Réponses aux exercices impairs

CHAPITRE 1

Section 1.1

1. a) Oui, T **b)** Oui, F **c)** Oui, T **d)** Oui, F **e)** Non **f)** Non **3. a)** Mei n'a pas de lecteur MP3. **b)** Il y a de la pollution dans le New Jersey. **c)** 2 + 1 = 3. **d)** L'été dans le Maine n'est pas chaud ou pas ensoleillé. **5. a)** Steve n'a pas plus de 100 Go d'espace disque libre sur son ordinateur portable **b)** Zach ne bloque pas e-mails de Jennifer, ou il ne bloque pas les textes de Jennifer **c)** 7 · 11 · 13 = 999 **d)** Diane n'a pas fait de vélo à 100 milles le dimanche **7. a)** F **b)** T **c)** T **d)** T **e)** T **9. a) Les** requins ont pas été repéré près du rivage. **b)** Nager au nouveau La côte de Jersey est autorisée et des requins ont été repérés près de la rive. **c)** Nager sur la côte du New Jersey n'est pas autorisé, ou des requins ont été repérés près du rivage. **d)** Si vous nagez à la côte du New Jersey est autorisé, alors les requins n'ont pas été repéré près du rivage. **e)** Si des requins n'ont pas été repérés à proximité le rivage, puis nager sur le rivage du New Jersey est autorisé. **f)** Si la baignade sur la côte du New Jersey n'est pas autorisée, alors les requins n'ont pas été repérés près du rivage. **g)** Natation à la côte du New Jersey est autorisé si et seulement si les requins ont pas été repéré près du rivage. **h)** Nager au nouveau La côte de Jersey n'est pas autorisée, et soit nager au New La côte de Jersey est autorisée ou des requins n'ont pas été repérés à proximité la rive. (Notez que nous avons pu incorporer la parenthèses en utilisant le mot «soit» dans la seconde moitié du phrase.) **11. a)** $p \wedge q$ **b)** $p \wedge \neg q$ **c)** $\neg p \wedge \neg q$ **d)** $p \vee q$ **e)** $p \to q$ **f)** $(p \vee q) \wedge (p \to \neg q)$ **g)** $q \leftrightarrow p$ **13. a)** $\neg p$ **b)** $p \wedge \neg q$ **c)** $p \to q$ **d)** $\neg p \to \neg q$ **e)** $p \to q$ **f)** $q \wedge \neg p$ **g)** $q \to p$ **15. a)** $r \wedge \neg p$ **b)** $\neg p \wedge q \wedge r$ **c)** $r \to (q \leftrightarrow \neg p)$ **d)** $\neg q \wedge \neg p \wedge r$ **e)** $(q \to (\neg r \wedge \neg p)) \wedge \neg ((\neg r \wedge \neg p) \to q)$ **f)** $(p \wedge r) \to \neg q$ **17. a)** Faux **b)** Vrai **c)** Vrai **d)** Vrai **19. a)** Exclusif ou: Vous obtenez une seule boisson. **b)** Inclus ou: Les mots de passe longs peuvent avoir n'importe quelle combinaison de symboles. **c)** Inclusif ou: Un étudiant avec les deux cours est encore plus qualifié ified. **d)** Soit interprétation possible; un voyageur pourrait souhaiter payer avec un mélange des deux devises, ou le magasin peut pas permettre cela. **21. a)** Inclusif ou: Il est permis de prendre mathématiques discrètes si vous avez eu le calcul ou l'ordinateur la science, ou les deux. Exclusif ou: Il est permis de prendre discret mathématiques si vous avez eu le calcul ou l'informatique, mais pas si vous avez eu les deux. Très probablement l'inclusif ou est prévu. **b)** Inclusif ou: Vous pouvez bénéficier de la remise, ou vous pouvez obtenir un prêt à faible taux d'intérêt, ou vous pouvez obtenir à la fois le remboursement et un prêt à faible taux d'intérêt. Exclusif ou: Vous pouvez bénéficier de la remise, ou vous pouvez obtenir un prêt à faible taux d'intérêt, mais vous ne pouvez rabais et un prêt à faible taux d'intérêt. Très probablement l'exclusif ou est prévu. **c)** Inclusif ou: Vous pouvez commander deux articles umn A et aucun de la colonne B, ou trois éléments de la colonne B et aucun de la colonne A, ou cinq éléments dont deux de colonne A et trois de la colonne B. Exclusif ou: vous pouvez commander deux articles de la colonne A ou trois articles de la colonne B, mais pas les deux. Presque certainement l'exclusif ou est destiné. **d)** Inclus ou: Plus de 2 pieds de neige ou de refroidissement éolien ci-dessous -100, ou les deux, fermeront l'école. Exclusif ou: Plus de 2 pieds de neige ou de refroidissement éolien en dessous de -100, mais pas les deux, se fermeront école. Certainement l'inclusif ou est destiné. **23. a)** Si le le vent souffle du nord-est, puis il neige. **b)** S'il reste chaud pendant une semaine, puis les pommiers fleuriront. **c)** Si le Pistonnes remportent le championnat, puis ils ont battu les Lakers. **d)** Si vous arrivez au sommet de Long's Peak, alors vous devez avoir marché 8 milles. **e)** Si vous êtes mondialement connu, vous obtiendrez alors la permanence en tant que professeur. **f)** Si vous conduisez plus de 400 miles, alors vous devra acheter de l'essence. **g)** Si votre garantie est bonne, alors vous devez avoir acheté votre lecteur CD il y a moins de 90 jours. **h)** Si l'eau n'est pas trop froide, Jan ira nager. **25. a)** Vous achetez un cornet de crème glacée si et seulement s'il fait chaud côté. **b)** Vous gagnez le concours si et seulement si vous détenez le seul ticket gagnant. **c)** Vous êtes promu si et seulement si vous avez Connexions. **d)** Votre esprit se décomposera si et seulement si vous regardez télévision. **e)** Le train est en retard si et seulement si c'est un jour que je prendre le train. **27. a)** Converse: «Je ne skierai que demain s'il neige aujourd'hui. »Contrapositif:« Si je ne skie pas demain, alors il n'aura pas neigé aujourd'hui. »Inverse:« Si ce n'est pas le cas neige aujourd'hui, alors je ne skierai pas demain. » **b)** Converse:« Si je venir en classe, il y aura un quiz. "Contrapositive:" Si je ne venez pas en classe, il n'y aura pas de quiz. »Inverse: "S'il n'y a pas de quiz, alors je ne viens pas en classe." **c)** Inverse: «Un entier positif est un nombre premier s'il n'a pas de diviseurs autre que 1 et lui-même. "Contrapositif:" Si un entier positif a un diviseur autre que 1 et lui-même, alors il n'est pas premier. verset: "Si un entier positif n'est pas un nombre premier, alors il a un diviseur autre que 1 et lui-même. » **29. a)** 2 **b)** 16 **c)** 64 **d)** 16

31. a)

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
T	F	F
F	T	F

b)

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
T	F	T
F	T	T

c)

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$(p \vee \neg q) \to q$
T	T	F	T	T
T	F	T	T	F
FT		F	F	T
F	F	T	T	F

d)

pq	$p \vee q$	$p \wedge q$	$(p \vee q) \to (p \wedge q)$
TT	T	T	T
TF	T	F	F
FT	T	F	F
FF	F	F	T

e)

p	q	$p \to q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \to \neg p$	$(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$
T	T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

F)

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \to (q \to p)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

33. Pour les parties (a), (b), (c), (d) et (f), nous avons ce tableau.

p	q	$(p \vee q) \to (p \oplus q)$	$(p \oplus q) \to (p \wedge q)$	$(p \vee q) \oplus (p \wedge q)$	$(p \leftrightarrow q) \oplus (\neg p \leftrightarrow q)$	$(p \oplus q) \to (p \oplus \neg q)$
T	T	F	T	F	T	T
T	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	T	F	T	T

Pour la partie (e), nous avons ce tableau.

p	q	r	$\neg p$	$\neg r$	$p \leftrightarrow q$	$\neg p \leftrightarrow \neg r$	$(p \leftrightarrow q) \oplus (\neg p \leftrightarrow \neg r)$
T	T	T	F	F	T	T	F
T	T	F	F	T	T	F	T
T	F	T	F	F	F	T	T
T	F	F	F	T	F	F	F
F	T	T	T	F	F	F	F
F	T	F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	F	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T	F

35.

p	q	$p \to \neg q$	$\neg p \leftrightarrow q$	$(p \to q) \vee (\neg p \to q)$	$(p \to q) \wedge (\neg p \to q)$	$(p \leftrightarrow q) \vee (\neg p \leftrightarrow q)$	$(\neg p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	T	T	T	F	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	F	T	F	T	F	T	T

37.

p	q	r	$p \to (\neg q \vee r)$	$\neg p \to (q \to r)$	$(p \to q) \vee (\neg p \to r)$	$(p \to q) \wedge (\neg p \to r)$	$(p \leftrightarrow q) \vee (\neg q \leftrightarrow r)$	$(\neg p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T	F
T	F	T	T	T	T	F	T	T
T	F	F	T	T	T	F	F	F
F	T	T	T	T	T	T	F	F
F	T	F	T	F	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T	F

F FF T T T F T T

39.

p	*q*	*r*	*sp ↔ qr ↔ s*			*(p ↔ q) ↔ (r ↔ s)*
T	TTT			T	T	T
T	TT		F	T	F	F
T	T	FT		T	F	F
T	T	FF		T	T	T
T	FTT			F	T	F
T	FT		F	F	F	T
T	FFT			F	F	T
T	FFF			F	T	F
FTTT				F	T	F
FTT			F	F	F	T
FT		FT		F	F	T
FT		FF		F	T	F
F	FTT			T	T	T
F	FT		F	T	F	F
F	FFT			T	F	F
F	FFF			T	T	T

41. La première clause est vraie si et seulement si au moins l'un des *p* , *q* et *r* est vrai. La deuxième clause est vraie si et seulement si au moins l'un des

les trois variables sont fausses. Par conséquent, la déclaration entière est vrai si et seulement s'il y a au moins un T et un F parmi les valeurs de vérité des variables, en d'autres termes, qu'ils ne sont pas tous ont la même valeur de vérité. **43.** **a)** *OR au* niveau du bit est 111 1111; *ET au niveau du* bit est 000 0000; *XOR au niveau du* bit est 111 1111. **b) Au** niveau du bit *OR* est 1111 1010; *ET au niveau du* bit est 1010 0000; *XOR au niveau du* bit est 0101 1010. **c)** *OR au* niveau du bit est 10 0111 1001; au niveau du bit *et* est 00 0100 0000; *XOR au niveau du* bit est 10 0011 1001. **d)** *OU au* niveau du bit est 11 1111 1111; *ET au niveau du* bit est 00 0000 0000; *XOR au niveau du* bit est 11 1111 1111. **45.** 0,2, 0,6 **47.** 0,8, 0,6 **49.** **a)** Le La 99e déclaration est vraie et les autres sont fausses. **b)** Déclarations 1 à 50 sont tous vrais et les énoncés 51 à 100 sont tout faux. **c)** Cela ne peut pas arriver; c'est un paradoxe, montrant que ce ne peuvent pas être des déclarations.

Section 1.2

1. $e \to a$ **3.** $g \to (r \wedge (\neg m) \wedge (\neg b))$ **5.** $e \to (a \wedge (b \vee p) \wedge r)$ **7.** **a)** $q \to p$ **b)** $q \wedge \neg p$ **c)** $q \to p$ **d)** $\neg q \to \neg p$

9. Pas cohérent **11.** Cohérent **13.** NOUVEAU **ET** JERSEY **ET** PLAGES, (MAILLOT **ET** PLAGES) **PAS** NOUVEAU **15.** «Si je vous demandais si la bonne branche mène aux ruines, répondriez-vous oui? » **17** Si le premier déterminer que le majordome et le cuisinier mentent mais ne peuvent le mien si le jardinier dit la vérité ou si le bricoleur dit la vérité. **37.** L'homme japonais possède le zèbre et le norvégien boit de l'eau. **39.** Un honnête, 49 corrompu **41.** **a)** $\neg (p \wedge (q \vee \neg r))$ **b)** $((\neg p) \wedge (\neg q)) \vee (p \wedge r)$

43.

p

r

q

p

q

r

Section 1.3

1. Les équivalences suivent en montrant que les des paires de colonnes de ce tableau sont d'accord.

p	*p* ∧ **T** *p* ∨ **F** *p* ∧ **F** *p* ∨ **T** *p* ∨ *p*					*p* ∧ *p*
T	T	T	F	T	T	T
F	F	F	F	T	F	F

3. **a)**

p	*qp* ∨ *qq* ∨ *p*		
T	T	T	T
T	F	T	T
FT		T	T
F	F	F	F

b)

p	*qp* ∧ *qq* ∧ *p*		
T	T	T	T
T	F	F	F
FT		F	F
F	F	F	F

5.

pqrq ∨ *rp* ∧ *(q* ∨ *r)* *p* ∧ *qp* ∧ *r* *(p* ∧ *r)*					*(p* ∧ *q)* ∨
TTT	T	T	T	T	T
TTF	T	T	T	F	T
TFT	T	T	F	T	T
TFF	F	F	F	F	F
FTT	T	F	F	F	F
FTF	T	F	F	F	F
FFT	T	F	F	F	F
FFF	F	F	F	F	F

professeur ne voulait pas de café, il saurait alors que
répondre à la question de l'hôtesse était «non». Par conséquent, l'hôtesse et les professeurs restants savent que le premier professeur a fait veux du café. De même, le deuxième professeur doit vouloir du café. Lorsque le troisième professeur a dit «non», l'hôtesse sait que le le troisième professeur ne veut pas de café. **19.** *A* est chevalier et *B* est un coquin. **21.** *A* est un chevalier et *B* est un chevalier. **23.** *A* est un valet et *B* est un chevalier. **25.** *A* est le chevalier, *B* est l'espion, *C* est l'escroc. **27.** *A* est le chevalier, *B* est l'espion, *C* est le chevalier . **29.** Chacun des trois peut être le chevalier, tout le monde peut être l'espion, tout peut être l'escroc. **31.** Pas de solutions **33.** Par ordre de augmentation du salaire: Fred, Maggie, Janice **35.** Le détective peut

7. **a)** Jan n'est pas riche ou Jan n'est pas content. **b)** Carlos ne veut pas demain à vélo, et Carlos ne courra pas demain. **c)** Mei ne marche pas en classe et Mei ne prend pas le bus pour aller en classe. **d)** Ibrahim n'est pas intelligent, ou Ibrahim ne travaille pas dur.

9. **a)**

p	q	$p \land q$	$(p \land q) \to p$
T	T	T	T
T	F	F	T
FT		F	T
F	F	F	T

Page 4

b)

p	q	$p \to (p \lor q)$	
T	T	T	T
T	F	T	T
FT		T	T
F	F	F	T

c)

p	q	$\neg p$	$p \to q$	$\neg p \to (p \to q)$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	T
FT		T	T	T
F	F	T	T	T

d)

p	q	$p \land q$	$p \to q$	$(p \land q) \to (p \to q)$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
FT		F	T	T
F	F	F	T	T

e)

p	q	$p \to q$	$\neg (p \to q)$	$\neg (p \to q) \to p$
T	T	T	F	T
T	F	F	T	T
FT		T	F	T
F	F	T	F	T

f)

pq	$p \to q$	$\neg (p \to q)$	$\neg q$	$\neg (p \to q) \to \neg q$
TT	T	F	F	T
TF	F	T	T	T
FT	T	F	F	T
FF	T	F	T	T

11. Dans chaque cas, nous montrerons que si l'hypothèse est vraie,

$\neg p \leftrightarrow q$ est vrai lorsque $\neg p$ et q ont la même valeur de vérité ues, ce qui signifie que p et q ont des valeurs de vérité différentes. De même, $p \leftrightarrow \neg q$ est vrai exactement dans les mêmes cas. Là- par conséquent, ces deux expressions sont logiquement équivalentes. **21.** Le la proposition $\neg (p \leftrightarrow q)$ est vraie lorsque $p \leftrightarrow q$ est fausse, ce qui signifie que p et q ont des valeurs de vérité différentes. Parce que c'est précisément lorsque $\neg p \leftrightarrow q$ est vrai, les deux expressions sont logi- équivalent. **23.** Pour que $(p \to r) \land (q \to r)$ soit faux, un des deux déclarations conditionnelles doivent être fausses, ce qui indique exactement quand r est faux et au moins l'un de p et q est vrai. Mais ce sont précisément les cas dans lesquels $p \lor q$ est vrai et r est false, ce qui est précisément lorsque $(p \lor q) \to r$ est faux. Car les deux propositions sont fausses dans exactement les mêmes situations, ils sont logiquement équivalents. **25.** Pour $(p \to r) \lor (q \to r)$ être faux, les deux déclarations conditionnelles doivent être false, ce qui se produit exactement lorsque r est faux et que p et q sont vrais. Mais c'est précisément le cas dans lequel $p \land q$ est vrai et r est faux, ce qui est précisément lorsque $(p \land q) \to r$ c'est faux. Parce que les deux propositions sont fausses exactement dans le mêmes situations, ils sont logiquement équivalents. **27.** Ce fait a été observée dans la section 1 lorsque le biconditionnel a été défini. Chacun de ces éléments est vrai précisément lorsque p et q ont le mêmes valeurs de vérité. **29.** La dernière colonne est entièrement Ts.

pqr	$p \to q$	$q \to r$	$(p \to q) \land (q \to r)$	$p \to r$	$(p \to q) \land (q \to r) \to (p \to r)$
TTT	T	T	T	T	T
TTF	T	F	F	F	T
TFT	F	T	F	T	T
TFF	F	T	F	F	T
FTT	T	T	T	T	T
FTF	T	F	F	T	T

alors la conclusion est aussi. **a)** Si l'hypothèse $p \wedge q$ est vraie, puis par la définition de la conjonction, la conclusion p doit être vrai aussi. **b)** Si l'hypothèse p est vraie, par la définition de disjonction, la conclusion $p \vee q$ est également vraie. **c)** Si le l'hypothèse $\neg p$ est vraie, c'est-à-dire que si p est faux, alors la conclusion $p \rightarrow q$ est vrai. **d)** Si l'hypothèse $p \wedge q$ est vraie, alors les deux p et q sont vrais, donc la conclusion $p \rightarrow q$ est également vraie. **e)** Si l'hypothèse $\neg (p \rightarrow q)$ est vraie, alors $p \rightarrow q$ est fausse, donc la conclusion p est vraie (et q est fausse). **f)** Si l'hypothèse $\neg (p \rightarrow q)$ est vrai, alors $p \rightarrow q$ est faux, donc p est vrai et q est faux. Par conséquent, la conclusion $\neg q$ est vraie. 13. Que le quatrième la colonne de la table de vérité montrée est identique à la première colonne prouve la partie (a), et que la sixième colonne est identique à la la première colonne prouve la partie (b).

p	***qp* ∧ *qp* ∨ (*p* ∧ *q*) *p* ∨ *qp* ∧ (*p* ∨ *q*)**				
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T
FT		F	F	T	F
F	F	F	F	F	F

15. C'est une tautologie. 17. Chacun de ces éléments est vrai précisément lorsque p et q ont des valeurs de vérité opposées. 19. La proposition

FFT	T	T	T	T	T
FFF	T	T	T	T	T

31. Ceux-ci ne sont pas logiquement équivalents car lorsque p , q et r sont tous faux, $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ est faux, mais $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ est vrai. 33. De nombreuses réponses sont possibles. Si nous laissons r vrai et p , q et s sont faux, alors $(p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow s)$ sera faux, mais $(p \rightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow s)$ sera vrai. 35. **a)** $p \vee \neg q \vee \neg r$ **b)** $(p \vee q \vee r) \wedge s$ **c)** $(p \wedge \mathbf{T}) \vee (q \wedge \mathbf{F})$ 37. Si nous prenons des doubles deux fois, chaque ∨ se transforme en ∧ puis de nouveau en ∨, tous les ∧ passe à un ∨ puis revient à un ∧, chaque **T** passe à un **F** , puis de nouveau à un **T** , chaque **F** change en **T** puis revenir à un **F** . Par conséquent, $(s_*)_* = s$. 39. Soit p et q équivalents propositions composées environnantes impliquant uniquement les opérateurs ∧, ∨ et ¬, et **T** et **F** . Notez que $\neg p$ et $\neg q$ sont également équivalents alentour. Utilisez les lois de De Morgan autant de fois que nécessaire pour pousser les négations dans la mesure du possible au sein de ces composés propositions, en changeant ∨s en ∧s, et vice versa, et en changeant de **T** s à **F** s, et vice versa. Cela montre que $\neg p$ et $\neg q$ sont identique à p_* et q_* sauf que chaque proposition atomique p_i en eux est remplacé par sa négation. De cela, nous pouvons conclure que p_* et q_* sont équivalents car $\neg p$ et $\neg q$

sont. 41. $(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$ 43. Étant donné une proposition composée p , formez sa table de vérité puis écrivez une proposition q en nor- forme mal qui est logiquement équivalente à p . Parce que q in- seulement ¬, ∧ et ∨, cela montre que ces trois op- les érateurs forment un ensemble fonctionnellement complet. 45. Par exercice 43, étant donné une proposition composée p , nous pouvons écrire un proposition q qui est logiquement équivalente à p et implique seulement ¬, ∧ et ∨. Par la loi de De Morgan, nous pouvons éliminer tous les ∧ en remplaçant chaque occurrence de $p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n$ avec $\neg (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \cdots \vee \neg p_n)$. 47. $\neg (p \wedge q)$ est vrai lorsque p ou q , ou les deux, sont faux, et est faux lorsque p et q sont tous deux vrais. Parce que c'était le nition de $p \mid q$, les deux propositions composées sont logi- équivalent. 49. $\neg (p \vee q)$ est vrai lorsque p et q sont faux, et faux sinon. Parce que c'était la définition de $p \downarrow q$, les deux sont logiquement équivalents. 51. $((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow q)$ 53. Cela suit im- à partir de la table de vérité ou de la définition de $p \mid q$. 55. 16 57. Si la base de données est ouverte, alors le système est dans son état initial ou le moniteur est fermé Etat. 59. Les neuf 61. **a)** Satisfaisant **b)** Non satisfaisable

$\neg P(4) \vee \neg P(5))$ 21. De nombreuses réponses sont possibles. **a)** Tous les élèves de votre classe de mathématiques discrète; tous les étudiants le monde **b)** Tous les sénateurs américains; tout le football collégial joueurs **c)** George W. Bush et Jeb Bush; tous les politiciens aux États-Unis **d)** Bill Clinton et George W. Bush; tous les politiciens aux États-Unis 23. Soit $C(x)$ le fonction propositionnelle « x est dans votre classe». **a)** $\exists xH(x)$ et $\exists x(C(x) \wedge H(x))$, où $H(x)$ est « x peut parler hindi» **b)** $\forall xF(x)$ et $\forall x(C(x) \rightarrow F(x))$, où $F(x)$ est « x est amical » **c)** $\exists x \neg B(x)$ et $\exists x(C(x) \wedge \neg B(x))$, où $B(x)$ est « X est né en Californie» **d)** $\exists xM(x)$ et $\exists x(C(x) \wedge M(x))$, où $M(x)$ est « x a été dans un film» **e)** $\forall x \neg L(x)$ et $\forall x(C(x) \rightarrow \neg L(x))$, où $L(x)$ est « x a suivi un cours en programmation logique » 25. Soit $P(x)$ « x est parfait »; que $F(x)$ soit « x est ton ami»; et que le domaine soit tout gens. **a)** $\forall x \neg P(x)$ **b)** $\neg \forall x P(x)$ **c)** $\forall x(F(x) \rightarrow P(x))$ **d)** $\exists x(F(x) \wedge P(x))$ **e)** $\forall x(F(x) \wedge P(x))$ ou $(\forall x F(x)) \wedge (\forall x P(x))$ **f)** $(\neg \forall x F(x)) \vee (\exists x \neg P(x))$ 27. Soit $Y(x)$ soit la fonction propositionnelle que x est dans votre école ou classe, comme approprié. **a)** Si nous laissons $V(x)$ être « x a vécu au Vietnam» alors nous avons $\exists xV(x)$ si le domaine est juste vos camarades de classe, ou $\exists x(Y(x) \wedge V(x))$ si le domaine est tout le monde. Si nous laissons

c) Pas satisfaisable **63.** Utilisez les mêmes propositions que donné dans le texte pour un puzzle Sudoku 9 × 9, avec les ables indexés de 1 à 4, au lieu de 1 à 9, et avec un changement similaire pour les propositions pour le 2 × 2 blocs: $\bigwedge_{r=0}^{1} \bigwedge_{s=0}^{1} \bigwedge_{n=1}^{4} \bigvee_{i=1}^{2} \bigvee_{j=1}^{2} p(2r+i, 2s+j, n)$ **65.** $\bigvee_{i=1}^{9} p(i, j, n)$ affirme que la colonne j contient le nombre n, donc $\bigwedge_{n=1}^{9} \bigvee_{i=1}^{9} p(i, j, n)$ affirme que la colonne j contient tout 9 numéros; par conséquent $\bigwedge_{j=1}^{9} \bigwedge_{n=1}^{9} \bigvee_{i=1}^{9} p(i, j, n)$ affirme que chaque colonne contient chaque numéro.

Section 1.4

1. **a)** T **b)** T **c)** F **3.** **a)** T **b)** F **c)** F **d)** F **5.** **a)** Là est un étudiant qui passe plus de 5 heures tous les jours de la semaine en classe. **b)** Chaque élève passe plus de 5 heures tous les jours de la semaine en classe. **c)** Il y a un étudiant qui ne passer plus de 5 heures tous les jours de la semaine en classe. **d)** Non l'élève passe plus de 5 heures tous les jours de la semaine en classe. **7.** **a)** Chaque comédien est drôle. **b)** Chaque personne est drôle comédien. **c)** Il existe une personne telle que si elle est un comédien, alors elle ou il est drôle. **d)** Certains comédiens sont amusants. **9.** **a)** $\exists x (P(x) \wedge Q(x))$ **b)** $\exists x (P(x) \wedge \neg Q(x))$ **c)** $\forall x (P(x) \vee Q(x))$ **d)** $\forall x \neg (P(x) \vee Q(x))$ **11.** **a)** T **b)** T **c)** F **d)** F **e)** T **f)** F **13.** **a)** T **b)** T **c)** T **d)** T **15.** **a)** T **b)** F **c)** T **d)** F **17.** **a)** $P(0) \vee P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4)$ **b)** $P(0) \wedge P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4)$ **c)** $\neg P(0) \vee \neg P(1) \vee \neg P(2) \vee \neg P(3) \vee \neg P(4)$ **d)** $\neg P(0) \wedge \neg P(1) \wedge \neg P(2) \wedge \neg P(3) \wedge \neg P(4)$ **e)** $\neg (P(0) \vee P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4))$ **f)** $\neg (P(0) \wedge P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4))$

19. **a)** $P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4) \vee P(5)$ **b)** $P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4) \wedge P(5)$ **c)** $\neg (P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4) \vee P(5))$

d) $\neg (P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4) \wedge P(5))$ **e)** $(P(1) \wedge P(2) \wedge P(4) \wedge P(5)) \vee (\neg P(1) \vee \neg P(2) \vee \neg P(3) \vee$

$D(x, y)$ signifie que la personne x a vécu dans le pays y, alors nous peut réécrire ce dernier comme $\exists x (Y(x) \wedge D(x, \text{Vietnam}))$. **b)** Si nous laissons $H(x)$ être « x peut parler hindi», alors nous avons $\exists x \neg H(x)$ si le domaine est juste vos camarades de classe, ou $\exists x (Y(x) \wedge \neg H(x))$ si le domaine est tout le monde. Si nous laissons $S(x, y)$ signifier que fils x peut parler la langue y, alors nous pouvons réécrire ce dernier un comme $\exists x (Y(x) \wedge \neg S(x, \text{hindi}))$. **c)** Si nous laissons $J(x)$, $P(x)$, et $C(x)$ les fonctions propositionnelles affirmant les connaissances de x bord de Java, Prolog et C ++, respectivement, alors nous avons $\exists x (J(x) \wedge P(x) \wedge C(x))$ si le domaine est juste votre école-

partenaires, ou $\exists x (Y(x) \wedge J(x) \wedge P(x) \wedge C(x))$ si le domaine c'est tout le monde. Si nous laissons $K(x, y)$ signifier que la personne x sait langage de programmation y, alors nous pouvons réécrire ce dernier comme $\exists x (Y(x) \wedge K(x, \text{Java}) \wedge K(x, \text{Prolog}) \wedge K(x, \text{C ++}))$. **d)** Si

nous laissons $T(x)$ être « x aime la cuisine thaïlandaise», alors nous avons $\forall x T(x)$ si le domaine est juste vos camarades de classe, ou $\forall x (Y(x) \rightarrow T(x))$ si le domaine est tout le monde. Si nous laissons $E(x, y)$ signifier que la personne x aime la nourriture de type y, alors nous pouvons la réécrire dernier comme $\forall x (Y(x) \rightarrow E(x, \text{thaï}))$. **e)** Si nous laissons $H(x)$ être « x joue au hockey», alors nous avons $\exists x \neg H(x)$ si le do-principal est juste vos camarades de classe, ou $\exists x (Y(x) \wedge \neg H(x))$ si le domaine est tout le monde. Si nous laissons $P(x, y)$ signifier que fils x joue au jeu y, alors nous pouvons réécrire ce dernier comme $\exists x (Y(x) \wedge \neg P(x, \text{hockey}))$. **29.** Soit $T(x)$ signifie que x est un

tautologie et $C(x)$ signifient que x est une contradiction. **a)** $\exists x T(x)$ **b)** $\forall x (C(x) \rightarrow T(\neg x))$ **c)** $\exists x \exists y (\neg T(x) \wedge \neg C(x) \wedge \neg T(y) \wedge \neg C(y) \wedge T(x \vee y))$ **d)** $\forall x \forall y ((T(x) \wedge T(y)) \rightarrow T(x \wedge y))$

31. **a)** $Q(0, 0, 0) \wedge Q(0, 1, 0)$ **b)** $Q(0, 1, 1) \vee Q(1, 1, 1) \vee Q(2, 1, 1)$ **c)** $\neg Q(0, 0, 0) \vee \neg Q(0, 0, 1)$ **d)** $\neg Q(0, 0, 1) \vee \neg Q(1, 0, 1) \vee \neg Q(2, 0, 1)$ **33.** **a)** Soit $T(x)$ le prédicat

que x peut apprendre de nouveaux trucs et laisser le domaine être de vieux chiens. L'original est $\exists x T(x)$. La négation est $\forall x \neg T(x)$: «Aucun vieux chien ne peut apprendre de nouveaux trucs. " **b)** Soit $C(x)$ le prédicat que x connaît calcul, et laissez le domaine être des lapins. L'original est $\neg\exists x C(x)$.

