*

b *c* *ré* *une*

e *g*
F *h* *je*

k
j *l* *m*

n *o* *p*

e *F* *b* *c* *g* *h* *je* *ré* *une*

k
j *l* *m*

n o p

j k e F b c l m g h je ré une

n o p

j n o p k e F b c l m g h je ré une

FIGURE 8 **La Postorder Traversal de *T* .**

une

b c

F

ré e g

h je j k

FIGURE 9 **Un raccourci pour parcourir une commande**
Arbre enraciné en précommande, en ordre et post-commande.

Épisode 401

ALGORITHME 2 Inorder Traversal.

inorder de **procédure** (*T* : arbre enraciné ordonné)
r : = racine de *T*
si *r* est une feuille **puis** la liste *r*
autre
  l : = premier enfant de *r* de gauche à droite
  T (l) : = sous-arbre avec *l* comme racine
  inorder (T (l))
  liste *r*
  pour chaque enfant *c* de *r* sauf pour *l* de gauche à droite
    T (c) : = sous-arbre avec *c* comme racine
    inorder (T (c))

ALGORITHM 3 Traversée post-commande.

procédure *post-commande* (T : arbre enraciné ordonné)
r : = racine de T
pour chaque enfant c de r de gauche à droite
    $T(c)$: = sous-arbre avec c comme racine
    post-commande $(T(c))$
liste r

Notez que le parcours pré-ordre et le parcours post-ordre codent la structure de un arbre enraciné ordonné lorsque le nombre d'enfants de chaque sommet est spécifié. Autrement dit, un L'arbre enraciné ordonné est déterminé de façon unique lorsque nous spécifions une liste de sommets générés par un traversée en précommande ou par une traversée post-commande de l'arbre, avec le nombre d'enfants de chaque sommet (voir les exercices 26 et 27). En particulier, à la fois une traversée de précommande et une post-commande traversal code la structure d'un arbre m -ary ordonné complet . Cependant, lorsque le nombre d'enfants de sommets n'est pas spécifié, ni une traversée en pré-ordre ni une traversée en post-ordre encode le structure d'un arbre enraciné ordonné (voir exercices 28 et 29).

Infixe, préfixe et notation postfixée

Nous pouvons représenter des expressions compliquées, telles que des propositions composées, des combinaisons de ensembles et expressions arithmétiques utilisant des arbres enracinés ordonnés. Par exemple, considérons le représentant sentation d'une expression arithmétique impliquant les opérateurs + (addition), - (soustraction), $*$ (multiplication), / (division) et ↑ (exponentiation). Nous utiliserons des parenthèses pour indiquer l'ordre des opérations. Un arbre enraciné ordonné peut être utilisé pour représenter de telles expressions, où les sommets internes représentent les opérations et les feuilles représentent les variables ou les nombres. Chaque opération opère sur ses sous-arbres gauche et droit (dans cet ordre).

EXEMPLE 5 Quel est l'arbre enraciné ordonné qui représente l'expression $((x + y) \uparrow 2) + ((x - 4) / 3)$?

Solution: L'arbre binaire de cette expression peut être construit de bas en haut. Premièrement, un sous-un arbre pour l'expression $x + y$ est construit. Ensuite, cela est incorporé dans le cadre du plus grand sous-arbre représentant $(x + y) \uparrow 2$. En outre, un sous-arbre pour $x - 4$ est construit, puis il est incorporé poré dans un sous-arbre représentant $(x - 4) / 3$. Enfin les sous-arbres représentant $(x + y) \uparrow 2$