Page 6

La négation est $\exists x C(x)$: "Il y a un lapin qui connaît le calcul." **c)** Soit $F(x)$ le prédicat que peut voler x, et laisse le domaine être des oiseaux. L'original est $\forall x F(x)$. La négation est $\exists x \neg F(x)$: «Il y a un oiseau qui ne peut pas voler. " **d)** Soit $T(x)$ le prédicat que x peut parler, et laisser le domaine être des chiens. L'original est $\neg\exists x T(x)$. Néga-tion est $\exists x T(x)$: «Il y a un chien qui parle.» **e)** Soit $F(x)$ et $R(x)$ soit les prédicats que x connaît le français et le russe

sian, respectivement, et que le domaine soit constitué de personnes de cette classe. L'original est $\neg\exists x (F(x) \wedge R(x))$. La négation est $\exists x (F(x) \wedge R(x))$: «Il y a quelqu'un dans cette classe qui connaît le français et le russe. sian. " **35.** **a)** Il n'y a pas de contre-exemple. **b)** $x = 0$ **c)** $x = 2$

l'autre côté est vrai. **a)** Supposons que A soit vrai. Ensuite, pour chaque x, $P(x) \rightarrow A$ est vrai; donc le côté gauche est toujours vrai dans ce cas. Par un raisonnement similaire, le côté droit est toujours vrai dans ce cas. Par conséquent, les deux propositions sont logiquement équivalent lorsque A est vrai. Par contre, supposons que A c'est faux. Il existe deux sous-cas. Si $P(x)$ est faux pour chaque x, alors $P(x) \rightarrow A$ est vide, donc le côté gauche est vacueusement vrai. Le même raisonnement montre que le bras droit side est également vrai, car dans ce sous-cas $\exists xP(x)$ est faux. Pour le deuxième sous-cas, supposons que $P(x)$ soit vrai pour certains x. alors pour cela x, $P(x) \rightarrow A$ est faux, donc le côté gauche est faux. le

37. **a)** $\forall x((F(x, 25, 000) \lor S(x, 25)) \rightarrow E(x))$, où $E(x)$ est «La personne x *se* qualifie en tant que flyer élite dans une année donnée», $F(x, y)$ est «La personne x vole plus de y milles au cours d'une année donnée», et $S(x, y)$ est «La personne x prend plus de y vols au cours d'une année donnée» **b)** $\forall x(((M(x) \land T(x, 3)) \lor (\neg M(x) \land T(x, 3.5))) \rightarrow Q(x))$, où $Q(x)$ est «La personne x *se* qualifie pour le marathon», $M(x)$ est «La personne x est un homme» et $T(x, y)$ est «La personne x a couru le marathon en moins de y heures» **c)** $M \rightarrow ((H(60) \lor (H(45) \land T)) \land \forall y G(B, y))$, où M est le proposition «L'étudiant a obtenu une maîtrise», $H(x)$ est «L'étudiant a suivi au moins x heures de cours», T est la proposition «L'étudiant a rédigé une thèse» et $G(x, y)$ est «La personne a note x ou plus en cours y» **d)** $\exists x((t(x, 21) \land g(x, 4.0))$, où $T(x, y)$ est «La personne x *a* pris plus de y heures de crédit» et $G(x, p)$ est «Personne x *la* moyenne pondérée cumulative p» (nous supposons que nous parlons d'un semestre donné) 39. **a)** S'il existe une imprimante qui est à la fois hors service et occupé, puis un emploi a été perdu. **b)** Si chaque imprimante est occupé, puis il y a un travail dans la file d'attente. **c)** S'il y a un travail qui est à la fois en file d'attente et perdu, alors une imprimante est hors service vice. **d)** Si chaque imprimante est occupée et que chaque tâche est en file d'attente, alors un emploi est perdu. 41. **a)** $(\exists x F(x, 10)) \rightarrow \exists x S(x)$, où $F(x, y)$ est «Le disque x a plus de y kilo-octets de espace libre »et $S(x)$ est« Le message électronique x peut être enregistré » **b)** $(\exists x A(x)) \rightarrow \forall x(Q(x) \rightarrow T(x))$, où $A(x)$ est «Alerte x est actif, " $Q(x)$ est" Message x est en file d'attente ", et $T(x)$ est" Messauge x est transmise " **c)** $\forall x((x = \text{console principale}) \rightarrow T(x))$, où $T(x)$ est «Le moniteur de diagnostic suit l'état de système x " **d)** $\forall x(\neg L(x) \rightarrow B(x))$, où $L(x)$ est" l'hôte de la conférence téléphonique a placé le participant x sur une liste spéciale »et $B(x)$ est «Participant x *a* été facturé» 43. Ils ne sont pas équivalents prêté. Soit $P(x)$ toute fonction propositionnelle qui est parfois vrai et parfois faux, et que $Q(x)$ soit n'importe quelle proposition fonction qui est toujours fausse. Alors $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ est faux mais $\forall xP(x) \rightarrow \forall xQ(x)$ est vrai. 45. Les deux déclarations sont vrai précisément quand au moins l'un de $P(x)$ et $Q(x)$ est vrai pour au moins une valeur de x dans le domaine. 47. **a)** Si A est vrai, alors les deux côtés sont logiquement équivalents à $\forall xP(x)$. Si A est faux, le côté gauche est clairement faux. De plus, pour chaque x, $P(x) \land A$ est faux, donc le côté droit est faux. Par conséquent, les deux côtés sont logiquement équivalents. **b)** Si A est vrai, alors les deux côtés sont logiquement équivalents à $\exists x P(x)$. Si A est faux, le côté gauche est clairement faux. De plus, pour chaque x, $P(x) \land A$ est faux, donc $\exists x(P(x) \land A)$ est faux. Par conséquent, les deux les côtés sont logiquement équivalents. 49. Nous pouvons établir ces équivalences en faisant valoir qu'un côté est vrai si et seulement si le côté droit est également faux, car dans ce sous-cas $\exists xP(x)$ est vrai mais A est faux. Ainsi, dans tous les cas, les deux propositions ont la même valeur de vérité. **b)** Si A est vrai, les deux côtés sont trivialement vrai, parce que les instructions conditionnelles ont de vraies conclusions. Si A est faux, alors il y a deux sous-cas. Si $P(x)$ est faux pour certains x, alors $P(x) \rightarrow A$ est vide pour ce x, donc le côté gauche est vrai. Le même raisonnement montre que le côté droit est vrai, car dans ce sous-cas $\forall xP(x)$ est faux. Pour le deuxième sous-cas, supposons que $P(x)$ soit vrai pour chaque x. Alors pour chaque x, $P(x) \rightarrow A$ est faux, donc le le côté gauche est faux (il n'y a pas de x rendant le conditionnel déclaration vraie). Le côté droit est également faux, car il est une déclaration conditionnelle avec une vraie hypothèse et une fausse conclusion. Ainsi, dans tous les cas, les deux propositions ont le même valeur de vérité. 51. Pour montrer que ceux-ci ne sont pas logiquement équivalents, soit $P(x)$ soit l'énoncé « x est positif», et soit $Q(x)$ soit l'instruction « x est négatif» avec domaine l'ensemble des entiers. Alors $\exists x P(x) \land \exists x Q(x)$ est vrai, mais $\exists x(P(x) \land Q(x))$ est faux. 53. **a)** Vrai **b)** Faux, sauf si le domaine se compose de un seul élément **c)** Vrai 55. **a)** Oui **b)** Non **c)** juana, kiko **d)** math273, cs301 **e)** juana, kiko 57. frère (X, Y) : - mère (M, X), mère (M, Y), père (F, X), père (F, Y) 59. **a)** $\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x))$ **b)** $\forall x(Q(x) \rightarrow R(x))$ **c)** $\forall x(P(x) \rightarrow \neg R(x))$ **d)** Le la conclusion ne suit pas. Il peut y avoir de vaines profes- car les locaux n'excluent pas la possibilité Il est vrai qu'il existe d'autres vains que des ignorants. 61. **a)** $\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x))$ **b)** $\forall x(R(x) \rightarrow \neg S(x))$ **c)** $\forall x(\neg Q(x) \rightarrow S(x))$ **d)** $\forall x(P(x) \rightarrow \neg R(x))$ **e)** Le la conclusion suit. Supposons que x soit un bébé. Puis par le premier prémisse, x est illogique, donc par la troisième prémisse, x est méprisé. La deuxième prémisse dit que si x pouvait gérer un crocodile, alors x ne serait pas méprisé. Par conséquent, x ne peut pas gérer un crocodile.

Section 1.5

1. **a)** Pour chaque nombre réel x, il existe un nombre réel y de telle sorte que x soit inférieur à y. **b)** Pour chaque nombre réel x et réel nombre y, si x et y sont tous deux non négatifs, alors leur produit est non négatif. **c)** Pour chaque nombre réel x et nombre réel y, il existe un vrai nombre z tel que $xy = z$. 3. **a)** Là

est un élève de votre classe qui a envoyé un message à un élève de votre classe. **b)** Il y a un étudiant dans votre classe qui a envoyé un message à chaque élève de votre classe. **c)** Chaque élève de votre classe a envoyé un message à au moins un élève de votre classe. **d)** Il y a un élève dans ta classe à qui a été envoyé un message par chaque élève de votre classe. **e)** Chaque élève de votre classe a reçu un message de au moins un élève de votre classe. **f)** Chaque élève de la classe a envoyé un message à chaque élève de la classe. **5. a)** Sarah Smith a visité www.att.com. **b)** Au moins une personne a visité www.imdb.org. **c)** Jose Orez a visité au moins un site Internet. **d)** Il existe un site Web sur lequel Ashok Puri et Cindy Yoon a visité. **e)** Il y a une personne en plus de David Belcher qui a visité tous les sites Web que David Belcher a visité. **f)** Deux personnes différentes ont visité exactement les mêmes sites Web. **7. a)** Abdallah Hussein ne fait pas comme la cuisine japonaise. **b)** Un élève de votre école aime Cuisine coréenne, et tout le monde dans votre école aime le mexicain cuisine. **c)** Il y a une cuisine que Monique Ar-senault ou Jay Johnson aime. **d)** Pour chaque paire de disques distincts les élèves de votre école, il y a une cuisine qui au moins un eux n'aime pas. **e)** Il y a deux élèves dans votre école qui aiment exactement le même ensemble de cuisines. **f)** Pour chaque paire des élèves de votre école, il y a une cuisine dont ils ont la même opinion (soit ils aiment tous les deux, soit ils les deux ne l'aiment pas). **9. a)** $\forall x L(x, \text{Jerry})$ **b)** $\forall x \exists y L(x, y)$ **c)** $\exists y \forall x L(x, y)$ **d)** $\forall x \exists y \neg L(x, y)$ **e)** $\exists x \neg L(\text{Lydia}, x)$ **f)** $\exists x \forall y \neg L(y, x)$ **g)** $\exists x (\forall y L(y, x) \wedge \forall z ((\forall w L(w, z)) \rightarrow z = x))$ **h)** $\exists x \exists y (x = y \wedge L(\text{Lynn}, x) \wedge L(\text{Lynn}, y) \wedge \forall z (L(\text{Lynn}, z) \rightarrow (z = x \vee z = y)))$ **i)** $\forall x L(x, x)$ **j)** $\exists x \forall y (L(x, y) \leftrightarrow x = y)$ **11. a)** A (Lois, professeur Michaels)

b) $\forall x (S(x) \rightarrow A(x, \text{professeur Gross}))$ **c)** $\forall x (F(x) \rightarrow (A(x, \text{Professeur Miller}) \vee A(\text{Professeur Miller}, x)))$ **d)** $\exists x (S(x) \wedge \forall y (F(y) \rightarrow \neg A(x, y)))$ **e)** $\exists x (F(x) \wedge \forall y (S(y) \rightarrow \neg A(y, x)))$ **f)** $\forall y (F(y) \rightarrow \exists x (S(x) \vee A(x, y)))$ **g)** $\exists x (F(x) \wedge \forall y ((F(y) \wedge (y = x)) \rightarrow A(x, y)))$ **h)** $\exists x (S(x) \wedge \forall y (F(y) \rightarrow \neg A(y, x)))$ **13. a)** $\neg M$ (Chou, Koko)

b) $\neg M(\text{Arlene}, \text{Sarah}) \wedge \neg T(\text{Arlene}, \text{Sarah})$ **c)** $\neg M$ (Debo-rah, Jose) **d)** $\forall x M(x, \text{Ken})$ **e)** $\forall x \neg T(x, \text{Nina})$ **f)** $\forall x (T - x, \text{Avi}) \vee M(x, \text{Avi}))$ **g)** $\exists x \forall y (y = x \rightarrow M(x, y))$ **h)** $\exists x \forall y (y = x \rightarrow (M(x, y) \vee T(x, y)))$ **i)** $\exists x \exists y (x = y \wedge M(x, y) \wedge M(y, x))$ **j)** $\exists x M(x, x)$ **k)** $\exists x \forall y (x = y \rightarrow (\neg M(x, y) \wedge \neg T(y, x)))$ **l)** $\forall x (\exists y (x = y \wedge (M(y, x) \vee T(y, x)))))$

m) $\exists x \exists y (x = y \wedge M(x, y) \wedge T(y, x))$ **n)** $\exists x \exists y (x = y \wedge \forall z ((z = x \wedge z = y) \rightarrow (M(x, z) \vee M(y, z) \vee T(x, z) \vee T(y, z))))$ **15. a)** $\forall x P(x)$, où $P(x)$ est « x *a* besoin d'un cours

en mathématiques discrètes »et le domaine comprend tous les étudiants en sciences informatiques **b)** $\exists x P(x)$, où $P(x)$ est « x possède un ordinateur personnel "et le domaine comprend tous les étudiants dans cette classe **c)** $\forall x \exists y P(x, y)$, où $P(x, y)$ est « x a pris y ", le domaine de x comprend tous les élèves de cette classe,

et le domaine pour y comprend tous les cours d'informatique **d)** $\exists x \exists y P(x, y)$, où $P(x, y)$ et les domaines sont identiques à dans la partie (c) **e)** $\forall x \forall y P(x, y)$, où $P(x, y)$ est « x a été en y ", le domaine de x comprend tous les élèves de cette classe, et le domaine pour y *se* compose de tous les bâtiments sur le campus **f)** $\exists x \exists y \forall z (P(z, y) \rightarrow Q(x, z))$, où $P(z, y)$ est « z est dans y "et $Q(x, z)$ est" x a été dans z "; le domaine pour x con-

siste de tous les élèves de la classe, le domaine pour y compose de tous les bâtiments sur le campus, et le domaine de z *se* compose de toutes les chambres. **g)** $\forall x \forall y \exists z (P(z, y) \wedge Q(x, z))$, avec la même entrée environnement comme dans la partie (f) **17. a)** $\forall u \exists m (A(u, m) \wedge \forall n (n = m \rightarrow \neg A(u, n)))$, où $A(u, m)$ signifie que l'utilisateur u a

accès à la boîte aux lettres m **b)** $\exists p \forall e (H(e) \wedge S(p, \text{en marche})) \rightarrow S$ (noyau, fonctionnant correctement), où $H(e)$ signifie que

la condition d'erreur e est en vigueur et $S(x, y)$ signifie que le le statut de x est y **c)** $\forall u \forall s (E(s, .\text{edu}) \rightarrow A(u, s))$, où $E(s, x)$ signifie que le site Web s a l'extension x et $A(u, s)$

signifie que l'utilisateur u peut accéder au site Web s **d)** $\exists x \exists y (x = y \wedge \forall z ((\forall s M(z, s)) \leftrightarrow (z = x \vee z = y)))$,

où $M(a, b)$ signifie que le système a surveille le serveur distant b **19. a)** $\forall x \forall y ((x < 0) \wedge (y < 0) \rightarrow (x + y < 0))$ **b)** $\neg\forall x \forall y ((x > 0) \wedge (y > 0) \rightarrow (x - y > 0))$ **c)** $\forall x \forall y (x^2 + y^2 \geq (x + y)^2)$ **d)** $\forall x \forall y (|xy| = |x||y|)$ **21.** $\forall x \exists a \exists b \exists c \exists d ((x > 0) \rightarrow x = a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$, où le domaine se compose de tous les entiers **23. a)** $\forall x \forall y ((x < 0) \wedge (y < 0) \rightarrow (xy > 0))$ **b)** $\forall x (x - x = 0)$ **c)** $\forall x \exists a \exists b (a = b \wedge \forall c (c^2 = x \leftrightarrow (c = a \vee c = b)))$ **d)** $\forall x ((x < 0) \rightarrow \neg\exists y (x = y^2))$

25. a) Il existe une identité multiplicative pour les nombres réels. **b)** Le produit de deux nombres réels négatifs est toujours une pos-nombre réel itive. **c)** Il existe des nombres réels x et y tels que x^2 dépasse y mais x est inférieur à y. **d)** Les nombres réels sont fermé sous l'opération d'addition. **27. a)** Vrai **b)** Vrai **c)** Vrai **d)** Vrai **e)** Vrai **f)** Faux **g)** Faux **h)** Vrai **i)** Faux **29. a)** $P(1,1) \wedge P(1,2) \wedge P(1,3) \wedge P(2,1) \wedge P(2,2) \wedge P(2,3) \wedge P(3,1) \wedge P(3,2) \wedge P(3,3)$ **b)** $P(1,1) \vee P(1,2) \vee P(1,3) \vee P(2,1) \vee P(2,2) \vee P(2,3) \vee P(3,1) \vee P(3,2) \vee P(3,3)$ **c)** $(P(1,1) \wedge P(1,2) \wedge P(1,3)) \vee (P(2,1) \wedge P(2,2) \wedge P(2,3)) \vee (P(3,1) \wedge P(3,2) \wedge P(3,3))$

d) $(P(1,1) \vee P(2,1) \vee P(3,1)) \wedge (P(1,2) \vee P(2,2) \vee P(3,2)) \wedge (P(1,3) \vee P(2,3) \vee P(3,3))$ **31. a)** $\exists x \forall y \exists z \neg T(x, y, z)$ **b)** $\exists x \forall y \neg P(x, y) \wedge \exists x \forall y \neg Q(x, y)$ **c)** $\exists x \forall y (\neg P(x, y) \vee \forall z \neg R(x, y, z))$ **d)** $\exists x \forall y (P(x, y) \wedge \neg Q(x, y))$

33. a) $\exists x \exists y \neg P(x, y)$ **b)** $\exists y \forall x \neg P(x, y)$ **c)** $\exists y \exists x (\neg P(x, y) \wedge \neg Q(x, y))$ **d)** $(\forall x \forall y P(x, y)) \vee (\exists x \exists y \neg Q(x, y))$

e) $\exists x (\forall y \exists z \neg P(x, y, z) \vee \forall z \exists y \neg P(x, y, z))$ **35.** Toute main avec quatre membres ou plus rend la déclaration vraie; n'importe quel domaine de trois membres ou moins fait ment faux. **37. a)** Il y a quelqu'un dans cette classe tel que pour deux cours de mathématiques différents, ce ne sont pas les deux et seulement deux cours de mathématiques que cette personne a suivis. **b)** Toute personne a visité la Libye ou n'a pas visité un pays autre que la Libye. **c)** Quelqu'un a grimpé ery mountain dans l'Himalaya. **d)** Il y a quelqu'un qui n'a jamais été dans un film avec Kevin Bacon ni dans un film avec quelqu'un qui a été dans un film avec Kevin Bacon. **39. a)** $x = 2, y = -2$ **b)** $x = -4$ **c)** $x = 17, y = -1$ **41.** $\forall x \forall y \forall z ((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z))$ **43.** $\forall m \forall b (m = 0 \rightarrow \exists x (mx + b = 0 \wedge \forall w (mw + b = 0 \rightarrow w = x)))$ **45. a)** Vrai **b)** Faux **c)** Vrai **47.** $\neg(\exists x \forall y P(x, y)) \leftrightarrow \forall x (\neg\forall y P(x, y)) \leftrightarrow \forall x \exists y \neg P(x, y)$ **49. a)** Supposons que $\forall x P(x) \wedge \exists x Q(x)$ soit vrai. Alors $P(x)$ est vrai pour tout x et il y a un élément y pour lequel $Q(y)$ est vrai. Parce que $P(x) \wedge Q(y)$ est vrai pour tout x et il y a un y pour lequel $Q(y)$ est vrai, $\forall x \exists y (P(x) \wedge Q(y))$ est vrai. Inversement, pose que la deuxième proposition est vraie. Soit x un élément dans le domaine. Il y a un y tel que $Q(y)$ est vrai, donc $\exists xQ(x)$ est vrai. Parce que $\forall xP(x)$ est également vrai, il s'ensuit que le premier la proposition est vraie. **b)** Supposons que $\forall xP(x) \vee \exists xQ(x)$ soit vrai. Soit $P(x)$ est vrai pour tous les x, soit il existe un y pour qui $Q(y)$ est vrai. Dans le premier cas, $P(x) \vee Q(y)$ est vrai pour tout x, donc $\forall x \exists y (P(x) \vee Q(y))$ est vrai. Dans le dernier cas, $Q(y)$ est vrai pour un y particulier, donc $P(x) \vee Q(y)$ est vrai pour tous x et par conséquent $\forall x \exists y (P(x) \vee Q(y))$ est vrai. Inversement, supposons que la deuxième proposition soit vraie. Si $P(x)$ est vrai pour tout x, alors la première proposition est vraie. Sinon, $P(x)$ est faux pour certains x, et pour ce x il doit y avoir un y tel que $P(x) \vee Q(y)$ est vrai. Par conséquent, $Q(y)$ doit être vrai, donc $\exists yQ(y)$ est vrai. Il a suivi bas que la première proposition doit tenir. **51.** Nous montrerons comment une expression peut être mise sous forme normale prénex (PNF) si des sous-expressions peuvent être insérées dans PNF. Ensuite, en travaillant de l'intérieur, toute expression peut être mise en PNF. (À formaliser l'argument, il faut utiliser la méthode de induction structurelle qui sera discutée dans la section 5.3.) Dans l'exercice 45 de la section 1.4, nous pouvons supposer que la proposition utilise uniquement $\vee$ et $\neg$ comme connecteurs logiques. Notez maintenant que tout proposition sans quantificateurs est déjà en PNF. (C'est le cas de base de l'argument.) Supposons maintenant que la proposition est de la forme $QxP(x)$, où Q est un quantificateur. Parce que $P(x)$ est une expression plus courte que la proposition originale, nous pouvons mettez-le dans PNF. Puis Qx suivi de ce PNF est de nouveau en PNF et est équivalent à la proposition originale. Ensuite, supposons que la proposition est de la forme $\neg P$. Si P est déjà dans PNF, nous glissons le signe de négation devant tous les quantificateurs en utilisant le équivalences du tableau 2 de la section 1.4. Enfin, supposez que proposition est de la forme $P \vee Q$, où chacun de P et Q est en PNF. Si un seul de P et Q a des quantificateurs, alors nous pouvons utiliser Exercice 46 dans la section 1.4 pour amener le quantificateur devant tous les deux. Si P et Q ont des quantificateurs, nous pouvons utiliser l'exercice 45 à la section 1.4, exercice 48, ou partie (b) de l'exercice 49 à réécrire $P \vee Q$ avec deux quantificateurs précédant la disjonction d'une proposition de la forme $R \vee S$, puis mettre $R \vee S$ dans PNF.

Section 1.6

1. Modus ponens; valide; la conclusion est vraie, car les hypothèses sont vraies. **3. a)** Addition **b)** Simplification **c)** Modus ponens **d)** Modus tollens **e)** Programme hypothétique GISM **5.** Soit w être « fonctionne Randy dur, » laissez - d être « Randy est un garçon terne, » et laissez - j être « Randy va faire le travail. » Le hypothèses sont w, $w \to d$ et $d \to \neg j$. Utilisation de modus ponens et du deux premières hypothèses, d suit. Utilisation de modus ponens et du dernière hypothèse, $\neg j$, qui est la conclusion souhaitée, "Randy n'obtiendra pas l'emploi », suit. **7.** L'instanciation universelle est utilisé pour conclure que "Si Socrate est un homme, alors Socrate est mortel. "Modus ponens est ensuite utilisé pour conclure que Socrate est mortel. **9. a)** Les conclusions valables sont «Je n'ai pas pris le mardi jour de congé »,« J'ai pris congé jeudi »,« Il a plu jeudi. » **b)** « Je n'a pas mangé d'épices et il n'a pas tonné »est un argument valable clusion. **c)** «Je suis intelligent» est une conclusion valable. **d)** «Ralph n'est pas un CS majeur »est une conclusion valable. **e)** «Que vous achetez beaucoup de choses sont bonnes pour les États-Unis et sont bonnes pour vous "est un conclusion valable. **f)** «Les souris rongent leur nourriture» et «Lapins ne sont pas des rongeurs »sont des conclusions valables. **11.** Supposons que $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont vrais. Nous voulons établir que $q \to r$ est vrai. Si q est faux, alors nous avons fini, vide. Autrement, q est vrai, donc par la validité de la forme d'argument donnée (que chaque fois que $p_1, p_2, \ldots, p_n, q$ sont vrais, alors r doit être vrai), nous sachez que r est vrai. **13. a)** Soit $c(x)$ « x est dans cette classe» $j(x)$ soit « x sait écrire des programmes en JAVA» et $h(x)$ être « x peut obtenir un emploi bien rémunéré.» Les locaux sont c (Doug), j (Doug), $\forall x (j(x) \to h(x))$. Utiliser l'instanciation universelle et la dernière prémisse, $j(\text{Doug}) \to h(\text{Doug})$ suit. Appliquer modus ponens à cette conclusion et à la deuxième prémisse, h (Doug) suit. En utilisant la conjonction et la première prémisse, c (Doug) $\wedge$ h (Doug) suit. Enfin, en utilisant des géné- la conclusion souhaitée, $\exists x (c(x) \wedge h(x))$ suit. **b)** Soit $c(x)$ « x est dans cette classe», $w(x)$ soit « x aime la baleine regarder »et $p(x)$ être« x *se* soucie de la pollution des océans ». Les prémisses sont $\exists x (c(x) \wedge w(x))$ et $\forall x (w(x) \to p(x))$. À partir de la première prémisse, $c(y) \wedge w(y)$ pour une per- fils y. En utilisant la simplification, $w(y)$ suit. En utilisant le sec- deuxième prémisse et instanciation universelle, $w(y) \to p(y)$ suit. En utilisant le modus ponens, $p(y)$ suit, et par con- jonction, $c(y) \wedge p(y)$ suit. Enfin, par la génération existentielle l'éralisation, la conclusion souhaitée, $\exists x (c(x) \wedge p(x))$, bas. **c)** Soit $c(x)$ « x est dans cette classe», $p(x)$ soit « x possède un PC »et $w(x)$ être« x peut utiliser un pro- gramme. "Les prémisses sont $c(\text{Zeke})$, $\forall x (c(x) \to p(x))$, et $\forall x (p(x) \to w(x))$. Utilisation de la deuxième prémisse et universelle l'instanciation, $c(\text{Zeke}) \to p(\text{Zeke})$ suit. Utilisation du premier prémisse et modus ponens, p (Zeke) suit. Utiliser le troisième prémisse et instanciation universelle, $p(\text{Zeke}) \to w(\text{Zeke})$ suit. Enfin, en utilisant le modus ponens, w (Zeke), le conclusion, suit. **d)** Soit $j(x)$ « x est dans le New Jersey» $f(x)$ soit « x vit à moins de 50 milles de l'océan», et $s(x)$ soit « X a vu l'océan.» Les locaux sont $\forall x (j(x) \to f(x))$ et $\exists x (j(x) \wedge \neg s(x))$. La seconde hypothèse et l'existence l'instanciation tielle implique que $j(y) \wedge \neg s(y)$ pour un personne y. Par simplification, $j(y)$ pour cette personne y. En utilisant instanciation universelle et première prémisse, $j(y) \to f(y)$, et par modus ponens, $f(y)$ suit. Par simplification, $\neg s(y)$ découle de $j(y) \wedge \neg s(y)$. Donc $f(y) \wedge \neg s(y)$ suit par con- jonction. Enfin, la conclusion souhaitée, $\exists x (f(x) \wedge \neg s(x))$, s'ensuit une généralisation existentielle. **15. a)** Correct, en utilisant instanciation universelle et modus ponens **b)** invalide; erreur d'affirmer la conclusion **c)** invalide; erreur de nier l'hypothèse **d)** correcte, en utilisant l'instanciation universelle et modus tollens **17.** Nous savons qu'il existe un *certain* x qui fait

$H(x)$ vrai, mais nous ne pouvons pas conclure que Lola est l'un de ces x.

19. a) Erreur dans l'affirmation de la conclusion **b)** Erreur dans la mendicité réponse à la question **c)** Argument valide utilisant le modus tollens **d)** Erreur de nier l'hypothèse **21.** Par le deuxième prémisse, il y a un lion qui ne boit pas de café. Laisser Leo soit une telle créature. Par simplification, nous savons que Leo est un lion. Par modus ponens, nous savons depuis la première prémisse que Leo est féroce. Par conséquent, Leo est féroce et ne boit pas café. Par la définition du quantificateur existentiel, il y a existent des créatures féroces qui ne boivent pas de café, c'est-à-dire les créatures féroces ne boivent pas de café. **23.** L'erreur se produit dans étape (5), car nous ne pouvons pas supposer, comme cela se fait ici, que le c qui rend P vrai est le même que le c qui fait Q vrai. **25.** On nous donne les prémisses $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ et $\neg Q(a)$. Nous voulons montrer $\neg P(a)$. Supposons, au contraire, que $\neg P(a)$ n'est pas vrai. Alors $P(a)$ est vrai. Par conséquent, en versal modus ponens, nous avons $Q(a)$. Mais cela contredit la étant donné le principe $\neg Q(a)$. Par conséquent, notre supposition doit avoir été faux, et donc $\neg P(a)$ est vrai, comme souhaité.

27.

Étape	**Raison**
1. $\forall x(P(x) \wedge R(x))$	Prémisse
2. $P(a) \wedge R(a)$	Instanciation universelle à partir de (1)
3. $P(a)$	Simplification à partir de (2)
4. $\forall x(P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge S(x)))$	Prémisse
5. $Q(a) \wedge S(a)$	Modus ponens universels de (3) et (4)
6. $S(a)$	Simplification à partir de (5)
7. $R(a)$	Simplification à partir de (2)
8. $R(a) \wedge S(a)$	Conjonction de (7) et (6)
9. $\forall x(R(x) \wedge S(x))$	Généralisation universelle à partir de (5)

29.

Étape	**Raison**
1. $\exists x \neg P(x)$	Prémisse
2. $\neg P(c)$	Instanciation existentielle de (1)
3. $\forall x(P(x) \vee Q(x))$	Prémisse
4. $P(c) \vee Q(c)$	Instanciation universelle à partir de (3)
5. $Q(c)$	Syllogisme disjonctif de (4) et (2)
6. $\forall x(\neg Q(x) \vee S(x))$	Local
7. $\neg Q(c) \vee S(c)$	Instanciation universelle à partir de (6)
8. $S(c)$	Syllogisme disjonctif de (5) et (7)
9. $\forall x(R(x) \rightarrow \neg S(x))$	Prémisse
10. $R(c) \rightarrow \neg S(c)$	Instanciation universelle à partir de (9)
11. $\neg R(c)$	Modus tollens de (8) et (10)
12. $\exists x \neg R(x)$	Généralisation existentielle de (11)

31. Soit p «Il pleut»; soit q «Yvette a son parapluie»; soit r «Yvette se mouille». Les hypothèses sont $\neg p \vee q$, $\neg q \vee \neg r$, et $p \vee \neg r$. La résolution sur les deux premiers donne $\neg p \vee \neg r$. Résolution sur ce point et la troisième hypothèse donne $\neg r$, comme souhaité. **33.** Supposons que cette proposition soit satisfaisable. Utilisation de résolution sur les deux premières clauses permet de conclure $q \vee q$; dans en d'autres termes, nous savons que q doit être vrai. Utilisation de la résolution sur les deux dernières clauses nous permettent de conclure $\neg q \vee \neg q$; en d'autre mots, nous savons que $\neg q$ doit être vrai. C'est une contradiction. Cette proposition n'est donc pas satisfaisable. **35.** Valide

Section 1.7

1. Soit $n = 2k + 1$ et $m = 2l + 1$ un entier impair. gers. Alors $n + m = 2(k + l + 1)$ est pair. **3.** Supposons que n est pair. Alors $n = 2k$ pour un entier k. Donc, $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$. Parce que nous avons écrit n^2 comme 2 fois un entier, nous concluons que n^2 est pair. **5.** Direct preuve: Supposons que $m + n$ et $n + p$ sont pairs. Alors $m + n = 2s$ pour certains entiers s et $n + p = 2t$ pour certains entiers t. Si nous additionnez-les, nous obtenons $m + p + 2n = 2s + 2t$. Soustraire $2n$ de des deux côtés et de l'affacturage, nous avons $m + p = 2s + 2t - 2n = 2(s + t - n)$. Parce que nous avons écrit $m + p$ comme 2 fois un entier, nous concluons que $m + p$ est pair. **7.** Parce que n est impair, nous pouvons écrire $n = 2k + 1$ pour un entier k. alors $(k+1)^2 - k^2 = k^2 + 2k + 1 - k^2 = 2k + 1 = n$. **9.** Supposons que r est rationnel et i est irrationnel et $s = r + i$ est rationnel. Ensuite, par l'exemple 7, $s + (-r) = i$ est rationnel, ce qui est une contre-diction. **11.** Parce que $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ est rationnel et $\sqrt{2}$ est irra-tionnel, le produit de deux nombres irrationnels n'est pas nécessairement irrationnel. **13.** Preuve par contraposition: si $1/x$ était rationnel, puis par définition $1/x = p/q$ pour certains entiers p et q avec $q = 0$. Parce que $1/x$ ne peut pas être 0 (si c'était le cas, alors nous aurions la contradiction $1 = x \cdot 0$ en multipliant les deux côtés par x), nous sachez que $p = 0$. Maintenant $x = 1/(1/x) = 1/(p/q) = q/p$ par le règles habituelles d'algèbre et d'arithmétique. Par conséquent, x peut être écrit comme le quotient de deux entiers avec le dénominateur non nul. Ainsi, par définition, x est rationnel. **15.** Supposons qu'il ne soit pas vrai que $x \geq 1$ ou $y \geq 1$. Alors $x < 1$ et $y < 1$. En ajoutant ces deux inégalités, on obtient $x + y < 2$, qui est la négation de $x + y \geq 2$. **17. a)** Supposons que n est impair, donc $n = 2k + 1$ pour un entier k. Alors $n^3 + 5 = 2(4k^3 + 6k^2 + 3k + 3)$. Car $n^3 + 5$ est deux fois un entier, il est pair. **b)** Supposons que $n^3 + 5$ est impair et n est impair. Parce que n est impair et que le produit uct de deux nombres impairs est impair, il s'ensuit que n^2 est impair et alors que n^3 est impair. Mais alors $5 = (n^3 + 5) - n^3$ aurait être pair car c'est la différence de deux nombres impairs. Par conséquent, la supposition que $n^3 + 5$ et n étaient tous deux impairs est faux. **19.** La proposition est vide car 0 est pas un entier positif. Preuve vide. **21.** $P(1)$ est vrai cause $(a + b)^1 = a + b \geq a^1 + b^1 = a + b$. Preuve directe. **23.** Si nous avons choisi 9 jours ou moins chaque jour de la semaine, cela représenterait au plus $9{,}7 = 63$ jours. Mais nous avons choisi 64 journées. Cette contradiction montre qu'au moins 10 des jours où nous choisi doit être le même jour de la semaine. **25.** Supposons que manière de contradiction que a/b est une racine rationnelle, où a et b sont des entiers et cette fraction est en termes les plus bas (c'est-à-dire, a et b n'ont pas de diviseur commun supérieur à 1). Branchez cette proposition racine dans l'équation pour obtenir $un^3/b^3 + a/b + 1 = 0$. Multiply par l' intermédiaire de b^3 pour obtenir $un^3 + ab^2 + b^3 = 0$. Si un et b sont tous les deux impairs, alors le côté gauche est la somme de trois impairs et doit donc être impair. Si a est impair et b est pair, alors le côté gauche est impair + pair + pair, ce qui est encore impair. De même, si a est pair et b est impair, alors le côté gauche le côté est pair + pair + impair, ce qui est à nouveau impair. Parce que le la fraction a / b est en termes plus simples, il ne peut pas arriver que les deux a et b sont pairs. Ainsi, dans tous les cas, le côté gauche est étrange, et ne peut donc pas être égal à 0. Cette contradiction montre que aucune racine n'existe. **27.** Premièrement, supposons que n est impair, de sorte que $n = 2k + 1$ pour un entier k. Alors $5n + 6 = 5(2k + 1) + 6 = 10k + 11 = 2(5k + 5) + 1$. Par conséquent, $5n + 6$ est impair. Prouver l'inverse, supposons que n est pair, de sorte que $n = 2k$ pour certains entier k. Alors $5n + 6 = 10k + 6 = 2(5k + 3)$, donc $5n + 6$ est même. Par conséquent, n est impair si et seulement si $5n + 6$ est impair. **29.** Cette la proposition est vraie. Supposons que m ne soit ni 1 ni -1. alors mn a un facteur m supérieur à 1. Par contre, $mn = 1$, et 1 n'a pas un tel facteur. Par conséquent, $m = 1$ ou $m = -1$. dans le premier cas $n = 1$, et dans le second cas $n = -1$, car $n = 1/m$. **31.** Nous prouvons que tous ceux-ci sont équivalents à x être égal. Si x est pair, alors $x = 2k$ pour un entier k. Là-avant $3x + 2 = 3 \cdot 2k + 2 = 6k + 2 = 2(3k + 1)$, ce qui est pair, car il a été écrit sous la forme $2t$, où $t = 3k + 1$. De même, $x + 5 = 2k + 5 = 2k + 4 + 1 = 2(k + 2) + 1$, donc $x + 5$ est impair; et $x^2 = (2k)^2 = 2(2k^2)$, donc x^2 est même. Pour les converses, nous utiliserons une preuve par contre-position. Supposons donc que x n'est pas pair; donc x est impair et nous pouvons écrire $x = 2k + 1$ pour un entier k. alors $3x + 2 = 3(2k + 1) + 2 = 6k + 5 = 2(3k + 2) + 1$, ce qui est impair (c'est-à-dire pas même), car il a été écrit sous la forme $2t + 1$, où $t = 3k + 2$. De même, $x + 5 = 2k + 1 + 5 = 2(k + 3)$, donc $x + 5$ est pair (c'est-à-dire pas impair). Que x^2 est étrange était déjà prouvé dans l'exemple 1. **33.** Nous donnons des preuves par contraposition de $(i) \to (ii)$, $(ii) \to (i)$, $(i) \to (iii)$ et $(iii) \to (i)$. Pour le premier, supposons que $3x + 2$ est rationnel, à savoir, égal à p / q pour certains entiers p et q avec $q = 0$. Ensuite, nous peut écrire $x = ((p / q) - 2) / 3 = (p - 2q) / (3q)$, où $3q = 0$. Cela montre que x est rationnel. Pour la deuxième condition tionnelle, supposons que x soit rationnel, à savoir égal à p / q pour certains entiers p et q avec $q = 0$. Ensuite, nous pouvons écrire $3x + 2 = (3p + 2q) / q$, où $q = 0$. Cela montre que $3x + 2$ est rationnel. Pour la troisième instruction conditionnelle, supposons que $x / 2$ est rationnel, à savoir, égal à p / q pour certains entiers p et q avec $q = 0$. Ensuite, nous pouvons écrire $x = 2p / q$, où $q = 0$. Ce montre que x est rationnel. Et pour le quatrième état conditionnel-ment, supposons que x soit rationnel, à savoir égal à p / q pour certains les entiers p et q avec $q = 0$. On peut alors écrire $x / 2 = p / (2q)$, où $2q = 0$. Cela montre que $x / 2$ est rationnel. **35.** Non **37.** Supposons que $p_1 \to p_4 \to p_2 \to p_5 \to p_3 \to p_1$. À prouver qu'une de ces propositions implique l'une des autres, il suffit d'utiliser le syllogisme hypothétique à plusieurs reprises. **39.** Nous donnerons une preuve par contradiction. Supposons que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont tous inférieur à A, où A est la moyenne de ces nombres. alors $a_1 + a_2 + \cdots + a_n < nA$. Diviser les deux côtés par n spectacles que $A = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) / n < A$, ce qui est un tion. **41.** Nous montrerons que les quatre déclarations sont équivalentes alentour en montrant que (i) implique (ii), (ii) implique (iii), (iii) implique (iv) et (iv) implique (i). Supposons d'abord que n est pair. Alors $n = 2k$ pour un entier k. Alors $n + 1 = 2k + 1$, donc $n + 1$ est impair. Cela montre que (i) implique (ii). Ensuite, supposons que $n + 1$ est impair, donc $n + 1 = 2k + 1$ pour un entier k. Alors $3n + 1 = 2n + (n + 1) = 2(n + k) + 1$, ce qui montre que $3n + 1$ est impair, montrant que (ii) implique (iii). Prochain, supposons que $3n + 1$ est impair, donc $3n + 1 = 2k + 1$ pour certains entier k. Alors $3n = (2k + 1) - 1 = 2k$, donc $3n$ est pair. Cela montre que (iii) implique (iv). Enfin, supposons que n soit pas même. Alors n est impair, donc $n = 2k + 1$ pour un entier k. Alors $3n = 3(2k + 1) = 6k + 3 = 2(3k + 1) + 1$, donc $3n$ est impair. Ceci complète une preuve par opposition que (iv) implique (i).

Section 1.8

1. $1^2 + 1 = 2 \geq 2 = 2^1$; $2^2 + 1 = 5 \geq 4 = 2^2$; $3^2 + 1 = 10 \geq 8 = 2^3$; $4^2 + 1 = 17 \geq 16 = 2^4$ **3.** Si $x \leq y$, alors $\max(x, y) + \min(x, y) = y + x = x + y$. Si $x \geq y$, alors $\max(x, y) + \min(x, y) = x + y$. Parce que ce sont les deux seuls cas, l'égalité est toujours valable. **5.** Parce que $|x - y| = |y - x|$, les valeurs de x et y sont interchangeables capable. Par conséquent, sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $x \geq y$. Alors $(x + y - (x - y)) / 2 = (x + y - x + y) / 2 = 2y / 2 = y = \min(x, y)$. De même, $(x + y + (x - y)) / 2 = (x + y + x - y) / 2 = 2x / 2 = x = \max(x, y)$.

7. Il y a quatre cas. *Cas 1:* $x \geq 0$ et $y \geq 0$. Alors $|x| + |y| = x + y = |x + y|$. *Cas 2:* $x < 0$ et $y < 0$. Alors $|x| + |y| = -x + (-y) = -(x + y) = |x + y|$ car $x + y < 0$. *Cas 3:* $x \geq 0$ et $y < 0$. Alors $|x| + |y| = x + (-y)$. Si $x \geq -y$, alors $|x + y| = x + y$. Mais parce que $y < 0$, $-y > y$, donc $|x| + |y| = x + (-y) > x + y = |x + y|$. Si $x < -y$, alors $|x + y| = -(x + y) = -x + (-y)$. Mais parce que $x \geq 0$, $x \geq -x$, donc $|x| + |y| = x + (-y) \geq -x + (-y) = |x + y|$. *Cas 4:* $x < 0$ et $y \geq 0$. Identique à 3 cas avec les rôles de x et y re versé. **9.** 10 001, 10 002, ..., 10 100 sont tous des non-carrés, parce que $100^2 = 10,000$ et $101^2 = 10,201$; constructif. **11.** $8 = 2^3$ et $9 = 3^2$ **13.** Soit $x = \sqrt{2}$ et $y = \sqrt{2}$. Si $x^y = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est irrationnel, nous avons terminé. Sinon, alors $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $y = \sqrt{2} / 4$. Alors $x^y = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2} / \text{quatre}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2}) / 4} = \sqrt{2}^{1/2} = \sqrt{2}$.
15. **a)** Cette affirmation affirme l'existence de x avec un certain propriété. Si nous laissons $y = x$, alors nous voyons que $P(x)$ est vrai. Si y est autre chose que x, alors $P(x)$ n'est pas vrai. Ainsi, x est le élément unique qui rend P vrai. **b)** La première clause ici dit qu'il y a un élément qui rend P vrai. La deuxième clause dit que chaque fois que deux éléments font tous les deux P vrai, ils sont en fait le même élément. Ensemble, ceux-ci disent que P est satisfaite par exactement un élément. **c)** Cette déclaration affirme l'existence d'un x qui rend P vrai et a le plus propriété que chaque fois que nous trouvons un élément qui rend P vrai, cet élément est x. En d'autres termes, x est l'élément unique qui rend P vrai. **17.** L'équation $|a - c| = |b - c|$ est équivalent proche de la disjonction de deux équations: $a - c = b - c$ ou $a - c = -b + c$. Le premier est équivalent à $a = b$, ce qui contredit les hypothèses formulées dans ce problème, donc l'équation d'origine équivaut à $a - c = -b + c$. Par en ajoutant $b + c$ des deux côtés et en divisant par 2, nous voyons que cela l'équation est équivalente à $c = (a + b) / 2$. Ainsi, il y a un

solution unique. De plus, ce c est un entier, car le la somme des entiers impairs a et b est paire. **19.** Nous sommes demandé de résoudre $n = (k - 2) + (k + 3)$ pour k. En utilisant l'habituel, réversible, les règles de l'algèbre, nous voyons que cette équation est équiva-alentour à $k = (n - 1) / 2$. En d'autres termes, c'est celui et seule valeur de k qui rend notre équation vraie. Parce que n est impair, $n - 1$ est pair, donc k est un entier. **21.** Si x est lui-même un entier, alors on peut prendre $n = x$ et $\epsilon = 0$. Aucune autre solution n'est possible dans ce cas, car si l'entier n est supérieur à x, alors n est au moins $x + 1$, ce qui ferait $\epsilon \geq 1$. Si x n'est pas un entier, puis arrondissez-le à l'entier suivant, et appelez cela entier n. Soit $\epsilon = n - x$. Clairement $0 \leq \epsilon < 1$; c'est le seulement ϵ qui fonctionnera avec ce n, et n ne peut pas être plus grand, car ϵ est contraint à être inférieur à 1. **23.** L'harmonique moyenne des nombres réels positifs distincts x et y est toujours inférieure que leur moyenne géométrique. Pour prouver $2xy / (x + y) < \sqrt{xy}$, multipliez les deux côtés par $(x + y) / (2\sqrt{xy})$ pour obtenir l'équivalent inégalité environnante $\sqrt{xy} < (x + y) / 2$, ce qui est prouvé dans Exemple 14. **25.** La parité (impaire ou régularité) de la somme des nombres inscrits au tableau ne change jamais, car $j + k$ et $|j - k|$ ont la même parité (et à chaque étape nous réduire la somme de $j + k$ mais l'augmenter de $|j - k|$). Là-avant l'entier à la fin du processus doit avoir le même parité comme $1 + 2 + \cdots + (2n) = n(2n + 1)$, ce qui est impair parce que n est impair. **27.** Sans perte de généralité, nous pouvons supposons que n est non négatif, parce que la quatrième puissance d'un entier et la quatrième puissance de son négatif sont les mêmes. nous diviser un entier positif arbitraire n par 10, en obtenant un patient k et reste l, d'où $n = 10k + l$, et l est un entier compris entre 0 et 9 inclus. Ensuite, nous calculons n^4 en chacun de ces 10 cas. Nous obtenons les valeurs suivantes, où X est un entier qui est un multiple de 10, dont la valeur exacte nous ne vous inquiétez pas de. $(10k + 0)^4 = 10,000k^4 = 10,000k^4 + 0$,
$(10k + 1)^4 = 10,000k^4 + X \cdot k^3 + X \cdot k^2 + X \cdot k + 1$,
$(10k + 2)^4 = 10,000k^4 + X \cdot k^3 + X \cdot k^2 + X \cdot k + 16$,
$(10k + 3)^4 = 10,000k^4 + X \cdot k^3 + X \cdot k^2 + X \cdot k + 81$,
$(10k + 4)^4 = 10,000k^4 + X \cdot k^3 + X \cdot k^2 + X \cdot k + 256$,
$(10k + 5)^4 = 10,000k^4 + X \cdot k^3 + X \cdot k^2 + X \cdot k + 625$,
$(10k + 6)^4 = 10,000k^4 + X \cdot k^3 + X \cdot k^2 + X \cdot k + 1296$,
$(10k + 7)^4 = 10,000k^4 + X \cdot k^3 + X \cdot k^2 + X \cdot k + 2401$,
$(10k + 8)^4 = 10,000k^4 + X \cdot k^3 + X \cdot k^2 + X \cdot k + 4096$,
$(10k + 9)^4 = 10,000k^4 + X \cdot k^3 + X \cdot k^2 + X \cdot k + 6561$.

Parce que chaque coefficient indiqué par X est un multiple de 10, le terme correspondant n'a aucun effet sur le chiffre de l'un répondre. Par conséquent, les chiffres sont 0, 1, 6, 1, 6, 5, 6, 1, 6, 1, respectivement, donc c'est toujours un 0, 1, 5 ou 6. **29.** Parce que $n^3 > 100$ pour tout $n > 4$, il suffit de noter que $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ et $n = 4$ ne satisfont pas $n^2 + n^3 = 100$.

31. Parce que $5^4 = 625$, x et y doivent être inférieurs à 5. Alors $x^4 + y^4 \leq 4^4 + 4^4 = 512 < 625$. **33.** Si ce n'est pas $\sqrt{}$

entier itif et a et c sont des entiers avec $a < c$. En particulier, $(a + 1) / b \leq c / b$. Ainsi, $x = (a + \frac{1}{2}\sqrt{2}) / b$ est entre les deux étant donné des nombres rationnels, parce que $0 < \sqrt{2} < 2$. De plus, x est irrationnel, car si x était rationnel, alors $2(bx - a) = \sqrt{2}$ serait également contraire à l'exemple 10 de la section 1.7. **37.** **a)** Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que x la séquence est déjà triée par ordre non décroissant, car nous pouvons renommer les indices. Il n'y a qu'un nombre fini de ordonnances possibles pour la séquence y, donc si nous pouvons montrer que nous pouvons augmenter la somme (ou du moins la maintenir) quand-jamais nous trouvons y_i et y_j qui sont hors service (c'est-à-dire, $i < j$ mais $y_i > y_j$) en les commutant, alors nous aurons montré que la somme est la plus grande lorsque la séquence y est en non décroissante commande. En effet, si nous effectuons le swap, nous avons ajouté $x_i y_j + x_j y_i$ à la somme et soustrait $x_i y_i + x_j y_j$. le l'effet net est d'avoir ajouté $x_i y_j + x_j y_i - x_i y_i - x_j y_j = (x_j - x_i)(y_i - y_j)$, ce qui est non négatif par notre ordre de commande-les suppositions. **b)** Similaire à la partie (a) **39.** **a)** $6 \rightarrow 3 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ **b)** $7 \rightarrow 22 \rightarrow 11 \rightarrow 34 \rightarrow 17 \rightarrow 52 \rightarrow 26 \rightarrow 13 \rightarrow 40 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ **c)** $17 \rightarrow 52 \rightarrow 26 \rightarrow 13 \rightarrow 40 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$
d) $21 \rightarrow 64 \rightarrow 32 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ **41.** Sans perte de généralité, supposons que le coin supérieur gauche et le coin supérieur droit les coins de la planche sont supprimés. Placez trois dominos hor-pour remplir la partie restante de la première ligne et remplir chacune des sept autres rangées avec quatre dominos horizontaux.
43. Parce qu'il y a un nombre pair de carrés en tout, soit il y a un nombre pair de carrés dans chaque rangée ou il y a un nombre pair de carrés dans chaque colonne. Dans le cas précédent, carreler le tableau de la manière la plus évidente en plaçant les dominos izontalement, et dans ce dernier cas, tuiler la planche de façon évidente manière en plaçant les dominos verticalement. **45.** Nous pouvons faire pivoter le conseil si nécessaire pour que les carrés supprimés soient 1 et 16. Le carré 2 doit être recouvert d'un domino. Si ce domino est placé pour couvrir les carrés 2 et 6, puis le domino suivant les placements sont forcés successivement: 5-9, 13-14 et 10-11, à quel point il n'y a aucun moyen de couvrir le carré 15. Sinon, le carré 2 doit être recouvert d'un domino placé en 2-3. alors les placements de dominos suivants sont forcés: 4-8, 11-12, 6-7, 5-9 et 10-14, et encore une fois il n'y a aucun moyen de couvrir le carré 15.
47. Retirez les deux carrés noirs adjacents à un coin blanc, et supprimez deux carrés blancs autres que ce coin. Alors non domino peut couvrir ce coin blanc.

49. **a)**

(1) (2) (3) (4) (5)

vrai que $a \le \sqrt[3]{n}$, $b \le \sqrt[3]{n}$, ou $c \le \sqrt[3]{n}$, puis $a > \sqrt[3]{n}$, $b > \sqrt[3]{n}$ et $c > \sqrt[3]{n}$. Multipliant ces inégalités de des nombres positifs ensemble, nous obtenons $abc < (\sqrt[3]{n})^3 = n$, ce qui implique la négation de notre hypothèse que $n = abc$. **35.** En trouvant un dénominateur commun, nous pouvons supposer que les nombres rationnels donnés sont a / b et c / b , où b est un

b) L'image montre des pavages pour les quatre premiers motifs.

1 3

2 4

Pour montrer que le motif 5 ne peut pas carreler le damier, étiquetez le carrés de 1 à 64, une rangée à la fois à partir du haut, à partir de la gauche à droite dans chaque rangée. Ainsi, le carré 1 est le coin supérieur gauche, et le carré 64 est en bas à droite. Supposons que nous ayons un carrelage. Par symétrie et sans perte de généralité, on peut supposer que la tuile est positionnée dans le coin supérieur gauche, couvrant carrés 1, 2, 10 et 11. Cela force une tuile à être adjacente à à droite, couvrant les cases 3, 4, 12 et 13. Continuez en de cette manière et nous sommes obligés d'avoir une tuile couvrant les carrés 6, 7, 15 et 16. Cela rend impossible de couvrir le carré 8. Ainsi, aucun carrelage n'est possible.

Exercices supplémentaires

1. **a)** $q \to p$ **b)** $q \wedge p$ **c)** $\neg q \vee \neg p$ **d)** $q \leftrightarrow p$ **3.** **a)** Le la proposition ne peut être fausse que si $\neg p$ est faux, donc p est vrai. Si p est vrai et q est vrai, alors $\neg q \wedge (p \to q)$ est faux, donc le l'instruction conditionnelle est vraie. Si p est vrai et q est faux, alors $p \to q$ est faux, donc $\neg q \wedge (p \to q)$ est faux et le conditionnel déclaration est vraie. **b)** La proposition ne peut être fausse que si q est faux. Si q est faux et p est vrai, alors $(p \vee q) \wedge \neg p$ est false et l'instruction conditionnelle est vraie. Si q est faux et p est faux, alors $(p \vee q) \wedge \neg p$ est faux, et l'état conditionnel-

ils sont contradictoires. Il est donc (vide) vrai que chaque fois que toutes les prémisses sont vraies, la conclusion est également true, ce qui par définition en fait un argument valide. Être- parce que les prémisses ne sont pas toutes les deux vraies, nous ne pouvons pas conclure que la conclusion est vraie. **19.** Utilisez les mêmes propositions comme indiqué dans la section 1.3 pour un puzzle Sudoku 9 × 9, avec les variables indexées de 1 à 16, au lieu de 1 à 9, et avec un changement similaire pour les propositions 4 × 4 blocs: $\bigwedge_{r=0}^{3} \bigwedge_{s=0}^{3} \bigwedge_{n=1}^{16} \bigvee_{i=1}^{4} \bigvee_{j=1}^{4} p(4r+i, 4s+j, n)$. **21.** **a)** F **b)** T **c)** F **d)** T **e)** F **f)** T **23.** De nombreux les swers sont possibles. Les sénateurs américains en sont un exemple. **25.** $\forall x \exists y \exists z (y = z \wedge \forall w (P(w, x) \leftrightarrow (w = y \vee w = z))))$ **27.** **a)** $\neg\exists x P(x)$ **b)** $\exists x (P(x) \wedge \forall y (P(y) \to y = x))$ **c)** $\exists x_1 \exists x_2 (P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge x_1 = x_2 \wedge \forall y (P(y) \to (y = x_1 \vee y = x_2)))$ **d)** $\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 (P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge P(x_3) \wedge x_1 = x_2 \wedge x_1 = x_3 \wedge x_2 = x_3 \wedge \forall y (P(y) \to (y = x_1 \vee y = x_2 \vee y = x_3)))$ **29.** Supposons que $\exists x (P(x) \to Q(x))$ est vrai. Soit $Q(x_0)$ est vrai pour certains x_0 , auquel cas $\forall x P(x) \to \exists x Q(x)$ est vrai; ou $P(x_0)$ est faux pour certains x_0 , auquel cas $\forall x P(x) \to \exists x Q(x)$ est vrai. Inversement, supposons que $\exists x (P(x) \to Q(x))$ soit faux. Cela signifie que $\forall x (P(x) \wedge \neg Q(x))$ est vrai, ce qui implique $\forall x P(x)$ et $\forall x (\neg Q(x))$. Cette dernière proposition est équivalente à $\neg\exists x Q(x)$. Ainsi, $\forall x P(x) \to \exists x Q(x)$ est faux. **31.** Non **33.** $\forall x \forall z \exists y T(x, y, z)$, où $T(x, y, z)$ est l'énoncé cet étudiant x a pris la classe y dans le département z , où les domaines sont l'ensemble des élèves de la classe, l'ensemble des cours dans cette université, et l'ensemble des départements du école de sciences mathématiques **35.** $\exists! x \exists! y T(x, y)$ et $\exists x \forall z ((\exists y \forall w (T(z, w) \leftrightarrow w = y)) \leftrightarrow z = x)$, où $T(x, y)$ signifie que l'étudiant x a pris la classe y et que le domaine est tout élèves de cette classe **37.** $P(a) \to Q(a)$ et $Q(a) \to R(a)$ par instanciation universelle; puis $\neg Q(a)$ par modus tollens et $\neg P(a)$ par modus tollens **39.** Nous donnons une preuve par contraposition et montrer que si $\sqrt{x}$ est rationnel, alors x est rationnel, en supposant tout au long de ce $x \ge 0$. Supposons que $\sqrt{x} = p / q$ est rationnel, $q \ne 0$. Alors $x = (\sqrt{x})^2 = p^2 / q^2$ est également rationnel (q^2 est à nouveau différent de zéro). **41.** Nous pouvons apporter une preuve constructive en laissant $m = 10^{500} + 1$. Alors $m^2 = (10^{500} + 1)^2 > (10^{500})^2 = 10^{1000}$.

ment est vrai. **5.** $\neg q \rightarrow \neg p$; $p \rightarrow q$; $\neg p \rightarrow \neg q$ **7.** $(p \wedge q \wedge r \wedge \neg s) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) \vee (p \wedge \neg q \wedge r \wedge s) \vee (\neg p \wedge q \wedge r \wedge s)$ **9.** Traduire ces déclarations en symboles, en utilisant les lettres évidentes, nous avons $\neg t \rightarrow \neg g$, $\neg g \rightarrow \neg q$, $r \rightarrow q$ et $\neg t \wedge r$. Supposons que l'état- sont cohérents. La quatrième déclaration nous dit que $\neg t$ doit être vrai. Par conséquent, par modus ponens avec le premier état- ment, nous savons que $\neg g$ est vrai, donc (à partir du deuxième énoncé ment), que $\neg q$ est vrai. En outre, la quatrième déclaration nous dit que r doit être vrai, et donc encore modus ponens (troisième état- ment) rend q vrai. C'est une contradiction: $q \wedge \neg q$. Donc les déclarations sont incohérentes. **11.** Rejeter-accepter-rejeter- accepter, accepter-accepter-accepter-accepter, accepter-accepter-rejeter- accepter, rejeter-rejeter-rejeter-rejeter, rejeter-rejeter-accepter-rejeter, et rejeter-accepter-accepter-accepter **13.** Aaron est un valet et Le cristal est un chevalier; on ne peut pas déterminer ce qu'est Bohan. **15.** Brenda **17.** Les prémisses ne peuvent pas être toutes les deux vraies, car

43. 23 ne peut pas être écrit comme la somme de huit cubes. **45.** 223 ne peut pas être écrit comme la somme de 36 cinquièmes pouvoirs.

CHAPITRE 2

Section 2.1

1. a) $\{-1, 1\}$ **b)** $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ **c)** $\{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81\}$ **d)** $\varnothing$ **3. a)** Le premier est un sous-ensemble des deuxième, mais le second n'est pas un sous-ensemble du premier. **b)** Ni est un sous-ensemble de l'autre. **c)** Le premier est un sous-ensemble du sec- deuxième, mais le second n'est pas un sous-ensemble du premier. **5. a)** Oui **b)** Non **c)** Non **7. a)** Oui **b)** Non **c)** Oui **d)** Non **e)** Non **f)** Non **9. a)** Faux **b)** Faux **c)** Faux **d)** Vrai **e)** Faux **f)** Faux **g)** Vrai **11. a)** Vrai **b)** Vrai **c)** Faux **d)** Vrai **e)** Vrai **f)** Faux

Page 13

13.

janvier
février
Mai
juin
Mars
avril
juillet
septembre
octobre
août
novembre
décembre

15. Les points dans certaines régions indiquent que ces régions sont pas vide.

UNE
B
C
U

17. Supposons que $x \in A$. Parce que $A \subseteq B$, cela implique que $x \in B$. Parce que $B \subseteq C$, on voit que $x \in C$. Car $x \in A$ implique que $x \in C$, il en résulte que $A \subseteq C$. **19. a)** 1 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3 **21. a)** $\{\varnothing, \{a\}\}$ **b)** $\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ **c)** $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$ **23. a)** 8 **b)** 16 **c)** 2 **25.** Pour la partie «si», étant donné $A \subseteq B$, nous voulons montrer que $P(A) \subseteq P(B)$, par exemple, si $C \subseteq A$ puis $C \subseteq B$. Mais cette directement à partir de l'exercice 17. Pour la partie «seulement si», que $P(A) \subseteq P(B)$, nous voulons montrer que $A \subseteq B$. Supposer $un \in A$. Alors $\{a\} \subseteq A$, donc $\{a\} \in P(A)$. Puisque $P(A) \subseteq P(B)$,

Deuxièmement, supposons que $a = b$. Alors $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}\}$, un ensemble avec un élément. Par conséquent, $\{\{c\}, \{c, d\}\}$ n'a qu'un seul élément, ce qui ne peut se produire que lorsque $c = d$, et l'ensemble est $\{\{c\}\}$. Alors s'ensuit que $a = c$ et $b = d$. **47.** Soit $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Représente chaque sous-ensemble de S avec une chaîne de bits de longueur n , où le i - ième bit est égal à 1 si et seulement si $un_i \in S$. Pour générer tous les sous-ensembles de S , liste tous les 2^n chaînes de bits de longueur n (par exemple, en augmentant ordre) et notez les sous-ensembles correspondants.

Section 2.2

1. a) L'ensemble des élèves qui vivent à moins d'un mile de l'école et marcher jusqu'aux classes **b)** L'ensemble des élèves qui vivent dans un mile de l'école ou à pied pour les cours (ou les deux) **c)** Le ensemble d'élèves qui vivent à moins d'un mile de l'école, mais ne marchez pas en classe **d)** L'ensemble des élèves qui marchent aux cours, mais vivent à plus d'un mile de l'école

3. a) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ **b)** $\{3\}$ **c)** $\{1, 2, 4, 5\}$ **d)** $\{0, 6\}$ **5.** $A = \{x \mid \neg(x \in A)\} = \{x \mid \neg(\neg x \in A)\} = \{x \mid x \in A\} = A$

7. a) $A \cup U = \{x \mid x \in A \vee x \in U\} = \{x \mid x \in A \vee \mathbf{T}\} = \{x \mid \mathbf{T}\} = U$ **b)** $A \cap \varnothing = \{x \mid x \in A \wedge x \in \varnothing\} = \{x \mid x \in A \wedge \mathbf{F}\} = \{x \mid \mathbf{F}\} = \varnothing$ **9. a)** $A \cup A = \{x \mid x \in A \vee x \in A\} = U$

b) $A \cap A = \{x \mid x \in A \wedge x \in A\} = \varnothing$ **11. a)** $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\} = \{x \mid x \in B \vee x \in A\} = B \cup A$

b) $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\} = \{x \mid x \in B \wedge x \in A\} = B \cap A$ **13.** Supposons que $x \in A \cap (A \cup B)$. Alors $x \in A$ et $x \in A \cup B$ par la définition de l'intersection. Parce que $x \in A$, il en résulte que $\{ a \} \in P(B)$, ce qui signifie que $\{ a \} \subseteq B$. Mais cela implique *un* $\in B$, comme souhaité. **27. a)** $\{ (a, y) , (b, y) , (c, y) , (d, y) , (a, z) , (b, z) , (c, z) , (d, z) \}$ **b)** $\{ (y, a) , (y, b) , (y, c) , (y, d) , (z, a) , (z, b) , (z, c) , (z, d) \}$ **29.** L'ensemble des triplets (a, b, c) , où a est une compagnie aérienne et b et c sont des villes. Un sous-ensemble utile de cet ensemble est l'ensemble des triplets (a, b, c) pour qui a vole entre b et c . **31.** $\varnothing \times A = \{ (x, y) \mid x \in \varnothing$ et $y \in A \} = \varnothing = \{ (x, y) \mid x \in A$ et $y \in \varnothing\} = A \times \varnothing$

33. a) $\{ (0, 0), (0, 1), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (1, 3), (3, 0), (3, 1), (3, 3) \}$ **b)** $\{ (1, 1), (1, 2), (1, a), (1, b), (2, 1), (2, 2), (2, a), (2, b), (a, 1), (a, 2), (a, a), (a, b), (b, 1), (b, 2), (b, a), (b, b) \}$

35. mn **37.** m^n **39.** Les éléments de $A \times B \times C$ sont constitués de 3-tuples (a, b, c) , où $a \in A$, $b \in B$ et $c \in C$, alors que les éléments de $(A \times B) \times C$ ressemblent à $((a, b), c)$ - ordonné paires, dont la première coordonnée est à nouveau une paire ordonnée. **41. a)** Le carré d'un nombre réel n'est jamais -1. Vrai **b)** Là existe un entier dont le carré est 2. Faux **c)** Le carré de chaque entier est positif. Faux **d)** Il existe un nombre réel égal à sa propre place. Vrai **43. a)** $\{-1 , 0 , 1\}$ **b)** **Z** - $\{0 , 1\}$ **c)** $\varnothing$ **45.** Nous devons montrer que $\{\{ a \} , \{ a, b \}\} = \{\{ c \} , \{ c, d \}\}$ si et seulement si $a = c$ et $b = d$. La partie «si» est immédiate. Donc supposons que ces deux ensembles sont égaux. Considérons d'abord le cas où $a = b$. Alors $\{\{ a \} , \{ a, b \}\}$ contient exactement deux éléments, un dont contient un élément. Ainsi, $\{\{ c \} , \{ c, d \}\}$ doit avoir la même propriété, donc $c = d$ et $\{ c \}$ est l'élément contenant exactement un élément. Par conséquent, $\{ a \} = \{ c \}$, ce qui implique que $a = c$. De plus, les ensembles à deux éléments $\{ a, b \}$ et $\{ c, d \}$ doivent être égal. Parce *que* $a = c$ et $a = b$, il s'ensuit que $b = d$.

nous avons prouvé que le côté gauche est un sous-ensemble du côté droit côté. Inversement, soit $x \in A$. Ensuite, par la définition de union, $x \in A \cup B$ également. Donc $x \in A \cap (A \cup B)$ par la définition de l'intersection, donc le côté droit est un sous-ensemble du côté gauche. **15. a)** $x \in A \cup B \equiv x \in A \cup B \equiv \neg (x \in A \vee x \in B) \equiv \neg (x \in A) \wedge \neg (x \in B) \equiv x \in A \wedge x \in B \equiv x \in A \wedge x \in B \equiv x \in A \cap B$

b) *AB*		***A* ∪ *B***	***A* ∪ *B***	***UN B***		***A* ∩ *B***
1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1

17. a) $x \in A \cap B \cap C \equiv x \in A \cap B \cap C \equiv x \in A \vee x \in B \vee x \in C \equiv x \in A \vee x \in B \vee x \in C \equiv x \in A \cup B \cup C$

b)

ABCA* ∩ *B* ∩ *CA* ∩ *B* ∩ *CABCA* ∪ *B* ∪ *C				
1 1 1	1	0	0 0 0	0
1 1 0	0	1	0 0 1	1
1 0 1	0	1	0 1 0	1
1 0 0	0	1	0 1 1	1
0 1 1	0	1	1 0 0	1
0 1 0	0	1	1 0 1	1
0 0 1	0	1	1 1 0	1
0 0 0	0	1	1 1 1	1

19. a) Les deux côtés sont égaux $\{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$. **b)** $A = A \cap U = A \cap (B \cup B) = (A \cap B) \cup (A \cap B)$ **21.** $x \in A \cup (B \cup C) \equiv (x \in A) \vee (x \in (B \cup C)) \equiv (x \in A) \vee (x \in B \vee x \in C) \equiv (x \in A \vee x \in B) \vee (x \in C) \equiv x \in (A \cup B) \cup C$

23. $x \in A \cup (B \cap C) \equiv (x \in A) \vee (x \in (B \cap C)) \equiv (x \in A) \vee (x \in B \wedge x \in C) \equiv (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \equiv x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

25. a) $\{4 , 6\}$ **b)** $\{0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10\}$ **c)** $\{4 , 5 , 6 , 8 , 10\}$ **d)** $\{0 , 2 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10\}$ **27. a)** La partie à double ombrage est l'ensemble souhaité.

UNE *B*

C

b) L'ensemble souhaité est la partie ombrée entière.

b) 11 1110 0000 0000 0000 0000 0000 ∧ 01 1100 1000 0000 0100 0101 0000 = 01 1100 0000 0000 0000 0000 0000, représentant $\{ b, c, d \}$ **c)** (11 1110 0000 0000 0000 0000 0000 ∨ 00 0110 0110 0001 1000 0110 0110) ∧ (01 1100 1000 0000 0100 0101 0000 ∨ 00 1010 0010 0000 1000 0010 0111) = 11 1110 0110 0001 1000 0110 0110 ∧ 01 1110 1010 0000 1100 0111 0111 = 01 1110 0010 0000 1000 0110 0110, représentant $\{ b, c, d, e, i, o, t, u, x, y \}$ **d)** 11 1110 0000 0000 0000 0000 0000 ∨ 01 1100 1000 0000 0100 0101 0000 ∨ 00 1010 0010 0000 1000 0010 0111 ∨ 00 0110 0110 0001 1000 0110 0110 = 11 1110 1110 0001 1100 0111 0111, représentant $\{ a, b, c, d, e, g, h, i, n, o, p, t, u, v, x, y, z \}$ **59. a)** $\{1 , 2 , 3 , \{1 , 2 , 3\}\}$ **b)** $\{\varnothing\}$ **c)** $\{\varnothing , \{\varnothing\}\}$ **d)** $\{\varnothing , \{\varnothing\} , \{\varnothing , \{\varnothing\}\}\}$ **61. a)** $\{3 \cdot a, 3 \cdot b, 1 \cdot c, 4 \cdot d \}$ **b)** $\{2 \cdot a, 2 \cdot b \}$ **c)** $\{1 \cdot a, 1 \cdot c \}$ **d)** $\{1 \cdot b, 4 \cdot d \}$ **e)** $\{5 \cdot a, 5 \cdot b, 1 \cdot c, 4 \cdot d \}$ **63.** $F = \{$0,4 Alice, 0,1 Brian, 0,6 Fred, 0,9 Oscar, 0,5 Rita$\}$, $R = \{$0,6 Alice, 0,2 Brian, 0,8 Fred, 0,1 Oscar, 0,3 Rita$\}$

UNE B

C

c) L'ensemble souhaité est la partie ombrée entière.

UNE B

C

29. **a)** $B \subseteq A$ **b)** $A \subseteq B$ **c)** $A \cap B = \varnothing$ **d)** Rien, car c'est toujours vrai **e)** $A = B$ **31.** $A \subseteq B \equiv \forall x (x \in A \rightarrow x \in B) \equiv \forall x (x \in B \rightarrow x \in A) \equiv \forall x (x \in B \rightarrow x \in A) \equiv B \subseteq A$ **33.** L'ensemble des étudiants en informatique majeures en sciences, mais pas les majeures en mathématiques ou qui sont majors ématiques mais pas les majors en informatique **35.** Un l'élément est dans $(A \cup B) - (A \cap B)$ s'il est dans l'union de A et B mais pas à l'intersection de A et B , ce qui signifie qu'il est soit A ou B , mais pas dans les deux A et B . C'est exactement ce que cela signifie pour un élément d'appartenir à *un* $\oplus B$.
37. **a)** $A \oplus A = (A - A) \cup (A - A) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$
b) $A \oplus \varnothing = (A - \varnothing) \cup (\varnothing - A) = A \cup \varnothing = A$ **c)** $A \oplus U = (A - U) \cup (U - A) = \varnothing \cup A = A$ **d)** $A \oplus A = (A - A) \cup (A - A) = A \cup A = U$ **39.** $B = \varnothing$ **41.** Oui **43.** Oui
45. Si $A \cup B$ était fini, il aurait alors n éléments pour certains nombre naturel n . Mais A *a* déjà plus de n éléments, car il est infini, et $A \cup B$ a tous les éléments que A a, donc $A \cup B$ a plus de n éléments. Cette contradiction montre que $A \cup B$ doit être infini. **47.** **a)** $\{1 , 2 , 3 , ..., n \}$ **b)** $\{1\}$
49. **a)** A_n **b)** $\{0 , 1\}$ **51.** **a)** **Z** , $\{-1 , 0 , 1\}$ **b)** **Z** - $\{0\}$, $\varnothing$
c) **R** , $[-1 , 1]$ **d)** $[1 , \infty)$, $\varnothing$ **53.** **a)** $\{1 , 2 , 3 , 4 , 7 , 8 , 9 , 10\}$
b) $\{2 , 4 , 5 , 6 , 7\}$ **c)** $\{1 , 10\}$ **55.** Le bit en i ème position de la chaîne de bits de la différence de deux ensembles est 1 si le i ème bit de la première chaîne est 1 et le i ème bit de la deuxième chaîne est 0, et vaut 0 sinon. **57.** **a)** 11 1110 0000 0000 0000 0000 0000 ∨ 01 1100 1000 0000 0100 0101 0000 = 11 1110 1000 0000 0100 0101 0000, représentant $\{ a, b, c, d, e, g, p, t, v \}$

65. {0,4 Alice, 0,8 Brian, 0,2 Fred, 0,1 Oscar, 0,5 Rita}

Section 2.3

1. **a)** $f (0)$ n'est pas défini. **b)** $f (x)$ n'est pas défini pour $x < 0$.
c) $f (x)$ n'est pas bien défini car il existe deux valeurs attribuées à chaque x . **3.** **a)** Pas une fonction **b)** Une fonction tion **c)** pas une fonction **5.** **a)** Domaine de l'ensemble des chaînes de bits; plage l'ensemble des entiers **b)** Domaine l'ensemble des chaînes de bits; plage l'ensemble d'entiers non négatifs **c)** Domaine la ensemble de chaînes de bits; plage l'ensemble des entiers non négatifs non dépassant 7 **d)** Domaine l'ensemble des entiers positifs; intervalle l'ensemble des carrés d'entiers positifs = $\{1 , 4 , 9 , 16 , ... \}$
7. **a)** Domaine $\mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+$; gamme $\mathbf{Z}^+$ **b)** Domaine $\mathbf{Z}^+$; intervalle $\{0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9\}$ **c)** Domaine l'ensemble de chaînes de bits; plage **N** **d)** Domaine l'ensemble de chaînes de bits; gamme **N** **9.** **a)** 1 **b)** 0 **c)** 0 **d)** -1 **e)** 3 **f)** -1 **g)** 2 **h)** 1 **11.** Seul le fonction dans la partie a) **13.** Seules les fonctions dans les parties a) et (d) **15.** **a)** Sur **b)** Pas sur **c)** Sur **d)** Pas sur **e)** Sur
17. **a)** Dépend si les enseignants partagent les bureaux **b)** One-en supposant un seul enseignant par bus **c)** Très probablement pas un à un, en particulier si le salaire est fixé par une négociation collective - accord ING **d)** un à un **19.** Les réponses varient. **a)** Définir des bureaux de l'école; probablement pas sur **b)** Ensemble d'autobus faire le voyage; sur, en supposant que chaque bus a un enseignant chaperon **c)** Ensemble de nombres réels; pas sur **d)** Jeu de cordes de neuf chiffres avec des tirets après les troisième et cinquième chiffres; ne pas sur **21.** **a)** La fonction $f (x)$ avec $f (x) = 3 x + 1$ lorsque $x \geq 0$ et $f (x) = -3 x + 2$ lorsque $x < 0$ **b)** $f (x) = | x | + 1$
c) La fonction $f (x)$ avec $f (x) = 2 x + 1$ lorsque $x \geq 0$ et $f (x) = -2 x$ lorsque $x < 0$ **d)** $f (x) = x^2 + 1$ **23.** **a)** Oui
b) Non **c)** Oui **d)** Non **25.** Supposons que f soit strictement décroissant ing. Cela signifie que $f (x) > f (y)$ chaque fois que $x < y$. À montrent que g est strictement croissant, supposons que $x < y$. alors $g (x) = 1 / f (x) < 1 / f (y) = g (y)$. Inversement, supposons que g est en constante augmentation. Cela signifie que $g (x) < g (y)$ chaque fois $x < y$. Pour montrer que f est strictement décroissant, supposons que $x < y$. Alors $f (x) = 1 / g (x) > 1 / g (y) = f (y)$. **27.** **a)** Soit f être une fonction strictement décroissante donnée de **R** à elle-même. Si

$a < b$, puis $f (a) > f (b)$; si $a > b$, alors $f (a) < f (b)$.
Ainsi, si $a = b$, alors $f (a) = f (b)$. **b)** **Les** réponses varieront; pour exemple, $f (x) = 0$ pour $x < 0$ et $f (x) = - x$ pour $x \geq 0$.
29. La fonction n'est pas individuelle, elle n'est donc pas inversible. Sur le domaine restreint, la fonction est la fonction d'identité sur les nombres réels non négatifs, $f (x) = x$, il est donc son propre in-

être obtenu en substituant - x à x . **57.** $\lceil b \rceil - \lfloor a \rfloor - 1$
59. **a)** 1 **b)** 3 **c)** 126 **d)** 3600 **61.** **a)** 100 **b)** 256 **c)** 1030
d) 30 200

63. 4

3

verset. **31.** **a)** $f(S) = \{0, 1, 3\}$ **b)** $f(S) = \{0, 1, 3, 5, 8\}$ **c)** $f(S) = \{0, 8, 16, 40\}$ **d)** $f(S) = \{1, 12, 33, 65\}$

33. **a)** Soit x et y être des éléments distincts de A . Parce que g est un-to-one, $g(x)$ et $g(y)$ sont des éléments distincts de B . Parce que f est un à un, $f(g(x)) = (f \circ g)(x)$ et $f(g(y)) = (f \circ g)(y)$ sont des éléments distincts de C . Par conséquent, $f \circ g$ est un à un. **b)** Soit $y \in C$. Parce que f est sur, $y = f(b)$ pour un certain $b \in B$. Maintenant , parce que g est sur, $b = g(x)$ pour un certain $x \in A$. Par conséquent, $y = f(b) = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$. Il s'ensuit que $f \circ g$ est sur.

35. Non. Par exemple, supposons que $A = \{a\}$, $B = \{b, c\}$ et $C = \{d\}$. Soit $g(a) = b$, $f(b) = d$ et $f(c) = d$. Alors f et $f \circ g$ sont sur, mais g ne l'est pas. **37.** $(f + g)(x) = x^2 + x + 3$, $(fg)(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$ **39.** f est un à un car $f(x_1) = f(x_2) \rightarrow ax_1 + b = ax_2 + b \rightarrow ax_1 = ax_2 \rightarrow x_1 = x_2$. f est sur parce que $f((y - b)/a) = y$ $f^{-1}(y) = (y - b)/a$.

41. **a)** $A = B = \mathbf{R}$, $S = \{x \mid x > 0\}$, $T = \{x \mid x < 0\}$, $f(x) = x^2$ **b)** Il suffit de montrer que $f(S) \cap f(T) \subseteq f(S \cap T)$. Soit $y \in B$ un élément de $f(S) \cap f(T)$. Alors $y \in f(S)$, si $y = f(x_1)$ pour un certain $x_1 \in S$. De même, $y = f(x_2)$ pour certains $x_2 \in T$. Parce que f est un à un, il s'ensuit que $x_1 = x_2$. Donc $x_1 \in S \cap T$, donc $y \in f(S \cap T)$.

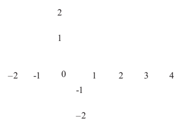
43. **a)** $\{x \mid 0 \leq x < 1\}$ **b)** $\{x \mid -1 \leq x < 2\}$ **c)** $\varnothing$

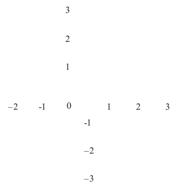
45. $f^{-1}(\overline{S}) = \{x \in A \mid f(x) \notin S\} = \overline{\{x \in A \mid f(x) \in S\}} = \overline{f^{-1}(S)}$ **47.** Soit $x = \lfloor x \rfloor + \epsilon$, où ϵ est un nombre réel avec $0 \leq \epsilon < 1$. Si $\epsilon < \frac{1}{2}$, puis $\lfloor x \rfloor - 1 < x - \frac{1}{2} < \lfloor x \rfloor$, donc $\lceil x - \frac{1}{2} \rceil = \lfloor x \rfloor$ et c'est l'entier le plus proche de x . Si $\epsilon > \frac{1}{2}$, alors $\lfloor x \rfloor < x - \frac{1}{2} < \lfloor x \rfloor + 1$, donc $\lceil x - \frac{1}{2} \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$ et c'est l'entier le plus proche de x . Si $\epsilon = \frac{1}{2}$, puis $\lceil x - \frac{1}{2} \rceil = \lfloor x \rfloor$, qui est le plus petit des deux entiers qui entourent x et sont à la même distance de x . **49.** Écris le vrai nombre x comme $\lfloor x \rfloor + \epsilon$, où ϵ est un nombre réel avec $0 \leq \epsilon < 1$. Parce que $\epsilon = x - \lfloor x \rfloor$, il s'ensuit que $0 \leq -\lfloor x \rfloor < 1$. Les deux premiers les inégalités, $x - 1 < \lfloor x \rfloor$ et $\lfloor x \rfloor \leq x$, suivent directement. Pour le deux autres inégalités, écrivez $x = \lceil x \rceil - \epsilon$, où $0 \leq \epsilon < 1$. Alors $0 \leq \lceil x \rceil - x < 1$, et l'inégalité souhaitée suit.

51. **a)** Si $x < n$, parce que $\lfloor x \rfloor \leq x$, il s'ensuit que $\lfloor x \rfloor < n$. Supposons que $x \geq n$. Par la définition de la fonction plancher, il il s'ensuit que $\lfloor x \rfloor \geq n$. Cela signifie que si $\lfloor x \rfloor < n$, alors $x < n$. **b)** Si $n < x$, alors parce que $x \leq \lceil x \rceil$, il s'ensuit que $n \leq \lceil x \rceil$. Supposons que $n \geq x$. Par la définition de la fonction plafond, il s'ensuit que $\lceil x \rceil \leq n$. Cela signifie que si $n < \lceil x \rceil$, alors $n < x$. **53.** Si n est pair, alors $n = 2k$ pour un entier k . Ainsi, $\lfloor n/2 \rfloor = \lfloor k \rfloor = k = n/2$. Si n est impair, alors $n = 2k + 1$ pour un entier k . Ainsi, $\lfloor n/2 \rfloor = \lfloor k + \frac{1}{2} \rfloor = k = (n - 1)/2$.

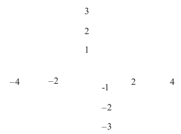
55. Supposons que $x \geq 0$. Le côté gauche est $\lceil -x \rceil$ et le le côté droit est $-\lfloor x \rfloor$. Si x est un entier, les deux côtés égal $-x$. Sinon, soit $x = n + \epsilon$, où n est un natu-nombre ral et ϵ est un nombre réel avec $0 \leq \epsilon < 1$. Alors $\lceil -x \rceil = \lceil -n - \epsilon \rceil = -n$ et $-\lfloor x \rfloor = -\lfloor n + \epsilon \rfloor = -n$ aussi. Lorsque $x < 0$, l'équation est également valable car elle peut

65.

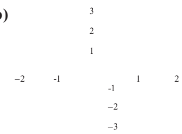




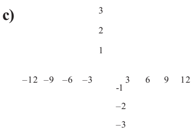
67. **a)**



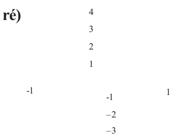
b)



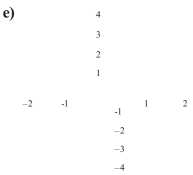
c)



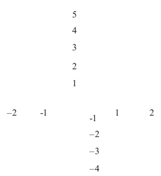
ré)



e)



F)



g) Voir partie (a). **69.** $f^{-1}(y) = (y - 1)^{1/\text{trois}}$ **71.** **a)** $f_{A \cap B}(x) = 1 \leftrightarrow x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A$ et $x \in B \leftrightarrow f_A(x) = 1$ et $f_B(x) = 1 \leftrightarrow f_A(x) f_B(x) = 1$ **b)** $f_{A \cup B}(x) = 1 \leftrightarrow x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A$ ou $x \in B \leftrightarrow f_A(x) = 1$ ou $f_B(x) = 1 \leftrightarrow f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) f_B(x) = 1$ **c)** $f_{\overline{A}}(x) = 1 \leftrightarrow x \in \overline{A} \leftrightarrow x \notin A \leftrightarrow f_A(x) = 0 \leftrightarrow 1 - f_A(x) = 1$ **d)** $f_{A \oplus B}(x) = 1 \leftrightarrow x \in A \oplus B \leftrightarrow (x \in A$ et $x \notin B)$ ou $(x \notin A$ et $x \in B) \leftrightarrow f_A(x) + f_B(x) - 2 f_A(x) f_B(x) = 1$

73. **a)** Vrai; parce que $\lfloor x \rfloor$ est déjà un entier, $\lceil \lfloor x \rfloor \rceil = \lfloor x \rfloor$. **b)** Faux; $x = \frac{1}{2}$ est un contre-exemple. **c)** Vrai; si x ou y est un entier, puis par la propriété 4b dans le tableau 1, la différence est 0. Si ni x ni y n'est un entier, alors $x = n + \epsilon$ et $y = m + \delta$, où n et m sont des entiers et ϵ et δ sont des nombres réels positifs bers inférieur à 1. Alors $m + n < x + y < m + n + 2$, donc $\lceil x + y \rceil$ est soit $m + n + 1$ ou $m + n + 2$. Par conséquent, le l'expression est soit $(n + 1) + (m + 1) - (m + n + 1) = 1$ ou $(n + 1) + (m + 1) - (m + n + 2) = 0$, comme souhaité. **d)** Faux; $x = \frac{1}{4}$ et $y = 3$ est un contre-exemple. **e)** Faux; $x = \frac{1}{2}$ est un contre-exemple. **75. a)** Si x est un entier positif, alors le deux côtés sont égaux. Supposons donc que $x = n^2 + m + \epsilon$, où n^2 est le plus grand carré parfait inférieur à x, m est un négatif entier et $0 < \epsilon \le 1$. Alors les deux $\sqrt{x}$ et $\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor = \sqrt{n^2 + m}$ sont entre n et $n + 1$, donc les deux côtés sont égaux à n. **b)** Si x est un entier positif, alors les deux côtés sont égaux. Supposons donc que $x = n^2 - m - \epsilon$, où n^2 est le plus petit carré parfait supérieur à x, m est un entier non négatif et ϵ est un nombre réel ber avec $0 < \epsilon \le 1$. Alors les deux $\sqrt{x}$ et $\sqrt{\lceil x \rceil} = \sqrt{n^2 - m}$ se situent entre $n - 1$ et n. Par conséquent, les deux côtés de l'équation égale n. **77. a) Le** domaine est **Z** ; le codomaine est **R** ; domaine de la définition est l'ensemble d'entiers non nuls; l'ensemble des valeurs de qui f n'est pas défini est $\{0\}$; pas une fonction totale. **b)** Domaine est **Z** ; le codomaine est **Z** ; le domaine de définition est **Z** ; ensemble de valeurs pour lequel f n'est pas défini est $\emptyset$; fonction totale. **c) Le** domaine est $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$; le codomaine est **Q** ; le domaine de définition est $\mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} - \{0\})$; ensemble de valeurs pour lesquelles f n'est pas défini est $\mathbf{Z} \times \{0\}$; pas un total une fonction. **d) Le** domaine est $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$; le codomaine est **Z** ; domaine de la définition est $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$; ensemble de valeurs pour lesquelles f n'est pas défini est $\emptyset$; fonction totale. **e) Le** domaine est $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$; le codomaine est **Z** ; domaine des définitions est $\{(m, n) \mid m > n\}$; ensemble de valeurs pour lequel f n'est pas défini est $\{(m, n) \mid m \le n\}$; pas un total une fonction. **79. a)** Par définition, dire que S a une cardinalité m veut dire que S a exactement m éléments distincts. Donc nous pouvons affecter le premier objet à 1, le second à 2, etc. Cela fournit la correspondance biunivoque. **b)** Par la partie (a), il y a une bijection f de S à $\{1, 2, ..., m\}$ et une bijection g de T à $\{1, 2, ..., m\}$. Alors la composition $g^{-1} \circ f$ est la bijection désirée de S à T.

Section 2.4

1. a) 3 **b)** -1 **c)** 787 **d)** 2639 **3. a)** $a_0 = 2$, $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_3 = 9$ **b)** $a_0 = 1$, $a_1 = 4$, $a_2 = 27$, $a_3 = 256$ **c)** $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1$ **d)** $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$ **5. a)** 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29 **b)** 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4 **c)** 1, 1, 3, 3, 5, 5, 7, 7, 9, 9 **d)** -1, -2, -2, 8, 88, 656, 4912, 40064, 362368, 3627776 **e)** 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768, 1536 **f)** 2, 4, 6, 10, 16, 26, 42, 68, 110, 178 **g)** 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4 **h)** 3, 3, 5, 4, 4, 3, 5, 5, 4, 3 **7.** Chaque terme peut être deux fois le mandat précédent; le n ème terme peut être obtenu auprès de le terme précédent en ajoutant $n - 1$; les termes pourraient être les des entiers positifs qui ne sont pas des multiples de 3; il y a des infiniment d'autres possibilités. **9. a)** 2, 12, 72, 432, 2592 **b)** 2, 4, 16, 256, 65, 536 **c)** 1, 2, 5, 11, 26 **d)** 1, 1, 6, 27, 204 **e)** 1, 2, 0, 1, 3 **11. a)** 6, 17, 49, 143, 421 **b)** $49 = 5 \cdot 17 - 6 \cdot 6$, $143 = 5 \cdot 49 - 6 \cdot 17$, $421 = 5 \cdot 143 - 6 \cdot 49$ **c)** $5a_{n-1} - 6a_{n-2} = 5(2^{n-1} + 5 \cdot 3^{n-1}) - 6(2^{n-2} + 5 \cdot 3^{n-2}) = 2^{n-2}(10 - 6) + 3^{n-2}(75 - 30) = 2^{n-2} \cdot 4 + 3^{n-2} \cdot 9 \cdot 5 = 2^n + 3^n \cdot 5 = a_n$ **13. a)** Oui **b)** Non **c)** Non **d)** Oui **e)** Oui **f)** Oui **g)** Non **h)** Non **15. a)** $a_{n-1} + 2a_{n-2} + 2n - 9 = -(n - 1) + 2 + 2[-(n - 2) + 2] + 2n - 9 = -n + 2 = a_n$ **b)** $a_{n-1} + 2a_{n-2} + 2n - 9 = 5(-1)^{n-1} - (n - 1) + 2 + 2[5(-1)^{n-2} - (n - 2) + 2] + 2n - 9 = 5(-1)^{n-2}(-1 + 2) - n + 2 = a_n$ **c)** $a_{n-1} + 2a_{n-2} + 2n - 9 = 3(-1)^{n-1} + 2^{n-1} - (n - 1) + 2 + 2[3(-1)^{n-2} + 2^{n-2} - (n - 2) + 2] + 2n - 9 = 3(-1)^{n-2}(-1 + 2) + 2^{n-2}(2 + 2) - n + 2 = a_n$ **d)** $a_{n-1} + 2a_{n-2} + 2n - 9 = 7 \cdot 2^{n-1} - (n - 1) + 2 + 2[7 \cdot 2^{n-2} - (n - 2) + 2] + 2n - 9 = 2^{n-2}(7 \cdot 2 + 2 \cdot 7) - n + 2 = a_n$

17. a) $a_n = 2 \cdot 3^n$ **b)** $a_n = 2n + 3$ **c)** $a_n = 1 + n(n + 1)/2$ **d)** $a_n = n^2 + 4n + 4$ **e)** $a_n = 1$ **f)** $a_n = (3^{n+1} - 1)/2$ **g)** $a_n = 5n!$ **h)** $a_n = 2^n n!$ **19. a)** $a_n = 3a_{n-1}$ **b)** 5 904 900 **21. a)** $a_n = n + a_{n-1}$, $a_0 = 0$ **b)** $a_{12} = 78$ **c)** $a_n = n(n + 1)/2$ **23.** $B(k) = [1 + (0.07/\text{douze})]B(k - 1) - 100$, avec $B(0) = 5000$ **25. a)** Un 1 et un 0, suivis par deux 1 et deux 0, suivis de trois 1 et trois 0, etc; 1, 1, 1 **b)** Les entiers positifs sont énumérés dans ordre croissant avec chaque entier pair positif répertorié deux fois; 9, 10, 10. **c)** Les termes dans les emplacements impairs sont les puissances successives de 2; les termes en emplacements pairs sont toutes 0; 32, 0, 64. **d)** $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$; 384, 768, 1536 **e)** $a_n = 15 - 7(n - 1) = 22 - 7n$; −34, −41, −48 **f)** $a_n = (n^2 + n + 4)/2$; 57, 68, 80 **g)** $a_n = 2n^3$; 1024, 1458, 2000 **h)** $a_n = n! + 1$; 362881, 3628801, 39916801 **27.** Parmi les entiers $1, 2, ..., a_n$, où a_n est le n ème entier positif pas un carré parfait, les non-carrés sont $a_1, a_2, ..., a_n$ et les carrés sont $1^2, 2^2, ..., k^2$, où k est l'entier avec $k^2 < n + k < (k + 1)^2$. Par conséquent, $a_n = n + k$, où $k^2 < a_n < (k + 1)^2$. Pour trouver k, première note que $k^2 < n + k < (k + 1)^2$, donc $k^2 + 1 \le n + k \le (k + 1)^2 - 1$. Par conséquent, $(k - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} = k^2 - k + 1 \le n \le k^2 + k = (k + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$. Il s'ensuit que $k - \frac{1}{2} < \sqrt{n} < k + \frac{1}{2}$, donc $k = \{\sqrt{n}\}$ et $a_n = n + k = n + \{\sqrt{n}\}$. **29. a)** 20 **b)** 11 **c)** 30 **d)** 511 **31. a)** 1533 **b)** 510 **c)** 4923 **d)** 9842 **33. a)** 21 **b)** 78 **c)** 18 **d)** 18 **35.** $\sum_{j=1}^{n}(a_j - a_{j-1}) = a_n - a_0$ **37. a)** n^2 **b)** $n(n + 1)/2$ **39.** 15150 **41.** $\frac{n(n+1)(2n+1)}{3} + \frac{n(n+1)}{2} + (n + 1)(m - (n + 1)^2 + 1)$, où $n = \lfloor \sqrt{m} \rfloor - 1$ **43. a)** 0 **b)** 1680 **c)** 1 **d)** 1024 **45.** 34

Section 2.5

1. a) Comptablement infini, −1, −2, −3, −4, ... **b)** Comptablement infini, 0, 2, -2, 4, -4, ... **c)** infiniment infini, 99, 98, 97, ... **d) non** dénombrable **e)** fini **f)** dénombrable nite, 0, 7, −7, 14, −14, ... **3. a)** Comptable: correspond à n avec la chaîne de n 1s. **b)** Comptable. Pour trouver une correspondance, suivez le chemin de l'exemple 4, mais omettez les fractions en haut trois rangées (tout en continuant à omettre les fractions qui ne sont pas conditions). **c)** Indénombrables **d)** Indénombrables **5.** Supposons que m de nouveaux clients arrivent à l'hôtel entièrement occupé. Déplacer l'invité dans la pièce n à la pièce $m + n$ pour $n = 1, 2, 3, ...$; alors le nouveau les clients peuvent occuper les chambres de 1 à m. **7.** Pour $n = 1, 2, 3, ...$, mettez l'invité actuellement dans la chambre $2n$ dans la chambre n, et l'invité actuellement dans la salle $2n - 1$ dans la salle n de la nouvelle ing. **9.** Déplacez la supposition actuellement Room i vers Room $2i+1$ pour $i = 1, 2, 3, \ldots$. Mettez le j ème invité du k ème bus dans Chambre $2^k(2j+1)$. **11. a)** $A = [1, 2]$ (intervalle fermé de nombres réels de 1 à 2), $B = [3, 4]$ **b)** $A = [1, 2] \cup \mathbf{Z}^+$, $B = [3, 4] \cup \mathbf{Z}^+$ **c)** $A = [1, 3]$, $B = [2, 4]$ **13.** Supposons que A est dénombrable. Soit A a la cardinalité n pour certains non entier négatif n, auquel cas il existe une fonction biunivoque de A à un sous-ensemble de $\mathbf{Z}^+$ (la plage est le premier n positif tegers), ou il existe une correspondance biunivoque f de De A à $\mathbf{Z}^+$; dans les deux cas, nous avons satisfait à la définition 2. Con- à l'inverse, supposons que $|A| \le |\mathbf{Z}^+|$. Par définition, cela signifie qu'il y a une fonction un à un de A à $\mathbf{Z}^+$, donc A a le même cardinalité qu'un sous-ensemble de $\mathbf{Z}^+$ (à savoir la gamme de ce une fonction). Par l'exercice 16, nous concluons que A est dénombrable. **15.** Supposons que B est dénombrable. Alors les éléments de B peuvent être répertorié comme $b_1, b_2, b_3, \ldots$. Parce que A est un sous-ensemble de B, en prenant la sous-séquence de $\{b_n\}$ qui contient les termes qui sont dans A donne une liste des éléments de A. Parce que A est innombrable cela est impossible. **17.** Supposons que $A - B$ est dénombrable. Ensuite, parce que $A = (A - B) \cup (A \cap B)$, les éléments de A peut être répertorié dans une séquence en alternant les éléments de $A - B$ et des éléments de A par B. Cela contredit l'indénombrables A. **19.** On nous donne des bijections f de A à B et g de C à D. Ensuite, la fonction de $A \times C$ à $B \times D$ qui envoie (a, c) à $(f(a), g(c))$ est une bijection. **21.** Par la définition de $|A| \le |B|$, il y a une fonction $f: A \to B$. Simi- lièrement, il y a une relation un-à-une fonction $g: B \to C$. Par l'exercice 33 dans la section 2.3, la composition $g \circ f: A \to C$ est biunivoque. Par conséquent, par définition $|A| \le |C|$. **23.** Utilisation de l'Axiom de Choix parmi la théorie des ensembles, choisissez des éléments distincts $a_1, a_2, a_3, \ldots$ De A un à la fois (cela est possible car A est infini). le résultant ensemble $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ est le sous - ensemble infini désiré de A. **25.** L'ensemble de chaînes finies de caractères sur un alphabet fini est infiniment infini, car nous pouvons lister ces chaînes dans ordre phabétique par longueur. Par conséquent, l'ensemble infini S peut être identifié avec un sous-ensemble infini de cet ensemble dénombrable, qui par l'exercice 16 est également infiniment dénombrable. **27.** Supposons que $A_1, A_2, A_3, \ldots$ sont des ensembles dénombrables. Parce que A_i est dénombrable, on peut citer les éléments dans une séquence comme $a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots$. La éléments de l'ensemble $\bigcup_{i=1}^{n} A_j$ peux être répertorié en listant tous les termes a_{ij} avec $i + j = 2$, puis tous les termes a_{ij} avec $i + j = 3$, puis tous les termes a_{ij} avec $i + j = 4$, et ainsi de suite. **29.** Il existe un nombre fini de chaînes de bits de longueur m, à savoir 2^m. L'ensemble de tous les bits, les chaînes est l'union des ensembles de chaînes de bits de longueur m pour $m = 0, 1, 2, \ldots$. Parce que l'union d'un dénombrable nombre d'ensembles dénombrables est dénombrable (voir exercice 27), il sont un nombre dénombrable de chaînes de bits. **31.** Il ressort de la formule que la plage de valeurs de la fonction prend pour un la valeur fixe de $m + n$, disons $m + n = x$, est $(x - 2)(x - 1)/2 + 1$ à travers $(x - 2)(x - 1)/2 + (x - 1)$, car m peut supposer les valeurs $1, 2, 3, \ldots, (x - 1)$ dans ces conditions, et le premier terme de la formule est un entier positif fixe lorsque $m + n$ est fixe. Pour montrer que cette fonction est biunivoque et sur, nous devons simplement montrer que la plage de valeurs pour $x + 1$ reprend précisément où la plage de valeurs de x laissé de côté, c'est-à-dire que $f(x - 1, 1) + 1 = f(1, x)$. Nous avons $f(x-1, 1) + 1 = \frac{(x-2)(x-1)}{2} + (x-1) + 1 = \frac{x^2 - x + 2}{2} = \frac{(x-1)x}{2} + 1 = f(1, x)$. **33.** Par la théorie Schröder-Bernstein rem, il suffit de trouver des fonctions *biunivoque* $f: (0, 1) \to [0, 1]$ et $g: [0, 1] \to (0, 1)$. Soit $f(x) = x$ et $g(x) = (x + 1)/3$. **35.** Chaque élément A de l'ensemble de puissance de l'ensemble de positif des nombres entiers (par exemple, $A \subseteq \mathbf{Z}^+$) peut être représenté uniquement par le chaîne de bits $a_1 a_2 a_3 \ldots$, où $a_i = 1$ si $i \in A$ et $a_i = 0$ si $i \notin A$. Supposons qu'il y ait eu une correspondance individuelle $f: \mathbf{Z}^+ \to P(\mathbf{Z}^+)$. Former une nouvelle chaîne de bits $s = s_1 s_2 s_3 \ldots$ par setting s_i étant égal à 1 moins le i ème bit de $f(i)$. Ensuite parce que s diffère dans le bit i de $f(i)$, s n'est pas dans la plage de f, une contradiction. **37.** Pour tout alphabet fini, il existe un nombre fini de chaînes de longueur n, chaque fois que n est un entier positif. Il s'ensuit résultat de l'exercice 27 qu'il n'y a qu'un nombre dénombrable de chaînes d'un alphabet fini donné. Parce que l'ensemble des tous les programmes informatiques dans une langue particulière sont un sous-ensemble de l'ensemble de toutes les chaînes d'un alphabet fini, qui est un dénombrable défini par le résultat de l'exercice 16, il est lui-même un ensemble dénombrable. **39. L'** exercice 37 montre qu'il n'y a qu'un nombre dénombrable des programmes informatiques. Par conséquent, il n'existe qu'un nombre de fonctions calculables. Parce que, comme exercice 38 montre, il existe un nombre incalculable de fonctions, pas toutes les fonctions sont calculables.

Section 2.6

1. a) 3×4 **b)** $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ **d)** 1 **e)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ **3. a)** $\begin{bmatrix} 1 & 11 \\ 2 & 18 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 9 & -4 & 4 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} -4 & 15 & -4 & 1 \\ -3 & 10 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -8 & 6 \\ 1 & -8 & 18 & -13 \end{bmatrix}$ **5.** $\begin{bmatrix} 9/5 & -6/5 \\ -1/5 & 4/5 \end{bmatrix}$

7. $\mathbf{0} + \mathbf{A} = [0 + a_{ij}] = [a_{ij} + 0] = \mathbf{0} + \mathbf{A}$ **9.** $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})] = [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}] = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$ **11.** Le nombre de lignes de $\mathbf{A}$ est égal au nombre de colonnes de $\mathbf{B}$, et le nombre de colonnes de $\mathbf{A}$ est égal au nombre de lignes de $\mathbf{B}$. **13.** $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = [\sum_q a_{iq}(\sum_r b_{qr}c_{rl})] = [\sum_q \sum_r a_{iq}b_{qr}c_{rl}] = [\sum_r \sum_q a_{iq}b_{qr}c_{rl}] = [\sum_r (\sum_q a_{iq}b_{qr})c_{rl}] = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$ **15.** $\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **17. a)** Soit $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ et $\mathbf{B} = [b_{ij}]$. Alors $\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij} + b_{ij}]$. Nous avons $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^t = [a_{ji} + b_{ji}] = [a_{ji}] + [b_{ji}] = \mathbf{A}^t + \mathbf{B}^t$. **b)** En utilisant la même notation que dans la partie (a), nous avons $\mathbf{B}^t\mathbf{A}^t =$ UNE

Page 18

$\left[\sum_q b_{qi} a_{jq}\right] = \left[\sum_q a_{jq} b_{qi}\right] = (\mathbf{AB})^t$, parce que le (i, j) e entrée est la (j, i) e entrée de $\mathbf{AB}$. **19.** Le résultat bas parce que $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} = (ad-bc)\mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. **21.** $\mathbf{A}^n(\mathbf{A}^{-1})^n = \mathbf{A}(\mathbf{A} \cdots (\mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1})\mathbf{A}^{-1}) \cdots \mathbf{A}^{-1})\mathbf{A}^{-1}$ par le droit associatif. Parce que $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$, travailler de l'intérieur montre que $\mathbf{A}^n(\mathbf{A}^{-1})^n = \mathbf{I}$. De même $(\mathbf{A}^{-1})^n\mathbf{A}^n = \mathbf{I}$. Donc $(\mathbf{A}^n)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^n$. **23.** La (i, j) ème entrée de $\mathbf{A} + \mathbf{A}^t$ est $a_{ij} + a_{ji}$, qui est égal à $a_{ji} + a_{ij}$, la (j, i) ème entrée de $\mathbf{A} + \mathbf{A}^t$, donc par définition $\mathbf{A} + \mathbf{A}^t$ est symétrique. **25.** $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = -2$

27. a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

29. a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

31. a) $\mathbf{A} \vee \mathbf{B} = [a_{ij} \vee b_{ij}] = [b_{ij} \vee a_{ij}] = \mathbf{B} \vee \mathbf{A}$ **b)** $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = [a_{ij} \wedge b_{ij}] = [b_{ij} \wedge a_{ij}] = \mathbf{B} \wedge \mathbf{A}$ **33. a)** $\mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = [a_{ij}] \vee [b_{ij} \wedge c_{ij}] = [a_{ij} \vee (b_{ij} \wedge c_{ij})] = [(a_{ij} \vee b_{ij}) \wedge (a_{ij} \vee c_{ij})] = [a_{ij} \vee b_{ij}] \wedge [a_{ij} \vee c_{ij}] = (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{A} \vee \mathbf{C})$ **b)** $\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \vee \mathbf{C}) = [a_{ij}] \wedge [b_{ij} \vee c_{ij}] = [a_{ij} \wedge (b_{ij} \vee c_{ij})] = [(a_{ij} \wedge b_{ij}) \vee (a_{ij} \wedge c_{ij})] = [a_{ij} \wedge b_{ij}] \vee [a_{ij} \wedge c_{ij}] = (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \vee (\mathbf{A} \wedge \mathbf{C})$ **35.** $\mathbf{A} \odot (\mathbf{B} \odot \mathbf{C}) = [\bigvee_q a_{iq} \wedge (\bigvee_r b_{qr} \wedge c_{rl})] = [\bigvee_q \bigvee_r (a_{iq} \wedge b_{qr} \wedge c_{rl})] = [\bigvee_r \bigvee_q (a_{iq} \wedge b_{qr} \wedge c_{rl})] = [\bigvee_r (\bigvee_q a_{iq} \wedge b_{qr}) \wedge c_{rl}] = (\mathbf{A} \odot \mathbf{B}) \odot \mathbf{C}$

Exercices supplémentaires

1. a) A **b)** $A \cap B$ **c)** $A - B$ **d)** $A \cap \overline{B}$ **e)** $A \oplus B$ **3.** Oui **5.** $A - (A - B) = A - (A \cap \overline{B}) = A \cap \overline{(A \cap \overline{B})} = A \cap (\overline{A} \cup B) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) = \emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B$ **7.** Soit $A = \{1\}$, $B = \emptyset$, $C = \{1\}$. Alors $(A - B) - C = \emptyset$, mais $A - (B - C) = \{1\}$. **9.** Non. Par exemple, soit $A = B = \{a, b\}$, $C = \emptyset$ et $D = \{a\}$. Alors $(A - B) - (C - D) = \emptyset - \emptyset = \emptyset$, mais $(A - C) - (B - D) = \{a, b\} - \{b\} = \{a\}$. **11. a)** $|\emptyset| \le |A \cap B| \le |A| \le |A \cup B| \le |U|$ **b)** $|\emptyset| \le |A - B| \le |A \oplus B| \le |A \cup B| \le |A| + |B|$ **13. a)** Oui, non **b)** Oui, non **c)** f a l'inverse avec $f^{-1}(a) = 3$, $f^{-1}(b) = 4$, $f^{-1}(c) = 2$, $f^{-1}(d) = 1$; g n'a pas d'inverse. **15.** Si f est un-à un, alors f fournit une bijection entre S et $f(S)$, donc ils ont la même cardinalité. Si f n'est pas un à un, alors il existe des éléments x et y dans S tels que $f(x) = f(y)$. Soit $S = \{x, y\}$. Alors $|S| = 2$ mais $|f(S)| = 1$. **17.** Soit $x \in A$. Alors $S_f(\{x\}) = \{f(y) \mid y \in \{x\}\} = \{f(x)\}$. Par le même raisonnement, $S_g(\{x\}) = \{g(x)\}$. Parce que $S_f = S_g$, nous pouvons conclure que $\{f(x)\} = \{g(x)\}$, et donc nécessairement $f(x) = g(x)$. **19.** L'équation est vraie si et seulement si la somme des parties fractionnaires de x et y est inférieure à 1. **21.** Le l'équation est vraie si et seulement si x et y sont tous les deux tegers, ou x n'est pas un entier mais la somme du fractionnaire parties de x et y est inférieur ou égal à 1. **23.** Si x est un entier, alors $\lfloor x \rfloor + \lfloor m - x \rfloor = x + m - x = m$. Oth- Sinon, écrivez x en fonction de ses parties entières et fractionnaires: $x = n + \epsilon$, où $n = \lfloor x \rfloor$ et $0 < \epsilon < 1$. Dans ce cas, $\lfloor x \rfloor + \lfloor m - x \rfloor = \lfloor n + \epsilon \rfloor + \lfloor m - n - \epsilon \rfloor = n + m - n - 1 = m - 1$.

25. Écrivez $n = 2k + 1$ pour un entier k. Alors $n^2 = 4k^2 + 4k + 1$, de sorte que $n^2/4 = k^2 + k + \frac{1}{4}$. Par conséquent, $\lceil n^2/4 \rceil = k^2 + k + 1$. Mais $(n^2 + 3)/4 = (4k^2 + 4k + 1 + 3)/4 = k^2 + k + 1$. **27.** Soit $x = n + (r/m) + \epsilon$, où n est un entier, r est un non négatif entier inférieur à m, et ϵ est un nombre réel avec $0 \le \epsilon < 1/m$. Le côté gauche est $\lfloor nm + r + m\epsilon \rfloor = nm + r$. Sur la droite-côté, les termes $\lfloor x \rfloor$ à $\lfloor x + (m + r - 1)/m \rfloor$ sont tous juste n et les termes de $\lfloor x + (m - r)/m \rfloor$ on sont tous $n + 1$. Par conséquent, le côté droit est $(m - r)n + r(n + 1) = nm + r$, ainsi que. **29.** 101 **31.** $a_1 = 1$; $a_{2n+1} = n \cdot a_{2n}$ pour tous $n > 0$; et $a_{2n} = n + a_{2n-1}$ pour tout $n > 0$. La prochaine quatre termes sont 5346, 5353, 37471 et 37479. **33.** Si chacun $f^{-1}(j)$ est dénombrable, alors $S = f^{-1}(1) \cup f^{-1}(2) \cup \cdots$ est l'union dénombrable d'ensembles dénombrables et est donc possible par l'exercice 27 de la section 2.5. **35.** Parce qu'il y a une correspondance biunivoque entre $\mathbf{R}$ et l'inter- val $(0, 1)$ (donné par $f(x) = 2 \arctan(x)/\pi$), il suffit de montre que $|(0, 1) \times (0, 1)| = |(0, 1)|$. Par le Schröder-Théorème de Bernstein il suffit de trouver des fonctions injectives f: $(0, 1) \to (0, 1) \times (0, 1)$ et $g: (0, 1) \times (0, 1) \to (0, 1)$. Soit $f(x) = (x, \frac{1}{2})$. Pour g, nous suivons l'indice. Supposer $(x, y) \in (0, 1) \times (0, 1)$, et représentent x et y avec leur déci- expansions mal $x = 0.x_1x_2x_3\ldots$ et $y = 0.y_1y_2y_3\ldots$, jamais choisir l'expansion d'un nombre qui se termine par une infinité chaîne de 9s. Soit $g(x, y)$ l'expansion décimale obtenue par entrelacer ces deux chaînes, à savoir $0.x_1y_1x_2y_2x_3y_3\ldots$.

37. $\mathbf{A}^{4n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}^{4n+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}^{4n+2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}^{4n+3} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, pour $n \ge 0$ **39.** Supposons que $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Soit $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Parce que $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, il s'ensuit que $c = 0$ et $a = d$. Soit $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Car $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, il s'ensuit que $b = 0$. Par conséquent, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = a\mathbf{I}$.

41. a) Soit $\mathbf{A} \odot \mathbf{0} = [b_{ij}]$. Alors $b_{ij} = (a_{i1} \wedge 0) \vee \cdots \vee (a_{ip} \wedge 0) = 0$. Par conséquent, $\mathbf{A} \odot \mathbf{0} = \mathbf{0}$. De même $\mathbf{0} \odot \mathbf{A} = 0$. **b)** $\mathbf{A} \vee \mathbf{0} = [a_{ij} \vee 0] = [a_{ij}] = \mathbf{A}$. Par conséquent $\mathbf{A} \vee \mathbf{0} = \mathbf{A}$. De même $\mathbf{0} \vee \mathbf{A} = \mathbf{A}$. **c)** $\mathbf{A} \wedge \mathbf{0} = [a_{ij} \wedge 0] = [0] = \mathbf{0}$. Par conséquent $\mathbf{A} \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0}$. De même $\mathbf{0} \wedge \mathbf{A} = \mathbf{0}$.

Page 19

CHAPITRE 3

Section 3.1

1. $max := 1$, $i := 2$, $max := 8$, $i := 3$, $max := 12$, $i := 4$, $i := 5$, $i := 6$, $i := 7$, $max := 14$, $i := 8$, $i := 9$, $i := 10$, $i := 11$

3. **procédure** *AddUp* ($a_1, \ldots, a_n$: nombres entiers)
  $somme := a_1$
  pour $i := 2$ **à** n
    $somme := somme + a_i$
  somme de **retour**

5. *doublons de* **procédure** ($a_1, a_2, \ldots, a_n$: entiers dans ordre non décroissant)
  $k := 0$ {cela compte les doublons}
  $j := 2$
  tandis que $j \leq n$
   si $a_j = a_{j-1}$ **alors**
    $k := k + 1$
    $c_k := a_j$
    tandis que $j \leq n$ et $a_j = c_k$
     $j := j + 1$
   $j := j + 1$
  { $c_1, c_2, \ldots, c_k$ est la liste souhaitée}

7. **procédure** *dernier emplacement pair* ($a_1, a_2, \ldots, a_n$: nombres entiers)
  $k := 0$
  pour $i := 1$ **à** n
   si a_i est pair **alors** $k := i$
  retourne k { $k = 0$ s'il n'y a pas d'évènements}

9. **procédure** *palindrome check* ($a_1 a_2 \ldots a_n$: string)
  réponse := **vrai**
  pour $i := 1$ **à** $\lfloor n/2 \rfloor$
   si $a_i = a_{n+1-i}$ **alors** *répondre* := **false**
  retourner la *réponse*

11. *échange de* **procédure** (x, y : nombres réels)
  $z := x$
  $x := y$
  $y := z$

Le nombre minimum d'affectations nécessaires est de trois.

13. Recherche linéaire: $i := 1$, $i := 2$, $i := 3$, $i := 4$, $i := 5$, $i := 6$, $i := 7$, *emplacement* := 7; recherche binaire: $i := 1$, $j := 8$, $m := 4$, $i := 5$, $m := 6$, $i := 7$, $m := 7$, $j := 7$, *emplacement* := 7

15. *insert de* **procédure** ($x, a_1, a_2, \ldots, a_n$: entiers)
  {la liste est en ordre: $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ }
  $a_{n+1} := x + 1$
  $i := 1$
  tandis que $x > a_i$
   $i := i + 1$
  pour $j := 0$ **à** $n - i$
   $a_{n-j+1} := a_{n-j}$
  $a_i := x$
  { x a été inséré dans la bonne position}

17. **procédure** *première plus grande* ($a_1, \ldots, a_n$: entiers)
  $max := a_1$
  emplacement := 1
  pour $i := 2$ **à** n
   si $max < a_i$ **alors**
    $max := a_i$
    emplacement := i
  lieu de **retour**

19. **procédure** *moyenne-médiane-max-min* (a, b, c : entiers)
  moyenne := $(a + b + c) / 3$
  {les six ordres différents de a, b, c en ce qui concerne à $\geq$ sera traité séparément}
  si $a \geq b$ **alors**
   si $b \geq c$ **alors** *médiane* := b ; $max := a$; $min := c$
   ...

  (Le reste de l'algorithme est similaire.)

21. **procédure** *premier-trois* ($a_1, a_2, \ldots, a_n$: entiers)
  si $a_1 > a_2$ **alors** échangez un_1 et un_2
  si $a_2 > a_3$ **alors** échangez a_2 et a_3
  si $a_1 > a_2$ **alors** échangez un_1 et un_2

23. **procédure** *sur* (f : fonction de A à B où
   $A = \{ a_1, \ldots, a_n \}$, $B = \{ b_1, \ldots, b_m \}$, $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_m$ sont des entiers)
  pour $i := 1$ **à** m
   hit $(b_i) := 0$
  compte := 0
  pour $j := 1$ **à** n
   si *frappé* $(f(a_j)) = 0$ **alors**
    hit $(f(a_j)) := 1$
    count := *count* + 1
  si *count* = m **alors retourne true sinon retourne faux**

25. *ceux de* **procédure** (a : chaîne de bits, $a = a_1 a_2 \ldots a_n$)
  compte := 0
  pour $i := 1$ **à** n
   si $a_i := 1$ **alors**
    count := *count* + 1
  nombre de **retours**

27. **procédure de** *recherche ternaire* (s : entier, $a_1, a_2, \ldots, a_n$: nombre entier croissant)
  $i := 1$
  $j := n$
  tandis que $i < j - 1$
   $l := \lfloor (i + j) / 3 \rfloor$
   $u := \lfloor 2 (i + j) / 3 \rfloor$
   si $x > a_u$ **alors** $i := u + 1$
   sinon si $x > a_l$ **alors**
    $i := l + 1$
    $j := u$
   sinon $j := l$
  si $x = a_i$ **alors** *emplacement* := i
  sinon si $x = a_j$ **alors** *emplacement* := j

Page 20

sinon *emplacement* : = 0
lieu de **retour** {0 s'il n'est pas trouvé}

29. **procédure** *trouver un mode* $(a_1, a_2, ..., a_n$: non décroissant entiers)
modecount : = 0
i : = 1
tandis que $i \leq n$
valeur : = a_i
compte : = 1
tandis que $i \leq n$ et a_i = *valeur*
count : = *count* + 1
i : = *i* + 1
si *count*> *modecount* **alors**
modecount : = *count*
mode : = *valeur*
mode de **retour**

31. **procédure** *trouver un doublon* $(a_1, a_2, ..., a_n$: entiers)
emplacement : = 0
i : = 2
tandis que $i \leq n$ et l' *emplacement* = 0
j : = 1
tandis que *j* <*i* et *location* = 0
si $a_i = a_j$ **alors** *emplacement* : = *i*
sinon *j* : = *j* + 1
i : = *i* + 1
lieu de **retour**
{ *location* est l'indice de la première valeur qui répète une valeur précédente dans la séquence}

33. **procédure** *trouver diminution* $(a_1, a_2, ..., a_n$: positive entiers)
emplacement : = 0
i : = 2
tandis que $i \leq n$ et l' *emplacement* = 0
si $a_i < a_{i-1}$ **alors** *emplacement* : = *i*
sinon *i* : = *i* + 1
lieu de **retour**
{ *location* est l'indice de la première valeur inférieure à la précédente}

35. À la fin de la première passe: 1, 3, 5, 4, 7; à la fin de deuxième passe: 1, 3, 4, 5, 7; à la fin de la troisième passe: 1, 3, 4, 5, 7; à la fin de la quatrième passe: 1, 3, 4, 5, 7

37. **procédure** *meilleur bubbleort* ($a_1, ..., a_n$: nombres entiers)
i : = 1; *fait* : = **faux**
tandis que *i* <*n* et *done* = **false**
fait : = **vrai**

sur l'algorithme de recherche linéaire donné comme algorithme 2 dans ce section, sauf que nous remplaçons $x = a_i$ par $x < a_i$, et nous remplaçons la clause **else** par **else** *location* : = *n* + 1.

45. $2 + 3 + 4 + \cdots + n = (n^2 + n - 2) / 2$ **47.** Trouvez le emplacement du 2 dans la liste 3 (une comparaison), et insérez-le devant le 3, donc la liste se lit maintenant 2 , 3 , 4 , 5 , 1 , 6. Trouvez l'emplacement du 4 (le comparer au 2 puis au 3), et insérez-le, en laissant 2 , 3 , 4 , 5 , 1 , 6. Recherchez l'emplacement du 5 (comparez-le au 3 puis au 4) et insérez-le en laissant 2 , 3 , 4 , 5 , 1 , 6. Trouvez l'emplacement du 1 (comparez-le au 3 puis le 2 puis le 2 à nouveau) et insérez-le en laissant 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6. Trouvez l'emplacement du 6 (comparez-le au 3, puis le 4, puis le 5), et insérez-le, donnant la finale répondre 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6.

49. **procédure** *tri d'insertion binaire* $(a_1, a_2, ..., a_n$: nombres réels avec $n \geq 2)$
pour *j* : = 2 **à** *n*
{recherche binaire pour l'emplacement d'insertion *i* }
gauche : = 1
à droite : = *j* - 1
à *gauche* <*à droite*
milieu : = $\lfloor$ *(gauche* + *droite)* / 2$\rfloor$
si $a_j >$ *un* $_{milieu}$ **puis à** *gauche* : = *milieu* + 1
sinon à *droite* : = *milieu*
si $a_j < a_{gauche}$ **alors** *i* : = *gauche* **sinon** *i* : = *gauche* + 1
{insérer *un* $_j$ à l'emplacement *i* en déplaçant *un* $_i$ dans *un* $_{j-1}$ vers l'arrière de la liste}
m : = a_j
pour *k* : = 0 **à** *j* - *i* - 1
a_{j-k} : = a_{j-k-1}
a_i : = *m*
{ $a_1, a_2, ..., a_n$ sont triés}

51. La variation de l'exercice 50 **53.** **a)** Deux quarts, un penny **b)** Deux quarts, un sou, un nickel, quatre sous **c)** A trois quarts, un sou **d)** Deux quarts, un sou

55. **L'** algorithme gourmand utilise le moins de pièces dans les parties (a), (c) et (ré). **a)** Deux quarts, un sou **b)** Deux quarts, un sou, neuf sous **c)** trois quarts, un sou **d)** deux quarts, un sou **57.** Le discours de 9 h 00 à 9 h 45, celui de 9 h 50-10 h 15, le 10 h 15-10 h 45, le discours 11 h 00-11 h 15 **59.** **a)** Commandez le parle en commençant l'heure. Numéroter les salles de conférence 1, 2, 3 et bientôt. Pour chaque exposé, affectez-le à la salle de conférence la moins numérotée actuellement disponible. **b)** Si cet algorithme utilise *n* lecture puis au moment où la *n* e salle a été assignée pour la première fois, elle *avait* à utiliser (sinon une salle moins numérotée aurait été

pour $j := 1$ **à** $n - i$
si $a_j > a_{j+1}$ **alors**
échanger a_j et a_{j+1}
fait := **faux**
$i := i + 1$
$\{a_1, ..., a_n$ est en ordre croissant$\}$

39. À la fin des première, deuxième et troisième passes: 1 , 3 , 5 , 7 , 4; à la fin de la quatrième passe: 1 , 3 , 4 , 5 , 7 **41.** **a)** 1, 5, 4, 3, 2; 1, 2, 4, 3, 5; 1, 2, 3, 4, 5; 1, 2, 3, 4, 5 **b)** 1, 4, 3, 2, 5; 1, 2, 3, 4, 5; 1, 2, 3, 4, 5; 1, 2, 3, 4, 5 **c)** 1, 2, 3, 4, 5; 1, 2, 3, 4, 5; 1, 2, 3, 4, 5; 1, 2, 3, 4, 5 **43.** Nous réalisons

attribué), ce qui signifie que n pourparlers se déroulaient simultanément
méchamment (cet exposé vient d'être attribué et les $n - 1$ entretiens actuellement dans les halls 1 à $n - 1$). **61.** Ici, nous supposons que les hommes sont les prétendants et les femmes les suites.

procédure *stable* $(M_1, M_2, ..., M_s, W_1, W_2, ..., W_s$:
listes de préférences)
pour $i := 1$ **à** s
marquer l'homme i comme rejeté
pour $i := 1$ **à** s
définir la liste de refus de man i comme vide
pour $j := 1$ **à** s

Page 21

définir la liste des propositions de la femme j comme vide
tandis que les hommes rejetés restent
pour $i := 1$ **à** s
si l' homme i est marqué rejeté **puis** ajouter i la liste de propositions pour la femme j qui se classe au premier rang sur sa liste de préférences mais n'apparaît pas sur son liste de refus et marquez i comme non rejeté
pour $j := 1$ **à** s
si la femme j la liste des propositions de » est non vide **alors** supprimer de la liste des propositions de j tous les hommes i sauf l'homme i_0 qui se classe le plus haut sur elle liste de préférences, et pour chaque homme, *je* marque le rejeter et ajouter j à sa liste de rejet
pour $j := 1$ **à** s
faire correspondre j avec le seul homme sur la liste des propositions de j
{Cette correspondance est stable.}

63. Si l'affectation n'est pas stable, alors il y a un homme m et un femme w telle que m préfère w à la femme w avec qui il est jumelé et w préfère m à l'homme avec qui elle est assorti. Mais m doit avoir proposé w avant de proposer à w , car il préfère le premier. Parce que m n'a pas fini jumelé avec w , elle doit l'avoir rejeté. Les femmes Juger un prétendant seulement quand ils obtiennent une meilleure proposition, et ils finalement être jumelé avec un prétendant en attente, de sorte que la femme avec qui w est apparié doit être meilleur à ses yeux que m , contredisant notre hypothèse originale. Par conséquent, le mariage est stable. **65.** Exécutez les deux programmes sur leurs entrées et signalez lequel on arrête.

Section 3.2

1. Les choix de C et k ne sont pas uniques. **a)** $C = 1$, $k = 10$ **b)** $C = 4$, $k = 7$ **c)** Non **d)** $C = 5$, $k = 1$ **e)** $C = 1$, $k = 0$ **f)** $C = 1$, $k = 2$ **3.** $x^4 + 9x^3 + 4x + 7 \leq 4x^4$ pour tout $x > 9$; les témoins

max (k_1, k_2), il s'ensuit que $|f(x)| \leq C_1 |g(x)| \leq C_1 C_2 |h(x)|$. Cela montre que $f(x)$ est $O(h(x))$. **19.** 2^{n+1} est $O(2^n)$; 2^{2n} n'est pas. **21.** $1000 \log n$, $\sqrt{n}$, $n \log n$, $n^2 / 1000000$ 2^n, 3^n , $2n$! **23.** L'algorithme utilisant n connecter n opérations **25.** **a)** $O(n^3)$ **b)** $O(n^5)$ **c)** $O(n^3 \cdot n!)$ **27.** **a)** $O(n^2 \log n)$ **b)** $O(n^2 (\log n)^2)$ **c)** $O(n^{2^n})$ **29.** **a)** Ni (x^2) ni (x^2) **b)** (x^2) et (x^2) **c)** Ni (x^2) ni (x^2) **d)** (x^2) , mais pas (x^2) **e)** (x^2) , mais pas (x^2) **f)** (x^2) et (x^2) **31.** Si $f(x)$ est $(g(x))$, alors il existe des stants C_1 et C_2 avec $C_1 |g(x)| \leq |f(x)| \leq C_2 |g(x)|$. Il s'ensuit que $|f(x)| \leq C_2 |g(x)|$ et $|g(x)| \leq (1/C_1) |f(x)|$ pour $x > k$. Ainsi, $f(x)$ est $O(g(x))$ et $g(x)$ est $O(f(x))$. Con-inversement, supposons que $f(x)$ soit $O(g(x))$ et $g(x)$ soit $O(f(x))$. Il existe alors des constantes C_1 , C_2 , k_1 et k_2 telles que $|f(x)| \leq C_1 |g(x)|$ pour $x > k_1$ et $|g(x)| \leq C_2 |f(x)|$ pour $x > k_2$. nous pouvons supposons que $C_2 > 0$ (on peut toujours agrandir C_2). Ensuite nous avoir $(1/C_2) |g(x)| \leq |f(x)| \leq C_1 |g(x)|$ pour $x > \max(k_1, k_2)$. Par conséquent, $f(x)$ est $(g(x))$. **33.** Si $f(x)$ est $(g(x))$, alors $f(x)$ est à la fois $O(g(x))$ et $(g(x))$. Par conséquent, il existe des stants C_1 , k_1 , C_2 et k_2 tels que $|f(x)| \leq C_2 |g(x)|$ pour tous $x > k_2$ et $|f(x)| \geq C_1 |g(x)|$ pour tout $x > k_1$. Il a suivi bas que $C_1 |g(x)| \leq |f(x)| \leq C_2 |g(x)|$ chaque fois que $x > k$, où $k = \max(k_1, k_2)$. Inversement, s'il existe des con-stants C_1 , C_2 et k tels que $C_1 |g(x)| \leq |f(x)| \leq C_2 |g(x)|$ pour $x > k$, alors prendre $k_1 = k_2 = k$ montre que $f(x)$ est à la fois $O(g(x))$ et $(g(x))$.

35. y

$C_2 g(x)$

$f(x)$

$C_1 g(x)$

$C = 4$, $k = 9$ **5.** $(x^2+1)/(x+1) = x-1+2/(x+1) < x$ pour tout $x > 1$; témoins $C = 1$, $k = 1$ **7.** Les choix de C et k ne sont pas uniques. **a)** $n = 3$, $C = 3$, $k = 1$ **b)** $n = 3$, $C = 4$, $k = 1$ **c)** $n = 1$, $C = 2$, $k = 1$ **d)** $n = 0$, $C = 2$, $k = 1$

9. $x^2 + 4x + 17 \leq 3x^3$ pour tout $x > 17$, donc $x^2 + 4x + 17$ est $O(x^3)$, avec les témoins $C = 3$, $k = 17$. Cependant, si x^3 étaient $O(x^2 + 4x + 17)$, puis $x^3 \leq C(x^2 + 4x + 17) \leq 3Cx^2$ pour un certain C, pour tout x suffisamment grand, ce qui implique que $x \leq 3C$ pour tout x suffisamment grand, ce qui est impossible. Par conséquent, x^3 est pas $O(x^2 + 4x + 17)$. **11.** $3x^4 1 \leq 4x^4 = 8(x^4/\text{deux})$ pour toutes $x > 1$, de sorte que $3x^4 + 1$ est $O(x^4/2)$, avec les témoins $C = 8$, $k = 1$. Aussi $x^4/2 \leq 3x^4 1$ pour tout $x > 0$, alors $x^4/2$ est $O(3x^4 1)$, avec témoins $C = 1$, $k = 0$. **13.** Parce que $2^n \leq 3^n$ pour tout $n > 0$, il s'ensuit que 2^n est $O(3^n)$, avec les témoins $C = 1$, $k = 0$. Cependant, si 3^n étaient $O(2^n)$, puis pour certains C, $3^n \leq C \cdot 2^n$ pour tous suffisamment grands n. Ceci signifie que $C \geq (\text{trois}/\text{deux})^n$ pour tous n assez grand, ce qui est impossible. Par conséquent, 3^n n'est pas $O(2^n)$. **15.** Toutes les fonctions pour lesquelles il existe des nombres réels k et C avec $|f(x)| \leq C$ pour $x > k$. Ce sont les fonctions $f(x)$ qui sont bornés pour tout x suffisamment grand. **17.** Il existe des stants C_1, C_2, k_1 et k_2 tels que $|f(x)| \leq C_1 |g(x)|$ pour tous $x > k_1$ et $|g(x)| \leq C_2 |h(x)|$ pour tout $x > k_2$. Par conséquent, pour $x >$

k X

37. Si $f(x)$ est (1), alors $|f(x)|$ est limité entre les pos- constantes itives C_1 et C_2. En d'autres termes, $f(x)$ ne peut pas croître plus qu'une limite fixe ou plus petite que la négation tive de cette limite et ne doit pas se rapprocher de 0 que certains borne fixe. **39.** Parce que $f(x)$ est $O(g(x))$, il existe stants C et k tels que $|f(x)| \leq C|g(x)|$ pour $x > k$. Par conséquent, $|f^n(x)| \leq C^n |g^n(x)|$ pour $x > k$, donc $f^n(x)$ est $O(g^n(x))$ en prenant la constante pour être C^n. **41.** Parce que $f(x)$ et $g(x)$ sont croissants et illimités, on peut supposer $f(x) \geq 1$ et $g(x) \geq 1$ pour x suffisamment grand. Il y a constantes C et k avec $f(x) \leq Cg(x)$ pour $x > k$. Cette implique que $\log f(x) \leq \log C + \log g(x) < 2 \log g(x)$ pour x suffisamment grand. Par conséquent, $\log f(x)$ est $O(\log g(x))$. **43.** Par définition, il existe des contraintes positives C_1, C_1, C_2, C_2, k_1, k_1, k_2 et k_2 tels que $f_1(x) \geq C_1 |g(x)|$ pour tout $x > k_1$, $f_1(x) \leq C_1 |g(x)|$ pour tout $x > k_1$, $f_2(x) \geq C_2 |g(x)|$ pour tout $x > k_2$ et $f_2(x) \leq C_2 |g(x)|$ pour tout $x > k_2$. L'ajout des première et troisième inégalités montre que $f_1(x) + f_2(x) \geq (C_1 + C_2)|g(x)|$ pour tout $x > k$ où

Page 22

$k = \max(k_1, k_2)$. Ajout des deuxième et quatrième inégalités montre que $f_1(x) + f_2(x) \leq (C_1 + C_2)|g(x)|$ pour tout $x > k$ où $k = \max(k_1, k_2)$. Par conséquent, $f_1(x) + f_2(x)$ est $(g(x))$. Ce n'est plus vrai si f_1 et f_2 peuvent prendre des valeurs négatives. **45.** C'est faux. Soit $f_1 = x^2 + 2x$, $f_2(x) = x^2 + x$, et $g(x) = x^2$. Alors $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont tous les deux $O(g(x))$, mais $(f_1 - f_2)(x)$ ne l'est pas. **47.** Prenez $f(n)$ pour être la fonction avec $f(n) = n$ si n est un entier positif impair et $f(n) = 1$ si n est un entier pair positif et $g(n)$ être le fonction avec $g(n) = 1$ si n est un entier positif impair et $g(n) = n$ si n est un entier pair positif. **49.** Il existe constantes positives C_1, C_2, C_1, C_2, k_1, k_1, k_2 et k_2 telles que $|f_1(x)| \geq C_1 |g_1(x)|$ pour tout $x > k_1$, $|f_1(x)| \leq C_1 |g_1(x)|$ pour tout $x \geq k_1$, $|f_2(x)| > C_2 |g_2(x)|$ pour tout $x > k_2$, et $|f_2(x)| \leq C_2 |g_2(x)|$ pour tout $x > k_2$. Parce que f_2 et g_2 ne sont jamais nulles, les deux dernières inégalités peuvent être réécrites $|1/f_2(x)| \leq (1/C_2)|1/g_2(x)|$ pour tout $x > k_2$ et $|1/f_2(x)| \geq (1/C_2)|1/g_2(x)|$ pour tout $x > k_2$. Multipliant le premier et réécrit quatrième inégalités montre que $|f_1(x)/f_2(x)| \geq (C_1/C_2)|g_1(x)/g_2(x)|$ pour tout $x > \max(k_1, k_2)$, et mul- tipliant la deuxième et la troisième réécriture des inégalités donne $|f_1(x)/f_2(x)| \leq (C_1/C_2)|g_1(x)/g_2(x)|$ pour tous $x > \max(k_1, k_2)$. Il s'ensuit que f_1/f_2 est un grand Thêta de g_1/g_2.

65. Non . Prenez $f(x) = 1/x^2$ et $g(x) = 1/x$. **67.** **a)** Be- cause $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = 0$, $|f(x)|/|g(x)| < 1$ pour suffisamment grand x. Par conséquent, $|f(x)| < |g(x)|$ pour $x > k$ pour une constante k. Par conséquent, $f(x)$ est $O(g(x))$. **b)** Soit $f(x) = g(x) = x$. Alors $f(x)$ est $O(g(x))$, mais $f(x)$ est pas $o(g(x))$ parce que $f(x)/g(x) = 1$. **69.** Parce que $f_2(x)$ est $o(g(x))$, de l'exercice 67 (a), il s'ensuit que $f_2(x)$ est $O(g(x))$. Par corollaire 1, nous avons $f_1(x) + f_2(x)$ est $O(g(x))$. **71.** Nous peut facilement montrer que $(n-i)(i+1) \geq n$ pour $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Par conséquent, $(n!)^2 = (n \cdot 1)((n-1) \cdot 2) \cdot ((n-2) \cdot 3) \cdots (2 \cdot (n-1)) \cdot (1 \cdot n) \geq n^n$. Par conséquent, $2 \log n! \geq n \log n$. **73.** Calcul ce journal $5! \approx 6.9$ et $(5 \log 5)/4 \approx 2.9$, donc l'égalité vaut pour $n = 5$. Supposons $n \geq 6$. Parce que $n!$ est le produit de tous les entiers de n à 1, nous avoir $n! > n(n-1)(n-2) \cdots \lceil n/2 \rceil$ (car au moins le terme 2 est manquant). Notez qu'il y a plus de $n/2$ termes dans ce produit, et chaque terme est au moins aussi grand que $n/2$. Par conséquent, le produit est supérieur à $(n/2)^{(n/2)}$. Tak- En utilisant le logarithme des deux côtés de l'inégalité, nous avons $\log n! > \text{Journal}\left(\frac{n}{2}\right)^{n/2} = \frac{n}{2} \text{Journal} \frac{n}{2} = \frac{n}{2}(\log n - 1) > (n \log n)/4$, car $n > 4$ implique $\log n - 1 > (\log n)/2$. **75.** Tous ne sont pas asymptotique.

51. Il existe des constantes positives $C_1, C_2, k_1, k_2, k_1, k_2$ tel que $|f(x, y)| \leq C_1 |g(x, y)|$ pour tout $x > k_1$ et $y > k_2$

et $|f(x, y)| \geq C_2 |g(x, y)|$ pour tout $x > k_1$ et $y > k_2$.

53. $(x^2 + xy + x \log y)^3$ $< (3x^2y^3) = 27x^6y^3$ pour $x > 1$ et $y > 1$, car $x^2 < x^2y$, $xy < x^2y$, et $x \log y < x^2y$. Par conséquent, $(x^2 + xy + x \log y)^3$ est $O(x^6y^3)$.

55. Pour tous les nombres réels positifs x et y, $\lfloor xy \rfloor \leq xy$. Par conséquent, $\lfloor xy \rfloor$ est $O(xy)$ de la définition, en prenant $C = 1$ et $k_1 = k_2 = 0$. **57.** Clairement $n^d < n^c$ pour tout $n \geq 2$; donc n^d est $O(n^c)$. Le rapport n^d / n^c $= n^{d-c}$ est un-borné donc il n'y a pas de constante C telle que $n^d \leq Cn^c$ pour grand n. **59.** Si f et g sont des fonctions à valeur positive telles que $\lim_{n\to\infty} f(x)/g(x) = C < \infty$, alors $f(x) < (C+1)g(x)$ pour x suffisamment grand, donc $f(n)$ est $O(g(n))$. Si cette limite est ∞, alors clairement $f(n)$ n'est pas $O(g(n))$. Ici, des applications répétées tions de la règle de L'Hôpital montrent que $\lim_{x\to\infty} x^d / b^x$ $= 0$ et $\lim_{x\to\infty} b^x / x^d$ $= \infty$. **61. a)** $\lim_{x\to\infty} x^2 / x^3$ $=$ $\lim_{x\to\infty} 1/x = 0$ **b)** $\lim_{x\to\infty} \frac{x \text{ journal } x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x}$ $=$ $\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x \ln 2}}{1} = 0$ (en utilisant la règle de L'Hôpital) **c)** $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2^x} =$ $\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2^x \cdot \ln 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{2^x \cdot (\ln 2)^2} = 0$ (en utilisant l'Hôpital de règle) **d)** $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^2} = \lim_{x\to\infty} 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 1 = 0$

63. y

x^2

$\lim_{x} \frac{x \text{ journal } x}{x^2} = 0$

x journal x

x journal x

x^2

X

Section 3.3

1. $O(1)$ **3.** $O(n^2)$ **5.** $2n - 1$ **7.** Linéaire **9.** $O(n)$

11. a) *séparation de* **procédure** $(S_1, S_2, ..., S_n$: sous-ensembles de $\{1, 2, ..., n\})$

réponse : = **faux**

pour i : = 1 **à** n

pour j : = i + 1 **à** n

disjoint : = **true**

pour k : = 1 **à** n

si $k \in S_i$ et $k \in S_j$ **alors** *disjoints* : = **false**

si *disjoint répond* **alors** : = **true**

retourner la *réponse*

b) $O(n^3)$ **13. a)** *puissance* : = 1 , y : = 1; i : = 1, *puissance* : = 2, y : = 3; i : = 2, *puissance* : = 4 , y : = 15 **b)** $2n$ multiplications et n additions **15. a)** $2^{10^9} \approx 10^{3 \times 10^8}$ **b)** 10^9 **c)** 3.96×10^7 **d)** $3\sqrt{\;}$ 16×10^4 **e)** 29 **f)** 12 **17. a)** $2^{2^{60 \cdot 1012}}$ **b)** $2^{60 \cdot 10^{12}}$ **c)** $\lfloor 2^{60 \cdot 10^6} \rfloor \approx 2 \times 10^{2331768}$ **d)** 60 , 000 , 000 **e)** 7 , 745 , 966 **f)** 45 **g)** 6 **19. a)** 36 ans **b)** 13 jours **c)** 19 minutes **21. a)** Moins de 1 milliseconde et plus **b)** 100 millisecondes plus **c)** $2n + 1$ millisecondes plus **d)** $3n^2 + 3n + 1$ millisecondes plus **e)** Deux fois plus temps **f)** 2^{2n+1} fois plus de millisecondes **g)** $n + 1$ fois autant de millisecondes **23.** Le nombre moyen de comparaisons isons est $(3n + 4)/2$. **25.** $O(\log n)$ **27.** $O(n)$ **29.** $O(n^2)$ **31.** $O(n)$ **33.** $O(n)$ **35.** $O(\log n)$ comparaisons; $O(n^2)$ swaps **37.** $O(n^2 2^n)$ **39. a)** double **b)** augmente de 1 **41.** Utilisation algorithme 1, où **A** et **B** sont maintenant $n \times n$ Up-par matrices triangulaires, en remplaçant m par n à la ligne 1, et

ayant q itérer uniquement de i à j , plutôt que de 1 à k .

43. $n(n+1)(n+2)/6$ **45.** **A** $((\mathbf{BC})\mathbf{D})$

Exercices supplémentaires

1. a) procédure *dernier max* $(a_1, ..., a_n$: entiers)

max : = a_1

dernier : = 1

i : = 2

tandis que $i \leq n$

si $a_i \geq max$ **alors**

max : = a_i

dernier : = i

l'autre catégorie. Par exemple, nous pourrions comparer x et y , où tout ce que nous savons, c'est que x a été éliminé comme le minimum. Si nous constatons que $x > y$ dans ce cas, alors seulement une possibilité a été exclue - nous savons maintenant que y est pas le maximum. Ainsi, dans le pire des cas, une entreprise non vierge la paraison élimine une seule possibilité. (Les cas des autres les comparaisons non vierges sont similaires.) $\lfloor n/2 \rfloor$ comparaisons d'éléments non comparés avant, chacun supprimant deux possibilités; ils enlèvent $2\lfloor n/2 \rfloor$ possibilités. Il nous faut donc $2n - 2 - 2\lfloor n/2 \rfloor$ plus de comparaisons qui, comme nous l'avons soutenu, ne peuvent supprimer que une possibilité chacun, afin de trouver les réponses dans le pire

$i := i + 1$

retour *dernier*

b) $2n - 1$ = comparaisons $O(n)$

3. a) *zéros de la paire de* **procédures** ($b_1 b_2 \ldots b_n$: chaîne de bits, $n \geq 2$)

$x := b_1$
$y := b_2$
$k := 2$
tandis que $k < n$ et ($x = 0$ ou $y = 0$)
  $k := k + 1$
  $x := y$
  $y := b_k$
si $x = 0$ et $y = 0$ **puis** imprimer « OUI »
sinon imprimer «NON»

b) $O(n)$

5. a) et **b)**

procédure la *plus petite et la plus grande* ($a_1, a_2, \ldots, a_n$: entiers)
$min := a_1$
$max := a_1$
pour $i := 2$ **à** n
  si $a_i < min$ **alors** $min := a_i$
  si $a_i > max$ **alors** $max := a_i$
{ *min* est le plus petit entier parmi l'entrée, et *max* est le le plus grand}

c) $2n - 2$

7. Avant toute comparaison, il est possible que chaque élément pourrait être le maximum et une possibilité que ce pourrait être le minimum. Cela signifie qu'il y a $2n$ différentes possibilités, et $2n - 2$ d'entre eux doivent être Élimi- par des comparaisons d'éléments, car nous devons trouver le maximum unique et le minimum unique. Nous classons comparer les comparaisons de deux éléments comme «vierge» ou «non vierge», selon que les deux éléments sont comparés ou non ont été dans une comparaison précédente. Une comparaison vierge élimine la possibilité que le plus grand soit le minimum et que le plus petit est le maximum; ainsi chaque vierge la comparaison élimine deux possibilités, mais elle ne peut clairement pas faire plus. Une comparaison non vierge doit être faite entre deux éléments qui sont encore en lice pour être le maximum ou deux les éléments qui sont toujours en lice pour être le minimum, et au moins un de ces éléments *ne* doit *pas* être en lice pour cas, car $2n - 2$ possibilités doivent être éliminées. Cette nous donne un total de $2n - 2 - 2\lceil n/2\rceil + \lfloor n/2\rfloor$ comparaisons dans tout. Mais $2n - 2 - 2\lceil n/2\rceil + \lfloor n/2\rfloor = 2n - 2 - \lfloor n/2\rfloor = 2n - 2 + \lceil -n/2\rceil = \lceil 2n - n/2\rceil - 2 = \lceil 3n/2\rceil - 2$, comme souhaité.

9. L'algorithme suivant a la complexité la plus défavorable $O(n^4)$.

procédure *sommes égales* ($a_1, a_2, \ldots, a_n$)
pour $i := 1$ à n
  pour $j := i + 1$ **à** n {puisque nous voulons $i < j$ }
    pour $k := 1$ **à** n
      pour $l := k + 1$ **à** n {puisque nous voulons $k < l$ }
        si $a_i + a_j = a_k + a_l$ et $(i, j) = (k, l)$
          puis sortir ces paires

11. À la fin du premier passage: 3 , 1 , 4 , 5 , 2 , 6; en fin de seconde réussite: 1 , 3 , 2 , 4 , 5 , 6; à la fin de la troisième passe: 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6; quatrième passe ne trouve rien à échanger et la terminaison de l'algorithme nates **13.** Il y a peut - être autant que n passe par la liste, et chaque passe utilise des comparaisons $O(n)$. Il y a donc sont des comparaisons $O(n^2)$ en tout. **15.** Parce que $\log n < n$, nous avoir $(n \log n + n^2)^3 \leq (n^2 + n^2)^3 \leq (2n^2)^3 = 8n^6$ pour tous $n > 0$. Cela prouve que $(n \log n + n^2)^3$ est $O(n^6)$, avec témoins $C = 8$ et $k = 0$. **17.** $O(x^2 2^x)$ **19.** Notez que $\frac{n!}{2^n} = \frac{n}{2} \cdot \frac{n-1}{2} \cdots \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{2} > \frac{n}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{n}{4}$. **21.** Tous ces éléments les fonctions sont du même ordre. **23.** 2^{107} **25.** $(\log n)^2$, $2^{\sqrt{\log_2 n}}$, $n(\log n)^{1001}$, $n^{1.0001}$, 1.0001^n, n^n **27.** Par exemple, ple, $f(n) = n^{2\lfloor n/2\rfloor + 1}$ et $g(n) = n^{2\lceil n/2\rceil}$

29. a)

procédure *brute* ($a_1, a_2, \ldots, a_n$: entiers)
  pour $i := 1$ **à** $n - 1$
    pour $j := i + 1$ **à** n
      pour $k := 1$ **à** n
        si $a_i + a_j = a_k$ **alors retourne vrai sinon retourne faux**

b) $O(n^3)$

31. Pour m_1 : w_1 et w_2 ; pour m_2 : w_1 et w_3 ; pour m_3 : w_2 et w_3 ; pour w_1 : m_1 et m_2 ; pour w_2 : m_1 et m_3 ; pour w_3 : m_2 et m_3 **33.** Une correspondance dans laquelle chaque femme se voit partenaire valide se classant le plus haut sur sa liste de préférence est une femme optimal; une correspondance dans laquelle chaque homme se voit attribuer son valide partenaire le moins bien placé sur sa liste de préférence est mal. **35. a)** Modifier le préambule de l'exercice 60 du 3.1 pour qu'il y ait s hommes $m_1, m_2, \ldots, m_s$ et t femmes $w_1, w_2, \ldots, w_t$. Une correspondance contiendra des mariages min (s, t). La définition du «mariage stable» est la même, avec comprendre que chaque personne préfère n'importe quel partenaire à assorti. **b)** Créer $|s - t|$ des personnes fictives (hommes ou femmes,

selon la plus petite offre) de sorte que le nombre d'hommes

entier s tel que $a = b + sm$, donc $a - b = sm$. alors et le nombre de femmes devient le même, et mettre ces des personnes fictives au bas des listes de préférences de chacun. **c)** Cela découle immédiatement de l'exercice 63 de la section 3.1. **37.** 5; 15 **39.** La première situation de l'exercice 37 **41. a)** Pour chaque sous-ensemble S de $\{1, 2, ..., n\}$, calculer $\sum_{j \in S} w_j$. Gardez une trace du sous-ensemble donnant la plus grande somme inférieure à ou égal à W, et retourner ce sous-ensemble en tant que sortie de l'algorithme rithm. **b)** Le pack de nourriture et le poêle portable **43. a)** Le makespan est toujours au moins aussi important que la charge sur le chargé de faire le travail le plus long, qui doit être au moins $\max_{j=1,2,...,n} t_j$. Par conséquent, le makespan minimum satisfait cette inégalité. **b)** Le temps total pendant lequel les processeurs besoin de passer à travailler sur les emplois (la charge totale) est $\sum_{j=1}^{n} t_j$. Par conséquent, la charge moyenne par processeur est de $\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{n} t_j$. le la charge maximale ne peut pas être inférieure à la moyenne, la durée de vie minimale est toujours au moins aussi grande. **45.** Processeur 1: travaux 1, 4; processeur 2: tâche 2; processeur 3: travaux 3, 5

CHAPITRE 4

Section 4.1

1. a) Oui **b)** Non **c)** Oui **d)** Non **3.** Supposons que $a \mid b$. alors il existe un entier k tel que $ka = b$. Parce *que* $a(ck) = bc$ il en résulte que d' *un* $\mid bc$. **5.** Si *un* $\mid b$ et $b \mid a$, il y a des entiers c et d tels que $b = ac$ et $a = bd$. Par conséquent, $a = acd$. Parce *que* $a = 0$ il s'ensuit que $cd = 1$. Ainsi, soit $c = d = 1$ ou $c = d = -1$. Par conséquent, soit $a = b$, soit $a = -b$. **7.** Parce que $ac \mid bc$ il y a un entier k tel que $ack = bc$. Par conséquent, $ak = b$, donc *un* $\mid b$. **9. a)** 2 , 5 **b)** −11 , 10 **c)** 34 , 7 **d)** 77 , 0 **e)** 0 , 0 **f)** 0 , 3 **g)** -1 , 2 **h)** 4 , 0 **11. a)** 7h00 **b)** 8h00 **c)** 10h00 **13. a)** 10 **b)** 8 **c)** 0 **d)** 9 **e)** 6 **f)** 11 **15.** Si *un* **mod** $m =$ b **mod** m, alors a et b ont le même reste lorsque divided by m. Par conséquent, $a = q_1 m + r$ et $b = q_2 m + r$, où $0 \le r < m$. Il s'ensuit que $a - b = (q_1 - q_2) m$, donc $m \mid (a - b)$. Il s'ensuit que $a \equiv b \pmod m$. **17.** Il y a un b avec $(b - 1)k < n \le bk$. Donc, $(b - 1)k \le n - 1 < bk$. Diviser par k pour obtenir $b - 1 < n/k \le b$ et $b - 1 \le (n - 1)/k < b$. Donc, $\lceil n/k \rceil = b$ et $\lfloor (n - 1)/k \rfloor = b - 1$. **19.** x **mod** m si x **mod** $m \le \lceil m/2 \rceil$ et $(x$ **mod** $m) - m$ si x **mod** $m > \lceil m/2 \rceil$ **21. a)** 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 9 **23. a)** 1, 109 **b)** 40, 89 **c)** −31, 222 **d)** −21, 38259 **25. a)** −15 **b)** −7 **c)** 140 **27.** −1 , −26 , −51 , −76 , 24 , 49 , 74 , 99 **29. a)** Non **b)** Non **c)** Oui **d)** Non **31. a)** 13 **a)** 6 **33. a)** 9 **b)** 4 **c)** 25 **d)** 0 **35.** Soit $m = tn$. Parce *que* $a \equiv b \pmod m$ il existe un entier s tel que $a = b + sm$. Par conséquent, $a = b + (st)n$, donc $a \equiv b \pmod n$. **37. a)** Soit $m = c = 2$, $a = 0$, et $b = 1$. Alors $0 = ac \equiv bc = 2 \pmod 2$, mais $0 = a \equiv b = 1 \pmod 2$. **b)** Soit $m = 5$, $a = b = 3$, $c = 1$, et $d = 6$. Alors $3 \equiv 3 \pmod 5$ et $1 \equiv 6 \pmod 5$, mais $3^1 = 3 \equiv 4 \equiv 729 = 3^6 \pmod 5$. **39.** Par l'exercice 38, le la somme de deux carrés doit être soit $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$, ou $1 + 1 = 2$, modulo 4, jamais 3, et donc pas du forme $4k + 3$. **41.** Parce *que* $a \equiv b \pmod m$, il existe un $a^k - b^k = (a - b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \cdots + ab^{k-2} + b^{k-1})$, $k \ge 2$, est aussi un multiple de m. Il s'ensuit que $a^k \equiv b^k \pmod m$.

43. Pour prouver la fermeture, notons que $a \cdot_m b = (a \cdot b)$ **mod** m, qui par définition est un élément de $\mathbf{Z}_m$. La multiplication est associée car $(a \cdot_m b) \cdot_m c$ et $a \cdot_m (b \cdot_m c)$ *sont* tous deux égaux $(a \cdot b \cdot c)$ **mod** m et la multiplication des nombres entiers est associée tive. De même, la multiplication dans $\mathbf{Z}_m$ est commutative car la multiplication dans $\mathbf{Z}$ est commutative, et 1 est la multiplicative identité de $\mathbf{Z}_m$ parce que 1 est l'identité multiplicative pour $\mathbf{Z}$. **45.** $0 +_5 0 = 0$, $0 +_5 1 = 1$, $0 +_5 2 = 2$, $0 +_5 3 = 3$, $0 +_5 4 = 4$; $1 +_5 1 = 2$, $1 +_5 2 = 3$, $1 +_5 3 = 4$, $1 +_5 4 = 0$; $2 +_5 2 = 4$, $2 +_5 3 = 0$, $2 +_5 4 = 1$; $3 +_5 3 = 1$, $3 +_5 4 = 2$; $4 +_4 4 = 3$ et $0 \cdot_5 0 = 0$, $0 \cdot_5 1 = 0$, $0 \cdot_5 2 = 0$, $0 \cdot_5 3 = 0$, $0 \cdot_5 4 = 0$; $1 \cdot_5 1 = 1$, $1 \cdot_5 2 = 2$, $1 \cdot_5 3 = 3$, $1 \cdot_5 4 = 4$; $2 \cdot_5 2 = 4$, $2 \cdot_5 3 = 1$, $2 \cdot_5 4 = 3$; $3 \cdot_5 3 = 4$, $3 \cdot_5 4 = 2$; $4 \cdot_5 4 = 1$ **47.** f est sur mais pas un à un (sauf si $d = 1$); g n'est ni l'un ni l'autre.

Section 4.2

1. a) 1110 0111 **b)** 1 0001 1011 0100 **c)** 1 0111 11010110 1100 **3. a)** 31 **b)** 513 **c)** 341 **d)** 26 , 896 **5. a)** 1 0111 1010 **b)** 11 1000 0100 **c)** 1 0001 0011 **d)** 101 0000 1111 **7. a)** 1000 0000 1110 **b)** 1 0011 0101 1010 1011 **c)** 10101011 1011 1010 **d)** 1101 1110 1111 1010 11001110 1101 **9.** 1010 1011 1100 1101 1110 1111 **11.** $(\text{B7B})_{16}$ **13.** En ajoutant jusqu'à trois 0 en tête si nécessaire, écrivez le binaire expansion comme $(\ldots b_{23} b_{22} b_{21} b_{20} b_{13} b_{12} b_{11} b_{10} b_{03} b_{02} b_{01} b_{00})_2$. La valeur de ce chiffre est $b_{00} + 2b_{01} + 4b_{02} + 8b_{03} + 2^4 b_{10} + 2^5 b_{11} + 2^6 b_{12} + 2^7 b_{13} + 2^8 b_{20} + 2^9 b_{21} + 2^{10} b_{22} + 2^{11} b_{23} + \cdots$, que nous pouvons réécrire en $b_{00} + 2b_{01} + 4b_{02} + 8b_{03} + (b_{10} + 2b_{11} + 4b_{12} + 8b_{13}) \cdot 2^4 + (b_{20} + 2b_{21} + 4b_{22} + 8b_{23}) \cdot 2^8 + \cdots$. Maintenant $(b_{i3} b_{i2} b_{i1} b_{i0})_2$ se traduit par le chiffre hexadécimal h_i. Notre nombre est donc $h_0 + h_1 \cdot 2^4 + h_2 \cdot 2^8 + \cdots = h_0 + h_1 \cdot 16 + h_2 \cdot 16^2 + \cdots$, qui est l'hexexpansion décimale $(\ldots h_1 h_1 h_0)_{16}$. **15** Additionner à si nécessaire, écrivez l'expansion binaire comme suit: $(\ldots b_{22} b_{21} b_{20} b_{12} b_{11} b_{10} b_{02} b_{01} b_{00})_2$. La valeur de cette numeral est $b_{00} + 2b_{01} + 4b_{02} + 2^3 b_{10} + 2^4 b_{11} + 2^5 b_{12} + 2^6 b_{20} + 2^7 b_{21} + 2^8 b_{22} + \cdots$, que nous pouvons réécrire comme $b_{00} + 2b_{01} + 4b_{02} + (b_{10} + 2b_{11} + 4b_{12}) \cdot 2^3 + (b_{20} + 2b_{21} + 4b_{22}) \cdot 2^6 + \cdots$. Maintenant $(b_{i2} b_{i1} b_{i0})_2$ se traduit par le chiffre octal h_i. Notre numéro ber est $h_0 + h_1 \cdot 2^3 + h_2 \cdot 2^6 + \cdots = h_0 + h_1 \cdot 8 + h_2 \cdot 8^2 + \cdots$, qui est l'expansion octale $(\ldots h_1 h_1 h_0)_8$. **17.** 1 1101 1100 1010 1101 0001, $1273)_8$ **19.** Convertir l'octal donné numérique en binaire, puis convertir du binaire en hexadécimal en utilisant l'exemple 7. **21. a)** 1011 1110, 10 0001 0000 0001 **b)** 1 1010 1100, 1011 0000 0111 0011 **c)** 100 1001 1010, 101 0010 1001 0110 0000 **d)** 110 0000 0000, 1000 0000 0001 1111 1111 **23. a)** 1132, 144 , 305 **b)** 6273, 2 , 134 , 272 **c)** 2110, 1 , 107 , 667 **d)** 57 , 777, 237 , 326 , 216 **25.** 436 **27.** 27 **29.** L'expansion binaire de l'entier est l'unique telle somme. **31.** Soit $a = (a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0)_{10}$. Alors $a = 10^{n-1} a_{n-1} + 10^{n-2} a_{n-2} + \cdots + 10 a_1 + a_0 \equiv a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_1 + a_0 \pmod 3$, car

$dix^j \equiv 1 \pmod 3$) pour tous les entiers non négatifs j . Il a suivi bas que $3 \mid a$ si et seulement si 3 divise la somme des décomptes chiffres imaux d' *un* . **33.** Soit $a = (a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0)_2$. alors $a = a_0 + 2a_1 + 2^2 a_2 + \cdots + 2^{n-1} a_{n-1} \equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots \pm a_{n-1} \pmod 3$. Il s'ensuit que a est divisible par 3 si et seulement si la somme des chiffres binaires dans le positions numérotées moins la somme des chiffres binaires dans le les positions impaires sont divisibles par 3. **35.** **a)** −6 **b)** 13 **c)** −14 **d)** 0 **37.** On trouve le complément à un de la somme en ajoutant les compléments de l'un des deux nombres entiers, sauf qu'un report dans le bit de tête est utilisé comme report sur le dernier bit de la somme. **39.** Si $m \geq 0$, alors le bit de tête a_{n-1} du l'expansion de son complément de m est 0 et la formule se lit $m = \sum_{i=0}^{n-2} a_i 2^{je}$. Ceci est correct car le côté droit est l'expansion binaire de m . Lorsque m est négatif, le premier peu *un* $_{n-1}$ de l'expansion du complément à un de m est 1. Le les $n-1$ bits restants peuvent être obtenus en soustrayant $-m$ de 111 ... 1 (où il y a n - 1 1s), car en soustrayant un peu à partir de 1 équivaut à le compléter. Par conséquent, la chaîne de bits $a_{n-2} \ldots a_0$ est l'expansion binaire de $(2^{n-1} - 1) - (-m)$. Résoudre l'équation $(2^{n-1} - 1) - (-m) = \sum_{i=0}^{n-2} a_i 2^{je}$ pour m donne l'équation souhaitée car $a_{n-1} = 1$. **41.** **a)** −7 **b)** 13 **c)** −15 **d)** −1 **43.** Pour obtenir le complément à deux représentation de la somme de deux entiers, ajoutez leurs deux représentations complémentaires (à mesure que des entiers binaires sont ajoutés) et ignorer tout report de la colonne la plus à gauche. cependant, la réponse n'est pas valide si un débordement s'est produit. Ça arrive lorsque les chiffres les plus à gauche dans la représentation du complément à deux les deux termes sont d'accord et le chiffre le plus à gauche de la réponse diffère. **45.** Si $m \geq 0$, alors le bit de tête a_{n-1} est 0 et le la formule indique $m = \sum_{i=0}^{n-2} a_i 2^{je}$. Ceci est correct car le côté droit est l'expansion binaire de m . Si $m < 0$, son l'expansion du complément à deux a 1 comme bit de tête et les $n-1$ bits restants sont l'expansion binaire de $2^{n-1} - (-m)$. Cela signifie que $(2^{n-1}) - (-m) = \sum_{i=0}^{n-2} a_i 2^{je}$. Résolution pour m donne l'équation souhaitée car $a_{n-1} = 1$. **47.** $4n$

49. **procédure** *Cantor* (x : entier positif)
$n := 1; f := 1$
tandis que $(n+1) \cdot f \leq x$
  $n := n + 1$
  $f := f \cdot n$
$y := x$
tandis que $n > 0$
  $a_n := \lfloor y/f \rfloor$
  $y := y - a_n \cdot f$
  $f := f/n$
  $n := n - 1$
{ $x = a_n n! + a_{n-1}(n-1)! + \cdots + a_1 1!$ }

51. Première étape: $c = 0$, $d = 0$, $s_0 = 1$; deuxième étape: $c = 0$, $d = 1$, $s_1 = 0$; troisième étape: $c = 1$, $d = 1$, $s_2 = 0$; quatrième étape: $c = 1$, $d = 1$, $s_3 = 0$; cinquième étape: $c = 1$, $d = 1$, $s_4 = 1$; sixième étape: $c = 1$, $s_5 = 1$

53. *soustraction de* **procédure** *(a, b* : entiers positifs, $a > b$,
  $a = (a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0)_2$,
  $b = (b_{n-1} b_{n-2} \ldots b_1 b_0)_2$)
$B := 0$ { B est l'emprunt}
pour $j := 0$ **à** $n - 1$
  si $a_j \geq b_j + B$ **alors**
    $s_j := a_j - b_j - B$
    $B := 0$
  autre
    $s_j := a_j + 2 - b_j - B$
    $B := 1$
{ $(s_{n-1} s_{n-2} \ldots s_1 s_0)_2$ est la différence}

55. **procédure** *comparer (a, b* : entiers positifs,
$a = (a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)_2$,
$b = (b_n b_{n-1} \ldots b_1 b_0)_2$)
$k := n$
tandis que $a_k = b_k$ et $k > 0$
  $k := k - 1$
si $a_k = b_k$ **alors** imprime « a est égal à b »
si $a_k > b_k$ **alors** imprime « a est supérieur à b »
si $a_k < b_k$ **alors** imprime « a est inférieur à b »

57. $O(\log n)$ **59.** La seule partie chronophage de l'algorithme est le **tout** en boucle, qui est itérée q fois. L'oeuvre fait à l'intérieur est une soustraction d'entiers pas plus grand que a , qui a *un* journal *un peu* . Le résultat découle maintenant de l'exemple 9.

Section 4.3

1. 29,71,97 prime; 21.111.143 non premier **3.** **a)** $2^3 \cdot 11$ **b)** $2 \cdot 3^2 \cdot 7$ **c)** 3^6 **d)** $7 \cdot 11 \cdot 13$ **e)** $11 \cdot 101$ **f)** $2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37$ **5.** $2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$

7. *primetester de la* **procédure** (n : entier supérieur à 1)
  isprime := **true**
  $d := 2$
  tandis que *isprime* et $d \leq \sqrt{n}$
    si n **mod** $d = 0$ **alors** *isprime* := **false**
    sinon $d := d + 1$
  retourner *isprime*

9. Écrivez $n = rs$, où $r > 1$ et $s > 1$. Puis $2^n - 1 = 2^{rs} - 1 = (2^r)^s - 1 = (2^r - 1)((2^r)^{s-1} + (2^r)^{s-2} + (2^r)^{s-3} + \cdots + 1)$. Le premier facteur est au moins $2^2 - 1 = 3$ et le second est au moins $2^2 + 1 = 5$. Ceci fournit une factorisation de $2^n - 1$ en deux facteurs supérieurs à 1, donc $2^n - 1$ est composite. **11.** Supposons que $\log_2 3 = a/b$ où $a, b \in \mathbf{Z}^+$ et $b = 0$. Puis $2^{a/b} = 3$, donc $2^a = 3^b$. Cela viole les principes fondamentaux théorème de l'arithmétique. Par conséquent, $\log_2 3$ est irrationnel. **13.** 3, 5, et 7 sont des nombres premiers de la forme souhaitée. **15.** 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 **17.** **a)** Oui **b)** Non **c)** Oui **d)** Oui **19.** Supposons que n n'est pas premier, de sorte que $n = ab$, où a et b sont intégrés gers supérieur à 1. Parce *que* $a > 1$, par l'identité de l'indice, $2^a - 1$ est un facteur de $2^n - 1$ qui est supérieur à 1, et le second

facteur de cette identité est également supérieur à 1. Par conséquent, $2^{n}-1$ est pas premier. **21.** **a)** 2 **b)** 4 **c)** 12 **23.** $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$
25. **a)** $3^5 \cdot 5^3$ **b)** 1 **c)** 23^{17} **d)** $41 \cdot 43 \cdot 53$ **e)** 1 **f)** 1111
27. **a)** $2^{11} \cdot 3^7 \cdot 5^9 \cdot 7^3$ **b)** $2^9 \cdot 3^7 \cdot 5^5 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$ **c)** 23^{31} **d)** $41 \cdot 43 \cdot 53$ **e)** $2^{12} 3^{13} 5^{17} 7^{21}$ **f)** Non défini
29. pgcd $(92928, 123552) = 1056$; lcm $(92928, 123552) = 10,872,576$; les deux produits sont $11,481,440,256$. **31.** Parce que $\min(x, y) + \max(x, y) = x + y$, l'exposant de p_i dans la décomposition en facteurs premiers de pgcd $(a, b) \cdot$ ppcm (a, b) est la somme de les exposants de p_i dans les factorisations premières de a et b.
33. **a)** 6 **b)** 3 **c)** 11 **d)** 3 **e)** 40 **f)** 12 **35.** 9 **37.** Par exercise 36, il s'ensuit que gcd $(2^b - 1, (2^a - 1) \textbf{ mod } (2^b - 1)) =$ pgcd $(2^b - 1, 2^{a \textbf{ mod } b} - 1)$. Parce que les exposants impliqués dans le calcul sont b et a **mod** b, les mêmes que le quan- impliquées dans le calcul du pgcd (a, b), les étapes utilisées par le Algorithme euclidien pour calculer le pgcd $(2^a - 1, 2^b - 1)$ rodage parallèlement à ceux utilisés pour calculer le pgcd (a, b) et montrer que pgcd $(2^a - 1, 2^b - 1) = 2^{\text{pgcd}(a, b)} - 1$. **39.** **a)** $1 = (-1) \cdot 10 + 1 \cdot 11$ **b)** $1 = 21 \cdot 21 + (-10) \cdot 44$
c) $12 = (-1) \cdot 36 + 48$ **d)** $1 = 13 \cdot 55 + (-21) \cdot 34$
e) $3 = 11 \cdot 213 + (-20) \cdot 117$ **f)** $223 = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 223$ **g)** $1 = 37 \cdot 2347 + (-706) \cdot 123$ **h)** $2 = 1128 \cdot 3454 + (-835) \cdot 4666$
i) $1 = 2468 \cdot 9999 + (-2221) \cdot 11111$ **41.** $(-3) \cdot 26 + 1 \cdot 91 = 13$ **43.** $34 \cdot 144 + (-55) \cdot 89 = 1$

45. **procédure** *euclidienne étendue* (a, b : entiers positifs)
$x := a$
$y := b$
oldolds $:= 1$
anciens $:= 0$
oldoldt $:= 0$
oldt $:= 1$
tandis que $y = 0$
$q := x$ **div** y
$r := x$ **mod** y
$x := y$
$y := r$
$s :=$ *oldolds* $- q \cdot$ *olds*
$t :=$ *oldoldt* $- q \cdot$ *oldt*
oldolds $:=$ *olds*
oldoldt $:=$ *oldt*
olds $:= s$
oldt $:= t$
{gcd (a, b) est x, et $(oldolds)\, a + (oldoldt)\, b = x$ }

47. **a)** $a_n = 1$ si n est premier et $a_n = 0$ sinon. **b)** a_n est le le plus petit facteur premier de n avec $un_1 = 1$. **c)** un_n est le nombre de diviseurs positifs de n. **d)** $a_n = 1$ si n n'a pas de diviseurs qui sont carrés parfaits supérieurs à 1 et $a_n = 0$ sinon. **e)** a_n est le plus grand nombre premier inférieur ou égal à n. **f)** a_n est le produit de les n -1 premiers nombres premiers. **49.** Parce que chaque deuxième entier est divisible par 2, le produit est divisible par 2. Parce que chaque tiers entier est divisible par 3, le produit est divisible par 3. Par conséquent le produit a à la fois 2 et 3 dans sa factorisation principale et est donc divisible par $3 \cdot 2 = 6$. **51.** $n = 1601$ est un contre-ample. **53** La définition de $k = a + b + 1$ produira le composite nombre $a(a + b + 1) + b = a^2 + ab + a + b = (a + 1)(a + b)$.

55. Supposons qu'il n'y ait qu'un nombre fini de nombres premiers de forme $4k + 3$, à savoir $q_1, q_2, \ldots, q_n$, où $q_1 = 3$, $q_2 = 7$, etc. Soit $Q = 4q_1q_2 \cdots q_n - 1$. Notez que Q est de la forme $4k + 3$ (où $k = q_1q_2 \cdots q_n - 1$). Si Q est premier, alors nous ont trouvé un nombre premier de la forme souhaitée différent de tous ceux répertoriés. Si Q n'est pas premier, alors Q a au moins un facteur premier pas dans la liste $q_1, q_2, \ldots, q_n$, car le reste lorsque Q est divisé par q_j est $q_j - 1$, et $q_j - 1 = 0$. Parce que tout impair les nombres premiers sont de la forme $4k + 1$ ou de la forme $4k + 3$, et le produit des nombres premiers de la forme $4k + 1$ est également de cette forme (car $(4k + 1)(4m + 1) = 4(4km + k + m) + 1$), il doit y avoir être un facteur Q de la forme $4k + 3$ différent des nombres premiers nous avons énuméré. **57.** Étant donné un entier positif x, nous montrons qu'il est exactement un nombre rationnel positif m / n (en termes les plus bas) tel que $K(m / n) = x$. D'après la factorisation de x, lire sur le m et n tels que $K(m / n) = x$. Les nombres premiers qui se produisent à même des puissances sont les nombres premiers qui se produisent dans le facteur premier- de m, les exposants étant la moitié du nombre correspondant exposants en x ; et les nombres premiers qui se produisent à des puissances impaires sont les nombres premiers qui se produisent dans la factorisation principale de n, avec le les exposants étant la moitié d'un de plus que les exposants de x.

Section 4.4

1. $15 \cdot 7 = 105 \equiv 1 \pmod{26}$ **3.** 7 **5.** **a)** 7 **b)** 52 **c)** 34
d) 73 **7.** Supposons que b et c soient tous deux inverses d' *un* modulo m. Ensuite $ba \equiv 1 \pmod{m}$ et $ca \equiv 1 \pmod{m}$. Par conséquent, $ba \equiv ca \pmod{m}$. Parce que gcd $(a, m) = 1$, il suit par- orem 7 dans la section 4.3 qui $b \equiv c \pmod{m}$. **9.** 8 **11.** **a)** 67
b) 88 **c)** 146 **13.** 3 et 6 **15.** Soit $m = m /$ pgcd (c, m).
Parce que tous les facteurs communs de m et c sont divisés m pour obtenir m, il s'ensuit que m et c sont relativement premiers.
Parce que m divise $ac - bc = (a - b)c$, il s'ensuit que m divise $(a - b)c$. Par le lemme 3 de la section 4.3, nous voyons que m divise $a - b$, donc $a \equiv b \pmod{m}$. **17.** Supposons que $x^2 \equiv 1 \pmod{p}$. Alors p divise $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$.
Par le lemme 2, il s'ensuit que $p \mid x + 1$ ou $p \mid x - 1$, donc $x \equiv -1 \pmod{p}$ ou $x \equiv 1 \pmod{p}$. **19.** **a)** Supposons que $ia \equiv ja \pmod{p}$, où $1 \le i < j < p$. Alors p *se* divise $ja - ia = a(j - i)$. Par le théorème 1, car a n'est pas divisible par p, p divise $j - i$, ce qui est impossible car $j - i$ est un entier positif inférieur à p. **b)** Par la partie (a), car il n'y a pas deux d' *un*, $2a, \ldots, (p - 1)a$ sont modulo p congrus, chacun doit être congruente à un nombre différent de 1 à p -1. Il s'ensuit que $a \cdot 2a \cdot 3a \cdots (p - 1) \cdot a \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (p - 1) \pmod{p}$. Il s'ensuit que $(p - 1)! \cdot a^{p-1} \equiv p - 1 \pmod{p}$. **c)** Par Wilson's théorème et partie (b), si p ne divise pas a, il s'ensuit que $(-1) \cdot a^{p-1} \equiv -1 \pmod{p}$. Donc, $un^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. **d)** Si $p \mid a$, alors $p \mid un^p$. Donc, $a^p \equiv a \equiv 0 \pmod{p}$. Si p ne le fait pas diviser a, puis $a^{p-1} \equiv a \pmod{p}$, par la partie (c). Multiplier les deux côtés de cette congruence par a donne $un^p \equiv a \pmod{p}$.
21. Tous les entiers de la forme $323 + 330k$, où k est un entier
23. Tous les entiers de la forme $53 + 60k$, où k est un entier

Page 27

25. **procédure** *chinoise* $(m_1, m_2, \ldots, m_n$: relativement nombres premiers positifs premiers; $a_1, a_2, \ldots, a_n$: entiers $)$
$m := 1$
pour $k := 1$ **à** n
$m := m \cdot m_k$
pour $k := 1$ **à** n
$M_k := m / m_k$
$y_k := M_k^{-1}$ **mod** m_k
$x := 0$
pour $k := 1$ **à** n
$x := x + a_k M_k y_k$
tandis que $x \geq m$
$x := x - m$
return x {la plus petite solution du système $\{x \equiv a_k \pmod{m_k}, k = 1, 2, \ldots, n\}$}

27. Tous les entiers de la forme $16 + 252k$, où k est un entier ger **29.** Supposons que p est un nombre premier apparaissant dans le nombre premier factorisation de $m_1 m_2 \cdots m_n$. Parce que les m_i s sont relativement premier, p est un facteur d'exactement l'un des m_i s, disons m_j. Être-car m_j divise $a - b$, il s'ensuit que $a - b$ a la fac-tor p dans sa factorisation principale à une puissance au moins aussi grande comme la puissance à laquelle il apparaît dans la factorisation tion de m_j. Il s'ensuit que $m_1 m_2 \cdots m_n$ divise $a - b$, donc $a \equiv b \pmod{m_1 m_2 \cdots m_n}$. **31.** $x \equiv 1 \pmod 6$ **33.** 7

35. $a^{p-2} \cdot a = a \cdot a^{p-2} = a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ **37.** **a)** Par Le petit théorème de Fermat, nous avons $2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$. Par conséquent, $2^{340} = (2^{10})^{34} \equiv 1^{34} = 1 \pmod{11}$. **b)** Parce que $32 \equiv 1 \pmod{31}$, il s'ensuit que $2^{340} = (2^5)^{68} = 32^{68} \equiv 1^{68} = 1 \pmod{31}$. **c)** Parce que 11 et 31 sont relativement premiers, et $11 \cdot 31 = 341$, il suit des parties (a) et (b) et Exer-cise 29 que $2^{340} \equiv 1 \pmod{341}$. **39.** **a)** 3, 4, 8 **b)** 983
41. Supposons que q est un nombre impair impair avec $q \mid 2^p - 1$. Par Fermat petit théorème, $q \mid 2^{q-1} - 1$. De l'exercice 37 de la section 4.3, pgcd $(2^{p-1}, 2^{q-1} - 1) = 2^{\text{pgcd}(p,\, q-1)} - 1$. Parce que q est un com-mon diviseur de $2^{p} - 1$ et $2^{q-1} - 1$, pgcd $(2^{p} - 1, 2^{q-1} - 1) > 1$. Par conséquent, gcd $(p, q-1) = p$, car la seule autre possibilité, à savoir, gcd $(p, q-1) = 1$, nous donne gcd $(2^{p} - 1, 2^{q-1} - 1) = 1$. Par conséquent, $p \mid q - 1$, et donc il y a un entier positif m tel que $q - 1 = mp$. Parce que q est impair, m doit être même, disons, $m = 2k$, et donc chaque diviseur premier de $2^{p} - 1$ est de la forme $2kp + 1$. De plus, le produit de nombres de cette forme est également de cette forme. Par conséquent, tous les diviseurs sur $2^p - 1$ sont de cette forme. **43.** M_{11} n'est pas un nombre premier; M_{17} est premier. **45.** Premièrement, $2047 = 23 \cdot 89$ est composite. Écrire $2047 - 1 = 2046 = 2 \cdot 1023$, donc $s = 1$ et $t = 1023$ in la définition. Alors $2^{1023} = (2^{11})^{93} = 2048^{93} \equiv 1^{93} = 1 \pmod{2047}$, comme souhaité. **47.** Il faut montrer que $b^{2820} \equiv 1 \pmod{2821}$ pour tout b relativement premier à 2821. Notez que $2821 = 7 \cdot 13 \cdot 31$, et si pgcd $(b, 2821) = 1$, alors pgcd $(b, 7) =$ gcd $(b, 13) =$ gcd $(b, 31) = 1$. En utilisant le lit de Fermat tle théorème nous trouvons que $b^6 \equiv 1 \pmod 7$, $b^{12} \equiv 1 \pmod{13}$, et $b^{30} \equiv 1 \pmod{31}$. Il s'ensuit que $b^{2820} \equiv (b^6)^{470} \equiv 1 \pmod 7$, $b^{2820} \equiv (b^{12})^{235} \equiv 1 \pmod{13}$ et $b^{2820} \equiv (b^{30})^{94} \equiv 1 \pmod{31}$. Par l'exercice 29 (ou le rapport chinois théorème de Mainder), il s'ensuit que $b^{2820} \equiv 1 \pmod{2821}$, comme voulu. **49.** **a)** Si nous multiplions cette expression, nous obtenons $n = 1296m^3 + 396m^2 + 36m + 1$. Clairement $6m \mid n - 1$, $12m \mid n - 1$ et $18m \mid n - 1$. Par conséquent, les conditions l'exercice 48 est respecté, et nous concluons que n est un Carmichael nombre. **b)** Laisser $m = 51$ donne $n = 172, 947, 529$.
51. $0 = (0, 0)$, $1 = (1, 1)$, $2 = (2, 2)$, $3 = (0, 3)$, $4 = (1, 4)$, $5 = (2, 0)$, $6 = (0, 1)$, $7 = (1, 2)$, $8 = (2, 3)$, $9 = (0, 4)$, $10 = (1, 0)$, $11 = (2, 1)$, $12 = (0, 2)$, $13 = (1, 3)$, $14 = (2, 4)$ **53.** Nous avons $m_1 = 99$, $m_2 = 98$, $m_3 = 97$, et $m_4 = 95$, donc $m = 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 95 = 89, 403, 930$. Nous constater que $M_1 = m / m_1 = 903, 070$, $M_2 = m / m_2 = 912, 285$, $M_3 = m / m_3 = 921, 690$ et $M_4 = m / m_4 = 941, 094$.
En utilisant l'algorithme euclidien, nous calculons que $y_1 = 37$, $y_2 = 33$, $y_3 = 24$ et $y_4 = 4$ sont des inverses de M_k modulo m_k pour $k = 1, 2, 3, 4$, respectivement. Il s'ensuit que la solution tion est $65 \cdot 903, 070 \cdot 37 + 2 \cdot 912, 285 \cdot 33 + 51 \cdot 921, 690 \cdot 24 + 10 \cdot 941, 094 \cdot 4 = 3, 397, 886, 480 \equiv 537, 140 \pmod{89, 403, 930}$. **55.** $\log_2 5 = 16$, $\log_2 6 = 14$
57. $\log_3 1 = 0$, $\log_3 2 = 14$, $\log_3 3 = 1$, $\log_3 4 = 12$, $\log_3 5 = 5$, $\log_3 6 = 15$, $\log_3 7 = 11$, $\log_3 8 = 10$, $\log_3 9 = 2$, $\log_3 10 = 3$, $\log_3 11 = 7$, $\log_3 12 = 13$, $\log_3 13 = 4$, $\log_3 14 = 9$, $\log_3 15 = 6$, $\log_3 16 = 8$ **59.** Supposons que s soit une solution de $x^2 \equiv a \pmod p$. Alors parce que $(-s)^2 = s^2$, $-s$ est aussi une solution. De plus, $s \equiv -s \pmod p$. Autrement, $p \mid 2s$, ce qui implique que $p \mid s$, et cela implique, en utilisant l'hypothèse d'origine, que $p \mid a$, ce qui est une contradiction. De plus, si s et t sont des solutions incongrues modulo p, alors parce que $s^2 \equiv t^2 \pmod p$, $p \mid s^2 - t^2$. Ceci implique que $p \mid (s + t)(s - t)$, et par le lemme 3 dans la section 4.3, $p \mid s - t$ ou $p \mid s + t$, donc $s \equiv t \pmod p$ ou $s \equiv -t \pmod p$. Par conséquent, il y a au plus deux solutions. **61.** La valeur de $\left(\frac{une}{p}\right)$ dé-ne dépend que de savoir si a est un résidu quadratique modulo p, que est de savoir si $x^2 \equiv a \pmod p$ a une solution. Parce que cela ne dépend que de la classe d'équivalence d' *un* modulo p, il s'ensuit cette $\left(\frac{une}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)$ si $a \equiv b \pmod p$. **63.** Par l'exercice 62, $\left(\frac{une}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right) = a^{(p-1)/2} b^{(p-1)/2} = (ab)^{(p-1)/2} \equiv \left(\frac{un\ B}{p}\right) \pmod p$.
65. $x \equiv 8, 13, 22$, ou 27 (mod 35) **67.** Calculer r^e **mod** p pour $e = 0, 1, 2, \ldots, p - 2$ jusqu'à ce que nous obtenions la réponse a. Pire le cas et la complexité du temps moyen du cas sont $O(p \log p)$.

Section 4.5

1. 91, 57, 21, 5 **3.** **a)** 7, 19, 7, 7, 18, 0 **b)** Prenez la suivante espace disponible **mod** 31. **5.** $1, 5, 4, 1, 5, 4, 1, 5, 4, \ldots$
7. 2, 6, 7, 10, 8, 2, 6, 7, 10, 8, ... **9.** 2357, 5554, 8469, 7239, 4031, 2489, 1951, 8064 **11.** $2, 1, 1, 1, \ldots$ **13.** Uniquement chaîne (d) **15.** 4 **17.** Correctement, bien sûr **19.** **a)** Non valide **b)** valide **c)** valide **d)** non valide **21.** **a)** non **b)** 5 **c)** 7 **d)** 8
23. Erreurs de transposition impliquant le dernier chiffre **25.** **a)** Oui **b)** Non **c)** Oui **d)** Non **27.** Les erreurs de transposition seront si et seulement si les chiffres transposés sont un nombre impair nombre de positions et ne diffèrent pas de 5. **29.** **a)** Valide **b)** Non valide **c)** Valide **d)** Valide **31.** Oui, tant que le deux chiffres ne diffèrent pas de 7 **33.** **a)** Non valide **b)** Valide **c)** Valide **d)** Non valide **35.** La congruence donnée est équivalente prêté à $3d_1 + 4d_2 + 5d_3 + 6d_4 + 7d_5 + 8d_6 + 9d_7 + 10d_8 \equiv 0 \pmod{11}$. Transposition des chiffres adjacents x et y (avec x sur la

gauche) fait augmenter le côté gauche de $x - y$. Car $x \equiv y \pmod{11}$, la congruence ne tiendra plus. Là- les erreurs antérieures de ce type sont toujours détectées.

Section 4.6

1. **a)** GR QRW SDVV JR **b)** QB ABG CNFF TB **c)** QX UXM AHJJ ZX **3.** **a)** KOHQV MCIF GHSD **b)** RVBXP TJPZ NBZX **c)** DBYNE PHRM FYZA **5.** **a)** REMISE MAINTENANT **b)** SOYEZ MON AMI **c)** TEMPS DE PLAISIR **7.** POUR SOMMEIL PERCHANCE POUR RÊVER **9.** TOUT SUFFIS- UNE TECHNOLOGIE DE POINTE AVANCÉE EST INDISTIN- GUISHABLE DE MAGIC **11.** $p = 7c + 13$ **mod** 26
13. $a = 18$, $b = 5$ **15.** ATTENTION AUX MARTIENS
17. Vraisemblablement quelque chose comme un chiffre affine
19. OURAGAN **21.** La longueur de la clé peut très bien être le plus grand diviseur commun des distances entre les départs de la chaîne répétée (ou un facteur du pgcd). **23.** Supposons nous connaissons à la fois $n = pq$ et $(p-1)(q-1)$. Pour trouver p et q, d'abord notons que $(p-1)(q-1) = pq - p - q + 1 = n - (p+q) + 1$. De là, nous pouvons trouver $s = p + q$. Parce que $q = s - p$, nous avons $n = p(s-p)$. Par conséquent, $p^2 - ps + n = 0$. Nous peut maintenant utiliser la formule quadratique pour trouver p. Une fois que nous avons trouvé p, on peut trouver q car $q = n/p$. **25.** 2545 2757 1211 **27.** ARGENT **29.** Alice envoie 5^8 **mod** $23 = 16$ à Bob. Bob envoie 5^5 **mod** $23 = 20$ à Alice. Alice calcule 20^8 **mod** $23 = 6$ et Bob calcule 16^5 **mod** $23 = 6$. Le la clé partagée est 6. **31.** 2186 2087 1279 1251 0326 0816 1948
33. Alice peut décrypter la première partie du message de Cathy à apprendre la clé, et Bob peut décrypter la deuxième partie de Cathy message, que Alice lui a transmis, pour apprendre la clé. Non quelqu'un d'autre que Cathy peut apprendre la clé, parce que tous ces les communications utilisent des clés privées sécurisées.

Exercices supplémentaires

1. Le nombre réel de miles parcourus est de $46518 + 100000k$ pour un certain nombre naturel k. **3.** $5, 22, -12, -29$ **5.** Parce que $ac \equiv bc \pmod{m}$ il y a un entier k tel que $ac = bc + km$. Par conséquent, $a - b = km/c$. Parce *que* $a - b$ est un entier, $c \mid km$. Soit $d = \gcd(m, c)$, écrivez $c = de$. Parce que non facteur e divise m/j, il en résulte que $d \mid m$ et $e \mid k$. Donc $a - b = (k/e)(m/j)$, où $k/e \in \mathbf{Z}$ et $m/j \in \mathbf{Z}$. Là- avant $a \equiv b \pmod{m/d}$. **7.** Preuve de la contrapositive: Si n est impair, alors $n = 2k + 1$ pour un entier k. Donc $n^2 + 1 = (2k+1)^2 + 1 = 4k^2 + 4k + 2 \equiv 2 \pmod 4$. Mais les carrés parfaits de nombres pairs sont congrus à 0 modulo 4 (parce que $(2m)^2 = 4m^2$), et des carrés parfaits de nombres impairs sont congruentes à 1 ou 3 modulo 4, donc $n^2 + 1$ n'est pas parfait carré. **9.** n est divisible par 8 si et seulement si l'expansion binaire sion de n se termine par 000. **11.** Nous partons du principe que quelqu'un a sur. Après avoir connu les réponses à ces n questions, nous allons connaître le nombre, car nous connaîtrons son expansion binaire.
13. $(a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)_{10} = \sum_{k=0}^{n} 10^k a_k \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k \pmod 9$ parce que $10^k \equiv 1 \pmod 9$ pour chaque entier non négatif k.
15. Parce que pour tout $k \le n$, lorsque Q_n est divisé par k, le mainder sera 1, il s'ensuit qu'aucun nombre premier inférieur à ou égal à n est un facteur de Q_n. Ainsi, par la théorie fondamentale rem de l'arithmétique, Q_n doit avoir un facteur premier supérieur à n.
17. Prenez $a = 10$ et $b = 1$ dans le théorème de Dirichlet. **19.** Chaque un nombre supérieur à 11 peut être écrit comme $8 + 2n$ ou $9 + 2n$ pour certains $n \ge 2$. **21.** Supposons que chaque entier pair supérieur que 2 est la somme de deux nombres premiers, et soit n un entier supérieur de 5. Si n est impair, écrivez $n = 3 + (n-3)$ et décomposez $n - 3 = p + q$ dans la somme de deux nombres premiers; si n est pair, alors écrire $n = 2 + (n-2)$ et décomposer $n - 2 = p + q$ en la somme de deux nombres premiers. Pour l'inverse, supposons que chaque nombre entier supérieur à 5 est la somme de trois nombres premiers, et que n soit un entier pair supérieur à 2. Écrivez $n + 2$ comme la somme de trois des nombres premiers, dont l'un est nécessairement 2, donc $n + 2 = 2 + p + q$, d'où $n = p + q$. **23.** Rappelons qu'un poly- nomial ne peut prendre la même valeur qu'un nombre fini de fois. Ainsi f ne peut prendre les valeurs 0 et ± 1 que de façon finie plusieurs fois, donc s'il n'y a pas un y tel que $f(y)$ soit com- posite, alors il doit y avoir un certain x_0 tel que $\pm f(x_0)$ est premier, dis p. Regardez $f(x_0 + kp)$. Quand on branche $x_0 + kp$ pour x dans le polynôme et le multiplier, chaque terme contiendra un facteur de p *à l′* exception des termes qui forment $f(x_0)$. Donc $f(x_0 + kp) = f(x_0) + mp = (m \pm 1)p$ pour un entier m. Comme k varie, cette valeur peut être 0, p ou $-p$ seulement plusieurs fois de façon finie; il doit donc s'agir d'un nombre composite pour certaines valeurs de k.
25. 1 **27.** 1 **29.** Sinon, supposons que $q_1, q_2, \ldots, q_n$ sont tous les nombres premiers de la forme $6k + 5$. Soit $Q = 6q_1q_2 \cdots q_n - 1$. Notez que Q est de la forme $6k + 5$, où $k = q_1q_2 \cdots q_n - 1$. Soit $Q = p_1p_2 \cdots p_t$ être la factorisation de Q. Non p_i est 2, 3 ou tout q_j, car le reste lorsque Q est divisé par 2 est 1, par 3 est 2, et par q_j est $q_j - 1$. Tous les nombres premiers impairs autres que 3 sont de la forme $6k+1$ ou $6k+5$, et le produit de nombres premiers de la forme $6k + 1$ est également de cette forme. Par conséquent, au moins un des les p_i doivent être de la forme $6k+5$, une contradiction. **31.** Le le produit des nombres de la forme $4k + 1$ est de la forme $4k + 1$, mais les numéros de ce formulaire peuvent avoir des numéros qui ne sont pas de cette forme comme leurs seuls facteurs premiers. Par exemple, $49 = 4 \cdot 12 + 1$, mais la factorisation principale de 49 est $7 \cdot 7 = (4 \cdot 1 + 3)(4 \cdot 1 + 3)$.
33. **a)** pas mutuellement relativement premiers **b)** mutuellement relativement premier **c)** mutuellement relativement premier **d)** mutuellement relativement prime **35** 1 **37.** $x \equiv 28 \pmod{30}$ **39.** Par les Chinois théorème du reste, il suffit de montrer que $n^9 - n \equiv 0 \pmod 2$, $n^9 - n \equiv 0 \pmod 3$ et $n^9 - n \equiv 0 \pmod 5$. Chacun à son tour découle de l'application du petit théorème de Fermat.
41. Par le petit théorème de Fermat, $p^{q-1} \equiv 1 \pmod q$ et clairement $q^{p-1} \equiv 0 \pmod q$. Donc $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 + 0 = 1 \pmod q$. De même, $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod p$. Ça suit

choisi un entier positif inférieur à 2^n, que nous devinons. Nous demandons à la personne d'écrire le nombre en binaire, en utilisant 0s si nécessaire pour lui faire n bits de long. Nous demandons ensuite «est le premier bit 1? "," Le deuxième bit est-il 1? "," Le troisième bit est-il 1? ", et ainsi

du théorème du reste chinois que $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{pq}$. **43.** Si a_i passe de x à y, le changement dans le côté gauche de la congruence est soit $y - x$ ou $3(y - x)$, modulo 10, dont aucun ne peut être 0 car 1 et

Page 29

3 sont relativement premiers à 10. Par conséquent, la somme ne peut plus être 0 modulo 10. **45.** Modulo 10 de travail, résoudre pour d_9. Le chiffre de contrôle pour 11100002 est 5. **47.** VEUILLEZ ENVOYER ARGENT **49.** **a)** QAL HUVEM À WVESGB **b)** QXB EVZZL ZEVZZRFS

CHAPITRE 5

Section 5.1

1. Soit $P(n)$ la déclaration que le train s'arrête à l'arrêt tion n. *Étape de base:* On nous dit que $P(1)$ est vrai. *Induit étape positive:* on nous dit que $P(n)$ implique $P(n+1)$ pour chaque $n \geq 1$. Par conséquent, selon le principe de l'induc- tion, $P(n)$ est vrai pour tous les entiers positifs n. **3.** **a)** $1^2 = 1 \cdot 2 \cdot 3 /$ six **b)** Les deux côtés de $P(1)$ présentés dans la partie (a) égal 1. **c)** $1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = k(k+1)(2k+1)/6$ **d)** Pour chacun $k \geq 1$ que $P(k)$ implique $P(k+1)$; en d'autres termes, cette en résumant l'hypothèse inductive [voir partie (c)] nous pouvons montrer $1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = (k+1)(k+2)(2k+3)/6$ **e)** $(1^2 + 2^2 + \cdots + k^2) + (k+1)^2 = [k(k+1)(2k+1)/6] + (k+1)^2 = [(k+1)/6][k(2k+1) + 6(k+1)] = [(k+1)/6](2k^2 + 7k + 6) = [(k+1)/6](k+2)(2k+3) = (k+1)(k+2)(2k+3)/6$ **f)** Nous avons terminé à la fois l'étape de base et l'étape inductive, donc par le principe d'induction mathématique, l'énoncé est vrai pour chaque pos- entier itif n. **5.** Soit $P(n)$ soit «$1^2 + 3^2 + \cdots + (2n+1)^2 = (n+1)(2n+1)(2n+3)/3$.» *Étape de base:* $P(0)$ est vrai car $1^2 = 1 = (0+1)(2 \cdot 0+1)(2 \cdot 0+3)/3$. *Étape inductive:* Supposons que $P(k)$ est vrai. Ensuite $1^2 + 3^2 + \cdots + (2k+1)^2 + [2(k+1)+1]^2 = (k+1)(2k+1)(2k+3)/3 + (2k+3)^2 = (2k+3)[(k+1)(2k+1)/3 + (2k+3)] = (2k+3)(2k^2+9k+10)/3 = (2k+3)(2k+5)(k+2)/3 = [(k+1)+1][2(k+1)+1][2(k+1)+3]/3$. **7.** Soit $P(n)$ «$\sum_{j=0}^{n} 3 \cdot 5^j = 3(5^{n+1} - 1)/4$.» *Étape de base:* $P(0)$ est vrai car $\sum_{j=0}^{0} 3 \cdot 5^j = 3 = 3(5^1 - 1)/4$. *Étape inductive:* Supposons que $\sum_{j=0}^{k} 3 \cdot 5^j = 3(5^{k+1} - 1)/4$. alors $\sum_{j=0}^{k+1} 3 \cdot 5^j = (\sum_{j=0}^{k} 3 \cdot 5^j) + 3 \cdot 5^{k+1} = 3(5^{k+1} - 1)/4 + 3 \cdot 5^{k+1} = 3(5^{k+1} + 4 \cdot 5^{k+1} - 1)/4 = 3(5^{k+2} - 1)/4$. **9.** **a)** $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$ **b)** *Étape de base:* $2 = 1 \cdot (1+1)$

$1 \cdot 2 = 2 = 1(1+1)(1+2)/3$. *Étape inductive:* Supposons que $P(k)$ est vrai. Alors $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + k(k+1) + (k+1)(k+2) = [k(k+1)(k+2)/3] + (k+1)(k+2) = (k+1)(k+2)[(k/3)+1] = (k+1)(k+2)(k+3)/3$. **17.** Soit $P(n)$ l'énoncé suivant: $1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 = n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)/30$. $P(1)$ est vrai parce que $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5/30 = 1$. On suppose que $P(k)$ est vrai. Alors $(1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + k^4) + (k+1)^4 = k(k+1)(2k+1)(3k^2+3k-1)/30 + (k+1)^4 = [(k+1)/30][k(2k+1)(3k^2+3k-1) + 30(k+1)^3] = [(k+1)/30](6k^4 + 39k^3 + 91k^2 + 89k + 30) = [(k+1)/30](k+2)(2k+3)[3(k+1)^2 + 3(k+1) - 1]$. Cela démontre que $P(k+1)$ est vrai. **19.** **a)** $1 + \frac{1}{4} < 2 - \frac{1}{2}$ **b)** C'est vrai parce que cinq / 4 est inférieure à 6 / 4 **c)** $1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{k}$ **d)** Pour chaque $k \geq 2$ que $P(k)$ implique $P(k+1)$; en d'autres termes, nous voulons montrer qu'en supposant l'hypothèse inductive [voir partie (c)] on peut montrer $1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k+1}$ **e)** $1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} = 2 - \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)^2}\right] = 2 - \left[\frac{k^2+2k+1-k}{k(k+1)^2}\right] = 2 - \frac{k^2+k}{k(k+1)^2} - \frac{1}{k(k+1)^2} = 2 - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k+1}$ **f)** Nous avons terminé les deux l'étape de base et l'étape inductive, donc par le principe de induction mathématique, l'énoncé est vrai pour chaque ger n supérieur à 1. **21.** Soit $P(n)$ égal à «$2^n > n^2$.» *Base étape:* $P(5)$ est vrai car $2^5 = 32 > 25 = 5^2$. *Induit étape* positive *:* supposons que $P(k)$ soit vrai, c'est-à-dire $2^k > k^2$. alors $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > k^2 + k^2 > k^2 + 4k \geq k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$ parce que $k > 4$. **23.** Par inspection, nous constatons que l'inégalité $2n + 3 \leq 2^n$ ne vaut pas pour $n = 0, 1, 2, 3$. Soit $P(n)$ le proposition que cette inégalité vaut pour l'entier positif n. $P(4)$, le cas de base, est vrai car $2 \cdot 4 + 3 = 11 \leq 16 = 2^4$. Pour l'étape inductive, supposons que $P(k)$ soit vrai. Ensuite, par hypothèse ductive, $2(k+1) + 3 = (2k+3) + 2 < 2^k + 2$. Mais be- cause $k \geq 1$, $2^k + 2 \leq 2^k + 2^k = 2^{k+1}$. Cela montre que $P(k+1)$ est vrai. **25.** Soit $P(n)$ soit «$1 + nh \leq (1+h)^n$, $h > -1$». *Étape de base:* $P(0)$ est vrai car $1 + 0 \cdot h = 1 \leq 1 = (1+h)^0$. *Étape inductive:* Supposons $1 + kh \leq (1+h)^k$. Ensuite parce que $(1+h) > 0$, $(1+h)^{k+1} = (1+h)(1+h)^k \geq (1+h)(1+kh) = 1 + (k+1)h + kh^2 \geq 1 + (k+1)h$. **27.** Soit $P(n)$ soit "$1/\sqrt{1} + 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{3} + \cdots + 1/\sqrt{n} > 2(\sqrt{n+1} - 1)$." *Étape de base:* $P(1)$ est vrai car $1 > 2(\sqrt{2} - 1)$. *Induit* est vrai. *Étape inductive:* Supposons que $2 + 4 + 6 + \cdots + 2k = k(k+1)$. Alors $(2 + 4 + 6 + \cdots + 2k) + 2(k+1) = k(k+1) + 2(k+1) = (k+1)(k+2)$. **11.** **a)** $\sum_{j=1}^{n} 1/2^{j} = (2^{n} - 1)/2^{n}$ **b)** *Étape de base:* $P(1)$ est vrai car $\sum_{j=1}^{1} 1/2^{j} = 1/2 = (2^{1} - 1)/2^{1}$. *Étape inductive:* Supposons que $\sum_{j=1}^{k} 1/2^{j} = (2^{k} - 1)/2^{k}$. alors $\sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{2^{j}} = \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2^{j}}\right) + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2^{k} - 1}{2^{k}} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2^{k+1} - 2 + 1}{2^{k+1}} = \frac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1}}$. **13.** Soit $P(n)$ « $1^2 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} n(n+1)/2$. » *Étape de base:* $P(1)$ est vrai car $1^2 = 1 = (-1)^0 1^2$. *Étape inductive:* Supposons que $P(k)$ est vrai. Alors $1^2 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (-1)^{k-1} k^2 + (-1)^{k} (k+1)^2 = (-1)^{k-1} k(k+1)/2 + (-1)^{k} (k+1)^2 = (-1)^{k} (k+1)[-k/2 + (k+1)] = (-1)^{k} (k+1)[(k/2) + 1] = (-1)^{k} (k+1)(k+2)/2$. **15.** Soit $P(n)$ soit « $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = n(n+1)(n+2)/3$. » *Étape de base:* $P(1)$ est vrai car

étape positive : Supposons que $P(k)$ soit vrai. Alors $1 + 1/\sqrt{2} + \cdots + 1/\sqrt{k} + 1/\sqrt{k+1} > 2\left(\sqrt{k+1} - 1\right) + 1/\sqrt{k+1}$. Si nous montrer que $2\left(\sqrt{k+1} - 1\right) + 1/\sqrt{k+1} > 2\left(\sqrt{k+2} - 1\right)$, il s'ensuit que $P(k+1)$ est vrai. Cette inégalité est équivalente alentour à $2\left(\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}\right) < 1/\sqrt{k+1}$, qui est équivalent à $2\left(\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}\right)\left(\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1}\right) < \sqrt{k+1}/\sqrt{k+1} + \sqrt{k+2}/\sqrt{k+1}$. Cela équivaut à $2 < 1 + \sqrt{k+2}/\sqrt{k+1}$, ce qui est clairement vrai. **29.** Soit $P(n)$ soit « $H_{2^n} \le 1 + n$. » *Étape de base:* $P(0)$ est vrai provoquer $H_{2^0} = H_1 = 1 \le 1 + 0$. *Pas inductif:* Supposons que $H_{2^k} \le 1 + k$. Alors $H_{2^{k+1}} = H_{2^k} + \sum_{j=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{j} \le 1 + k + 2^k \left(\frac{1}{2^{k+1}}\right) < 1 + k + 1 = 1 + (k+1)$. **31.** *Base étape:* $1^2 + 1 = 2$ est divisible par 2. *Étape inductive:* Supposons l'hypothèse inductive, que $k^2 + k$ est divisible par 2. Alors $(k+1)^2 + (k+1) = k^2 + 2k + 1 + k + 1 = (k^2 + k) + 2(k+1)$,

la somme d'un multiple de 2 (par l'hypothèse inductive) et d'un multiple de 2 (par définition), donc divisible par 2. **33.** Soit $P(n)$ soit « $n^5 - n$ est divisible par 5.» *Étape de base:* $P(0)$ est vrai car $0^5 - 0 = 0$ est divisible par 5. *Pas inductif:* Assupposons que $P(k)$ est vrai, c'est-à-dire que $k^5 - 5$ est divisible par 5. Alors $(k+1)^5 - (k+1) = (k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1) - (k+1) = (k^5 - k) + 5(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k)$ est également divisible par 5, parce que les deux termes de cette somme sont divisibles par 5. **35.** Soit $P(n)$ soit la proposition que $(2n - 1)^2 - 1$ est divisible par 8. Le cas de base $P(1)$ est vrai car $8 \mid 0$. Maintenant supposons que $P(k)$ est vrai. Parce que $[(2(k+1) - 1]^2 - 1 = [(2k - 1)^2 - 1] + 8k$, $P(k+1)$ est vrai car les deux termes sur le côté droit est divisible par 8. Cela montre que $P(n)$ est vrai pour tous les entiers positifs n, donc $m^2 - 1$ est divisible par 8 chaque fois que m est un entier positif impair. **37.** *Étape de base:* $11^{1+1} + 12^{2 \cdot 1 - 1} = 121 + 12 = 133$ *Pas inductif:* Supposons que hypothèse inductive, que $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ est divisible par 133. Puis $11^{(n+1)+1} + 12^{2(n+1)-1} = 11 \cdot 11^{n+1} + 144 \cdot 12^{2n-1} = 11 \cdot 11^{n+1} + (11 + 133) \cdot 12^{2n-1} = 11(11^{n+1} + 12^{2n-1}) + 133 \cdot 12^{2n-1}$. L'expression entre parenthèses est divisible par 133 par l'hypothèse inductive, et évidemment la deuxième terme est divisible par 133, donc la quantité entière est divisible par 133, comme souhaité. **39.** *Étape de base:* $A_1 \subseteq B_1$ implie que $\bigcap_{j=1}^{1} A_j \subseteq \bigcap_{j=1}^{1} B_j$. *Étape inductive:* Supposons que hypothèse inductive que si $A_j \subseteq B_j$ pour $j = 1, 2, \ldots, k$, ensuite $\bigcap_{j=1}^{k} A_j \subseteq \bigcap_{j=1}^{k} B_j$. On veut montrer que si $A_j \subseteq B_j$ pour $j = 1, 2, \ldots, k+1$, alors $\bigcap_{j=1}^{k+1} A_j \subseteq \bigcap_{j=1}^{k+1} B_j$. Soit x être un élément arbitraire de $\bigcap_{j=1}^{k+1} A_j = \left(\bigcap_{j=1}^{k} A_j\right) \cap A_{k+1}$. Parce que $x \in \bigcap_{j=1}^{k} A_j$, nous le savons par l'hypothèse inductive

complète la preuve inductive. **47.** Réorganisez les emplacements si nécessaire pour que $x_1 \le x_2 \le x_3 \le \cdots \le x_d$. Placer le premier tour en position $t_1 = x_1 + 1$. Supposons que la tour k a été placée en position t_k. Placez ensuite la tour $k+1$ à la position $t_{k+1} = x + 1$, où x est le plus petit x_i supérieur à $t_k + 1$. **49.** Les deux ensembles ne se chevauchent pas si $n + 1 = 2$. En fait, l'état conditionnellement $P(1) \to P(2)$ est faux. **51.** L'erreur consiste à appliquer l'hypothèse inductive de regarder $\max(x - 1, y - 1)$, car même si x et y sont des entiers positifs, $x - 1$ et $y - 1$ n'a pas besoin d'être (un ou les deux pourraient être 0). **53.** Pour l'étape de base ($n = 2$) la première personne coupe le gâteau en deux portions qu'elle pense valent chacun $1/2$ sur le gâteau, et la deuxième personne choisit la partie qu'il pense être d' au moins $1/2$ du gâteau (au moins un de les pièces doivent satisfaire à cette condition). Pour l'étape inductive, supposons qu'il y ait $k + 1$ personnes. Par l'hypothèse inductive, nous pouvons supposer que les premiers k personnes ont divisé le gâteau entre eux afin que chaque personne soit satisfaite d'avoir obtenu au moins une fraction $1/k$ du gâteau. Chacun d'eux coupe maintenant son ou sa pièce en $k+1$ pièces de taille égale. La dernière personne obtient pour choisir un morceau de chacune des premières portions de k personnes. Après cela, chacune des k premières personnes est convaincue que elle a encore $(1/k)(k/(k+1)) = 1/(k+1)$ du gâteau. À voir que la dernière personne est satisfaite, supposons qu'il pensait que la i ème personne ($1 \le i \le k$) avait une partie p_i du gâteau, où $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$. En choisissant ce qu'il pense être le la plus grande pièce de chaque personne, il est convaincu qu'il a au moins $\sum_{i=1}^{k} p_i/(k+1) = (1/(k+1)) \sum_{i=1}^{k} p_i = 1/(k+1)$ de le gâteau. **55.** Nous utilisons la notation (i, j) pour désigner le carré dans la ligne i et la colonne j et utilisez l'induction sur $i + j$ pour montrer que sis que $x \in \bigcup_{j=1} B_j$; parce que $x \in A_{k+1}$, nous savons de le fait donné que $A_{k+1} \subsetneq B_{k+1}$ que $x \in B_{k+1}$. Là-avant, $x \in \bigcup_{j=1} B_j \cap B_{k+1} = \bigcap_{j=1} B_j$. **41.** Soit $P(n)$ soit " $(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B)$. » *Étape de base:* $P(1)$ est trivialement vrai. *Étape inductive:* Supposons que $P(k)$ est vrai. Alors $(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k \cup A_{k+1}) \cap B = [(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) \cup A_{k+1}] \cap B = [(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) \cap B] \cup (A_{k+1} \cap B) = [(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_k \cap B)] \cup (A_{k+1} \cap B) = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_k \cap B) \cup (A_{k+1} \cap B)$. **43.** Soit $P(n)$ « $\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}$. " *Étape de base:* $P(1)$ est trivialement vrai. *Étape inductive:* Supposons que $P(k)$ est vrai. alors $\overline{\bigcup_{j=1}^{k+1} A_j} = \overline{\left(\bigcup_{j=1}^{k} A_j\right) \cup A_{k+1}} = \overline{\left(\bigcup_{j=1}^{k} A_j\right)} \cap \overline{A_{k+1}} = \left(\bigcap_{j=1}^{k} \overline{A_j}\right) \cap \overline{A_{k+1}} = \bigcap_{j=1}^{k+1} \overline{A_j}$.

45. Soit $P(n)$ la déclaration selon laquelle un ensemble avec n éléments a $n(n-1)/2$ sous-ensembles à deux éléments. $P(2)$, le cas de base, est vrai, parce qu'un ensemble avec deux éléments a un sous-ensemble avec deux éléments, à savoir lui-même, et $2(2-1)/2 = 1$. Maintenant, supposons que $P(k)$ est vrai. Soit S un ensemble avec $k+1$ éléments. Choisissez un élément a dans S et laissez $T = S - \{a\}$. Un deux éléments le sous-ensemble de S contient *un* ou n'en contient pas. Ces sous-ensembles non contenant a sont les sous-ensembles de T avec deux éléments; par le hypothèse inductive il y en a $k(k-1)/2$. Il y a k sous-ensembles de S avec deux éléments qui contiennent *un* , car un tel sous - ensemble contient *un* et l' un des k éléments en T . Par conséquent, il sont $k(k-1)/2 + k = (k+1)k/2$ sous - ensembles à deux éléments de S . Cette chaque carré peut être atteint par le chevalier. *Étape de base:* Là sont six cas de base, pour les cas où $i + j \leq 2$. Le chevalier est déjà à $(0, 0)$ pour commencer, donc la séquence vide de se déplace atteint ce carré. Pour atteindre $(1, 0)$, le chevalier se déplace $(0, 0) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (0, 2) \rightarrow (1, 0)$. De même, pour atteindre $(0, 1)$, le chevalier se déplace $(0, 0) \rightarrow (1, 2) \rightarrow (2, 0) \rightarrow (0, 1)$. Remarque que le chevalier a atteint $(2, 0)$ et $(0, 2)$ dans le processus. Pour la dernière étape de base, il y a $(0, 0) \rightarrow (1, 2) \rightarrow (2, 0) \rightarrow (0, 1) \rightarrow (2, 2) \rightarrow (0, 3) \rightarrow (1, 1)$. *Étape inductive:* Supposons l'hypothèse inductive, que le chevalier peut atteindre n'importe quel carré (i, j) pour laquelle $i + j = k$, où k est un entier supérieur que 1. Nous devons montrer comment le chevalier peut atteindre chaque carré (i, j) lorsque $i + j = k + 1$. Parce que $k + 1 \geq 3$, au moins un de i et j est au moins 2. Si $i \geq 2$, alors par l'hypothèse inductive esis, il y a une séquence de mouvements se terminant en $(i - 2, j + 1)$, parce que $i - 2 + j + 1 = i + j - 1 = k$; De là ce n'est qu'une étape pour (i, j) ; de même, si $j \geq 2$. **57.** *Base étape:* Les cas de base $n = 0$ et $n = 1$ sont vrais car la dérivée de x^0 est 0 et la dérivée de $x^1 = x$ est 1. *Étape inductive: en* utilisant la règle du produit, l'hypothèse inductive et l'étape de base montre que $\frac{d}{dx} x^{k+1} = \frac{d}{dx}(x \cdot x^k) = x \cdot \frac{d}{dx} x^k + x^k \frac{d}{dx} x = x \cdot kx^{k-1} + x^k \cdot 1 = kx^k + x^k = (k+1)x^k$. **59.** *Étape de base:* Pour $k = 0$, $1 \equiv 1 \pmod{m}$. *Étape inductive:* Supposons que $a \equiv b \pmod{m}$ et $a^k \equiv b^k \pmod{m}$; nous doit montrer que $a^{k+1} \equiv b^{k+1} \pmod{m}$. Par Théorème 5 de Section 4.1, $a \cdot a^k \equiv b \cdot b^k \pmod{m}$, qui par définition

tion dit que $a^{k+1} \equiv b^{k+1} \pmod{m}$. **61.** Soit $P(n)$ soit "$[(p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_3) \wedge \cdots \wedge (p_{n-1} \rightarrow p_n)] \rightarrow [(p_1 \wedge \cdots \wedge p_{n-1}) \rightarrow p_n]$. " *Étape de base:* $P(2)$ est vrai car $(p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2)$ est une tautologie. *Étape inductive:* Supposons que $P(k)$ soit vrai. Pour afficher $[(p_1 \rightarrow p_2) \wedge \cdots \wedge (p_{k-1} \rightarrow p_k) \wedge (p_k \rightarrow p_{k+1})] \rightarrow [(p_1 \wedge \cdots \wedge p_{k-1} \wedge p_k) \rightarrow p_{k+1}]$ est une tautologie, supposons que l'hypothèse de cette conditionnelle déclaration est vraie. Parce que l'hypothèse et $P(k)$ sont toutes deux vrai, il s'ensuit que $(p_1 \wedge \cdots \wedge p_{k-1}) \rightarrow p_k$ est vrai. Être-car cela est vrai, et parce que $p_k \rightarrow p_{k+1}$ est vrai (il fait partie de l'hypothèse), il s'ensuit par un syllogisme hypothétique que $(p_1 \wedge \cdots \wedge p_{k-1}) \rightarrow p_{k+1}$ est vrai. La déclaration la plus faible $(p_1 \wedge \cdots \wedge p_{k-1} \wedge p_k) \rightarrow p_{k+1}$ en découle. **63.** Nous va d'abord prouver le résultat lorsque n est une puissance de 2, c'est-à-dire si $n = 2^k$, $k = 1, 2, ...$ Soit $P(k)$ l'énoncé $A \geq G$, où A et G sont les moyennes arithmétiques et géométriques, spectralement, d'un ensemble de $n = 2^k$ nombres réels positifs. *Base étape:* $k = 1$ et $n = 2^1 = 2$. Notez que $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0$. $a_1 a_2 + a_2 \geq 0$, c'est-à-dire et supposons que l'on nous donne $k + 1$ ensembles qui satisfont la donnée conditions. Par l'hypothèse inductive, il doit y avoir un ensemble A_i pour certains $i \leq k$ tels que $A_i \subseteq A_j$ pour $1 \leq j \leq k$. Si $A_i \subseteq A_{k+1}$, alors nous avons terminé. Sinon, nous savons que $A_{k+1} \subseteq A_i$, et cela nous dit que A_{k+1} satisfait la condition d'être un sous-ensemble de A_j pour $1 \leq j \leq k + 1$. **69.** $G(1) = 0$, $G(2) = 1$, $G(3) = 3$, $G(4) = 4$ **71.** Pour montrer que $2n - 4$ les appels sont suffisants pour échanger tous les potins, sélectionnez les personnes 1, 2, 3 et 4 pour être le comité central. Chaque personne à l'extérieur le comité central appelle une personne au comité central tee. À ce stade, les membres du comité central en *tant que groupe* connaître tous les scandales. Ils échangent ensuite des informations entre eux-mêmes en faisant les appels 1-2, 3-4, 1-3 et 2-4 dans ce commande. À ce stade, *chaque* membre du comité central sait tous les scandales. Enfin, encore une fois chaque personne en dehors de la centrale comité nomme une personne au comité central, auquel point tout le monde connaît tous les scandales. [Le nombre total de appels est $(n-4) + 4 + (n-4) = 2n - 4$.] Que cela ne peut pas être

L'expansion montre ce que un $(a_1 + a_2)/2 \geq (a_1 a_2)^{1/2}$. *Étape inductive:* Supposons que $P(k)$ est vrai, avec $n = 2^k$. Nous montrerons que $P(k+1)$ est vrai. Nous avons $2^{k+1} = 2n$. Maintenant $(a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n})/(2n) = [(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/n + (a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n})/n]/2$ et similaire $(a_1 a_2 \cdots a_{2n})^{1/(2n)} = [(a_1 \cdots a_n)^{1/n} (a_{n+1} \cdots a_{2n})^{1/n}]^{1/2}$. À simplifier la notation, et encore $A(x, y, \ldots)$ et $G(x, y, \ldots)$ désignent moyenne arithmétique et moyenne géométrique de $x, y, \ldots$, respec-activement. De même, si $x \leq x$, $y \leq y$, etc., alors $A(x, y, \ldots) \leq A(x, y, \ldots)$ et $G(x, y, \ldots) \leq G(x, y, \ldots)$. Par conséquent, $A(a_1, \ldots, a_{2n}) = A(A(a_1, \ldots, a_n), A(a_{n+1}, \ldots, a_{2n})) \geq A(G(a_1, \ldots, a_n), G(a_{n+1}, \ldots, a_{2n})) \geq G(G(a_1, \ldots, a_n), G(a_{n+1}, \ldots, a_{2n})) = G(a_1, \ldots, a_{2n})$. Ceci termine la preuve de puissances de 2. Maintenant, si n n'est pas une puissance de 2, soit m la puissance supérieure suivante de 2, et soit $a_{n+1}, \ldots, a_m$ tous égaux $A(a_1, \ldots, a_n) = a$. Ensuite nous ont $[(a_1 a_2 \cdots a_n) a^{m-n}]^{1/m} \leq A(a_1, \ldots, a_m)$, car m est une puissance de 2. Parce que $A(a_1, \ldots, a_m) = a$, il s'ensuit que $(a_1 \cdots a_n)^{1/m} a^{1-n/m} \leq a^{n/m}$. Élever les deux côtés de la (m/n) e puissance donne $G(a_1, \ldots, a_n) \leq A(a_1, \ldots, a_n)$.

65. *Étape de base:* pour $n = 1$, le côté gauche est juste $\frac{1}{1}$, lequel est 1. Pour $n = 2$, il existe trois sous-ensembles non vides $\{1\}$, $\{2\}$, et $\{1, 2\}$, donc le côté gauche est $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1 \cdot 2} = 2$. *Inductif étape:* Supposons que l'énoncé est vrai pour k. L'ensemble du les premiers $k + 1$ entiers positifs ont de nombreux sous-ensembles non vides, mais ils se répartissent en trois catégories: un sous-ensemble non vide du premier k entiers positifs avec $k + 1$, un sous-ensemble non vide de les k premiers entiers positifs, ou simplement $\{k + 1\}$. Par l'inductif hypothèse, la somme de la première catégorie est k. Pour la seconde catégorie, nous pouvons factoriser $1/(k + 1)$ de chaque terme de la somme et ce qui reste est juste k par l'hypothèse inductive, donc cette partie de la somme est $k/(k + 1)$. Enfin, la troisième catégorie gory donne simplement $1/(k + 1)$. Par conséquent, toute la somme est $k + k/(k + 1) + 1/(k + 1) = k + 1$. **67.** *Étape de base:* Si $A_1 \subseteq A_2$, alors A_1 satisfait à la condition d'être un sous-ensemble de chaque ensemble dans la collection; sinon $A_2 \subseteq A_1$, donc A_2 satisfait à la condition. *Étape inductive:* Supposons l'inductif hypothèse, que l'énoncé conditionnel est vrai pour k ensembles,

fait avec moins de $2n - 4$ appels est beaucoup plus difficile à prouver; voir Sandra M. Hedetniemi, Stephen T. Hedetniemi et Arthur L. Liestman, «Une enquête sur les commérages et la radiodiffusion en réseaux de communication », *Networks* **18** (1988), no. 4, 319–349, pour plus de détails. **73.** Nous le prouvons par induction mathématique. Le pas de base ($n = 2$) est vrai tautologiquement. Pour $n = 3$, supposons que les intervalles soient (a, b), (c, d) et (e, f), où sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $a \leq c \leq e$. Parce que $(a, b) \cap (e, f) = \emptyset$, nous devons avoir $e < b$; pour un similaire raison, $e < d$. Il s'ensuit que le nombre à mi-chemin entre e et le plus petit de b et d est commun aux trois intervalles. Maintenant, pour l'étape inductive, supposons que chaque fois que nous avons k intervalles qui ont des intersections non vides par paire puis il est un point commun à tous les intervalles, et supposons que nous sommes étant donné les intervalles $I_1, I_2, \ldots, I_{k+1}$ qui ont des paires non vides intersections. Pour chaque i de 1 à k, soit $J_i = I_i \cap I_{k+1}$. nous affirmer que la collection $J_1, J_2, \ldots, J_k$ satisfait l'inductive c'est-à-dire que $J_{i_1} \cap J_{i_2} = \emptyset$ pour chaque choix de sous-scripts i_1 et i_2. Cela découle du cas $n = 3$ prouvé ci-dessus, en utilisant les ensembles I_{i_1}, I_{i_2} et I_{k+1}. Nous pouvons maintenant invoquer hypothèse inductive pour conclure qu'il existe un certain nombre mon à tous les ensembles J_i pour $i = 1, 2, \ldots, k$, qui forcent est à l'intersection de tous les ensembles I_i pour $i = 1, 2, \ldots, k + 1$.
75. Jumelez les gens. Demandez aux gens de se petites distances distinctes de leurs partenaires mais loin de tous les autres. Ensuite, chaque personne jette une tarte sur son partenaire, donc tout le monde est touché.

77.

79. Soit $P(n)$ la déclaration selon laquelle tous les $2^n \times 2^n \times 2^n$ vérificateur-une planche avec un cube $1 \times 1 \times 1$ retiré peut être recouverte de tuiles

qui sont $2 \times 2 \times 2$ cubes chacun avec un cube $1 \times 1 \times 1$ retiré. L'étape de base, $P(1)$, tient car une tuile coïncide avec le solide à carreler. Supposons maintenant que $P(k)$ *soit* vrai. Considérons maintenant $2^{k+1} \times 2^{k+1} \times 2^{k+1}$ cube avec un cube $1 \times 1 \times 1$ retiré. Divisé cet objet en huit morceaux en utilisant des plans parallèles à ses faces et traversant son centre. La pièce manquante $1 \times 1 \times 1$ se produit dans l'un de ces huit morceaux. Positionnez maintenant une tuile avec

nous pouvons former n cents d'affranchissement en utilisant seulement 4 cents et 11 cents timbres. Nous voulons prouver que $P(n)$ est vrai pour tout $n \geq 30$. Pour l'étape de base, $30 = 11 + 11 + 4 + 4$. Supposons que nous pouvons former k cents d'affranchissement (l'hypothèse inductive); nous montrerons comment former $k + 1$ cents d'affranchissement. Si le k cents incluaient un timbre de 11 cents, puis le remplacer par trois 4 timbres cent. Sinon, k cents a été formé à partir de seulement 4 cents son centre au centre du grand objet de sorte que le manquant $1 \times 1 \times 1$ cube se trouve dans l'octant dans lequel le grand objet est manque un cube $1 \times 1 \times 1$. Cela crée huit $2^k \times 2^k \times 2^k$ cubes, manquant chacun un cube $1 \times 1 \times 1$. Par l'hypothèse inductive nous pouvons remplir chacun de ces huit objets de tuiles. Mettre ces le carrelage ensemble produit le carrelage souhaité.

81.

83. Soit $Q(n)$ soit $P(n+b-1)$. L'affirmation que $P(n)$ est vrai pour $n = b, b+1, b+2, \ldots$ est le même que la déclaration que $Q(m)$ est vrai pour tous les entiers positifs m . On nous donne que $P(b)$ est vrai [c'est-à-dire que $Q(1)$ est vrai], et que $P(k) \to P(k+1)$ pour tout $k \geq b$ [c'est-à-dire que $Q(m) \to Q(m+1)$ pour toutes les posi- nombres entiers m]. Par conséquent, par le principe de mathématique induction, $Q(m)$ est vrai pour tous les entiers positifs m .

Section 5.2

1. *Étape de base:* On nous dit que nous pouvons courir un mile, donc $P(1)$ est vrai. *Étape inductive:* Supposons l'hypothèse inductive, que nous peut parcourir n'importe quel nombre de miles de 1 à k . Nous devons montrer que nous pouvons courir $k+1$ miles. Si $k = 1$, alors on nous dit déjà que nous pouvons courir deux miles. Si $k > 1$, alors l'hy- pothesis nous dit que nous pouvons courir k - 1 miles, donc nous pouvons courir $(k-1)+2 = k+1$ miles. **3.** **a)** $P(8)$ est vrai, car nous peut former 8 cents de frais de port avec un timbre de 3 cents et un Timbre de 5 cents. $P(9)$ est vrai, car nous pouvons former 9 cents de affranchissement avec trois timbres de 3 cents. $P(10)$ est vrai, car nous peut former 10 cents d'affranchissement avec deux timbres de 5 cents. **b)** Le déclaration qu'en utilisant seulement des timbres de 3 et 5 cents, nous pouvons former j cents d'affranchissement pour tout j avec $8 \leq j \leq k$, où nous supposons que $k \geq 10$ **c)** En supposant l'hypothèse inductive, nous pouvons forme $k+1$ cents d'affranchissement en utilisant seulement des timbres de 3 et 5 cents **d)** Parce que $k \geq 10$, nous savons que $P(k-2)$ est vrai, c'est-à-dire que nous pouvons former $k-2$ cents d'affranchissement. Mettez un autre timbre de 3 cents sur l'enveloppe, et nous avons formé $k+1$ cents d'affranchissement. **e)** Nous avons terminé à la fois l'étape de base et l'induction étape, donc par le principe de forte induction, la déclaration est vrai pour tout entier n supérieur ou égal à 8. **5.** **a)** 4, 8, 11, 12, 15, 16, 19, 20, 22, 23, 24, 26, 27, 28 et toutes les valeurs supérieur ou égal à 30 **b)** Soit $P(n)$ la déclaration selon laquelle timbres. Parce que $k \geq 30$, il doit y avoir au moins huit 4 cents timbres impliqués. Remplacez huit timbres de 4 cents par trois timbres de 11 cents timbres, et nous avons formé $k+1$ cents d'affranchissement. **c)** $P(n)$ est le même que dans la partie (b). Pour prouver que $P(n)$ est vrai pour tous $n \geq 30$, nous vérifions pour l'étape de base que $30 = 11+11+4+4$, $31 = 11+4+4+4+4+4$, $32 = 4+4+4+4+4+4+4+4$, et $33 = 11+11+11$. Pour l'étape inductive, supposons que hypothèse ductive, que $P(j)$ est vrai pour tout j avec $30 \leq j \leq k$, où k est un entier arbitraire supérieur ou égal à 33. Nous veulent montrer que $P(k+1)$ est vrai. Parce que $k - 3 \geq 30$, nous sachez que $P(k-3)$ est vrai, c'est-à-dire que nous pouvons former k - 3 cents d'affranchissement. Mettez un autre timbre de 4 cents sur l'enveloppe, et nous avons formé $k+1$ cents d'affranchissement. Dans cette preuve, notre l'hypothèse inductive était que $P(j)$ était vrai pour toutes les valeurs de j entre 30 et k inclus, plutôt que simplement que $P(30)$ était vrai. **7.** Nous pouvons former tous les montants sauf 1 \$ et 3 \$. Soit $P(n)$ être la déclaration que nous pouvons former n dollars en utilisant seulement 2 dollars et des billets de 5 dollars. Nous voulons prouver que $P(n)$ est vrai pour tous $n \geq 5$. (Il est clair que 1 \$ et 3 \$ ne peuvent pas être formés et que 2 \$ et 4 \$ peuvent être formés.) Pour l'étape de base, notez que $5 = 5$ et $6 = 2+2+2$. Supposons l'hypothèse inductive, que $P(j)$ est vrai pour tout j avec $5 \leq j \leq k$, où k est un entier arbitraire supérieur ou égal à 6. Nous voulons montrer que $P(k+1)$ est vrai. Parce que $k-1 \geq 5$, nous savons que $P(k-1)$ est vrai, c'est-à-dire que nous pouvons former k - 1 dollars. Ajoutez un autre billet de 2 dollars et nous avons formé $k+1$ dollars. **9.** Soit $P(n)$ la déclaration qu'il n'y a pas d'entier positif b tel que $\sqrt{2} = n/b$. *Base étape:* $P(1)$ est vrai car $\sqrt{2} > 1 \geq 1/b$ pour tous les positifs entiers b . *Étape inductive:* Supposons que $P(j)$ soit vrai pour tous $j \leq k$, où k est un entier positif arbitraire; nous prouvons que $P(k+1)$ est vrai par contradiction. Suppose que $\sqrt{2} = (k+1)/b$ pour un entier positif b . Alors $2b^2 = (k+1)^2$, donc $(k+1)^2$ est pair, et donc $k+1$ est pair. Écrivez donc $k+1 = 2t$ pour un entier positif t , d'où $2b^2 = 4t^2$ et $b^2 = 2t^2$. Par le même raisonnement que précédemment, b est pair, donc $b = 2s$ pour certains entier positif s . alors $\sqrt{2} = (k+1)/b = (2t)/(2s) = t/s$. Mais $t \leq k$, donc cela contredit l'hypothèse inductive, et notre preuve de l'étape inductive est terminée. **11.** *Étape de base:* Il existe quatre cas de base. Si $n = 1 = 4 \cdot 0 + 1$, alors clairement le deuxième joueur gagne. S'il y a deux, trois ou quatre correspondances ($n = 4 \cdot 0 + 2$, $n = 4 \cdot 0 + 3$, ou $n = 4 \cdot 1$), le premier joueur peut gagner en supprimant tous les matchs sauf un. *Étape inductive:* Supposons l'hypothèse inductive forte, que dans les jeux avec k ou moins matchs, le premier joueur peut gagner si $k \equiv 0$, 2 ou 3 $(\bmod 4)$ et le deuxième joueur peut gagner si $k \equiv 1 \pmod 4$. Supposons que nous ayons un jeu avec $k+1$ matchs, avec $k \geq 4$. Si $k+1 \equiv 0 \pmod 4$, alors le premier joueur peut retirer trois matchs, laissant k - 2 correspond à l'autre joueur. Parce que $k-2 \equiv 1 \pmod 4$, par l'hypothèse inductive, c'est un jeu que le deuxième joueur à ce stade (qui est le premier joueur de notre jeu) peut gagner. Simillégalement, si $k + 1 \equiv 2 \pmod 4$, alors le premier joueur peut retirer un match; et si $k + 1 \equiv 3 \pmod 4$, alors le premier joueur peut supprimer deux correspondances. Enfin, si $k + 1 \equiv 1 \pmod 4$, alors le premier joueur doit quitter k, $k - 1$ ou $k - 2$ matchs pour le autre joueur. Parce que $k \equiv 0 \pmod 4$, $k - 1 \equiv 3 \pmod 4$, et $k - 2 \equiv 2 \pmod 4$, par l'hypothèse inductive, c'est un jeu que le premier joueur à ce moment-là (qui est le deuxième joueur dans notre jeu) peut gagner. **13.** Soit $P(n)$ la déclaration que exactement $n - 1$ mouvements sont nécessaires pour assembler un puzzle avec n pièces. Maintenant, $P(1)$ est trivialement vrai. Supposons que $P(j)$ est vrai pour tout $j \leq k$, et considérons un casse-tête avec $k + 1$ pièces. Le coup final doit être la jonction de deux blocs, de taille j et $k + 1 - j$ pour un entier j avec $1 \leq j \leq k$. Par le hypothèse inductive, il a fallu $j - 1$ coups pour construire le un bloc, et $k + 1 - j - 1 = k - j$ se déplace pour construire le autre. Par conséquent, $1+ (j-1) + (k - j) = k$ mouvements sont nécessaires en tout, donc $P(k + 1)$ est vrai. **15.** Laissez la carte Chomp avoir n lignes et n colonnes. Nous prétendons que le premier joueur peut gagner le jeu en faisant le premier pas pour ne laisser que la rangée du haut et colonne la plus à gauche. Soit $P(n)$ la déclaration que si un joueur a présenté à son adversaire une configuration Chomp composé de seulement n cookies dans la rangée du haut et n cookies dans le colonne la plus à gauche, alors il peut gagner le match. Nous prouverons $\forall n P(n)$ par forte induction. Nous savons que $P(1)$ est vrai, car parce que l'adversaire est obligé de prendre le cookie empoisonné à son premier tour. Fixons $k \geq 1$ et supposons que $P(j)$ est vrai pour tous $j \leq k$. Nous affirmons que $P(k + 1)$ est vrai. C'est le tourner pour bouger. Si elle prend le cookie empoisonné, alors le jeu est terminée et elle perd. Sinon, supposons qu'elle prenne le cookie dans la ligne supérieure de la colonne j, ou le cookie dans la colonne de gauche ligne j, pour certains j avec $2 \leq j \leq k + 1$. Le premier joueur maintenant choisit le cookie dans la colonne de gauche de la ligne j, ou le cookie dans la ligne supérieure de la colonne j, respectivement. Cela laisse la position couvert par $P(j -1)$ pour son adversaire, donc par l'hypothesis, il peut gagner. **17.** Soit $P(n)$ la déclaration que si un un polygone simple à n côtés est triangulé, puis au moins deux des triangles de la triangulation ont deux côtés qui bordent l'extérieur du polygone. Nous prouverons $\forall n \geq 4\ P(n)$. le est clairement vrai pour $n = 4$, car il n'y en a qu'un diagonale, laissant deux triangles avec la propriété souhaitée. Réparer $k \geq 4$ et supposons que $P(j)$ est vrai pour tout j avec $4 \leq j \leq k$. Considérons un polygone avec $k + 1$ côtés et une triangulation de celui-ci. Choisissez l'une des diagonales de cette triangulation. Premier soutien pose que cette diagonale divise le polygone en un triangle et un polygone avec k côtés. Ensuite, le triangle a deux côtés qui bordent l'extérieur. En outre, le k -gon a, par le hypothèse inductive, deux triangles qui ont deux côtés qui bordent l'extérieur de ce k -gon, et un seul de ces triangles peut ne pas être un triangle qui a deux côtés qui bordent la extérieur du polygone d'origine. Le seul autre cas est que cette diagonale divise le polygone en deux polygones avec j côtés et $k + 3 - j$ côtés pour certains j avec $4 \leq j \leq k - 1$. Par l'hypothèse inductive, chacun de ces deux polygones a deux triangles qui ont deux côtés qui bordent leur extérieur, et dans chaque cas, un seul de ces triangles peut ne pas être un triangle qui a deux côtés qui bordent l'extérieur de l'original polygone. **19.** Soit $P(n)$ la déclaration selon laquelle l'aire d'un polygone simple avec n côtés et sommets tous aux points du réseau est donné par $I(P) + B(P)/2 - 1$. Nous prouverons $P(n)$ pour tous $n \geq 3$. On commence par un lemme d'additivité: si P est un simple polygone avec tous les sommets aux points du réseau, divisé en gons P_1 et P_2 par une diagonale, puis $I(P) + B(P)/2 - 1 = [I(P_1) + B(P_1)/2 - 1] + [I(P_2) + B(P_2)/2 - 1]$. Prouver cela, supposons qu'il y ait k points de réseau sur la diagonale, pas compter ses points de terminaison. Alors $I(P) = I(P_1) + I(P_2) + k$ et $B(P) = B(P_1) + B(P_2) - 2k - 2$; et le résultat suit par algèbre simple. Ce que cela dit en particulier, c'est que si Pick's formule donne la zone correcte pour P_1 et P_2, alors elle doit donner la bonne formule pour P, dont l'aire est la somme des aires pour P_1 et P_2; et de même si la formule de Pick donne la bonne zone pour P et l'un des P_i, alors il doit donner la bonne formule pour l'autre P_i. Ensuite, nous prouvons le théorème de rectification angles dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées. Tel que rectangle a nécessairement des sommets en (a, b), (a, c), (d, b) et (d, c), où a, b, c et d sont des entiers avec $b < c$ et $a < d$. Son aire est $(c - b)(d - a)$. De plus, $B = 2(c - b + d - a)$ et $I = (c - b - 1)(d - a - 1) = (c - b)(d - a) - (c - b) - (d - a) + 1$. Par conséquent, $I + B/2 - 1 = (c - b)(d - a) - (c - b) - (d - a) + 1 + (c - b + d - a) - 1 = (c - b)(d - a)$, qui est la zone souhaitée. Considérons ensuite un triangle rectangle dont les jambes sont parallèle aux axes de coordonnées. Ce triangle est un demi-rectangle du type que nous venons de considérer, pour lequel la formule de Pick tient, donc par le lemme d'additivité, il en va de même pour le triangle. (Le les valeurs de B et I sont les mêmes pour chacun des deux triangles, donc si la formule de Picks a donné une réponse qui était soit trop petite ou trop grand, cela donnerait une mauvaise swer pour le rectangle.) Pour l'étape suivante, considérez un arbitraire triangle avec des sommets aux points du réseau qui n'est pas du type alprêt à réfléchir. Intégrez-le dans un rectangle aussi petit que possible. Il existe plusieurs façons possibles de le faire, mais dans cas (et en ajoutant un bord supplémentaire dans un cas), le rectangle aura été partitionné dans le triangle donné et deux ou trois triangles rectangles dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées. Encore une fois par le lemme d'additivité, nous sommes garantis que Pick formule donne la zone correcte pour le triangle donné. Cette complète la preuve de $P(3)$, étape de base de notre forte induction preuve. Pour l'étape inductive, étant donné un polygone arbitraire, utilisez Lemme 1 dans le texte pour le diviser en deux polygones. Puis par le lemme d'additivité ci-dessus et l'hypothèse inductive, nous sachez que la formule de Pick donne la zone correcte pour ce polygon. **21. a)** Dans la figure de gauche, p *abp* est le plus petit, mais *bp* n'est pas une diagonale intérieure. **b)** Dans la figure de droite, *bd* n'est pas un intérieur diagonale. **c)** Dans la figure de droite, *bd* n'est pas une diagonale intérieure. **23. a)** Lorsque nous essayons de prouver l'étape inductive et de trouver un triangle dans chaque sous-polygone avec au moins deux côtés bordant la extérieur, il peut arriver dans chaque cas que le triangle que nous sommes garantie en fait borde la diagonale (qui fait partie de la limite de ce polygone). Cela nous laisse sans triangles garanti de toucher la limite du polygone d' *origine* . **b)** Nous avons démontré l'énoncé le plus fort $\forall n \geq 4\ T(n)$ dans l'exercice 17. **25. a)** L'étape inductive permet ici de conclure que

$P(3)$, $P(5)$, ... sont tous vrais, mais nous ne pouvons rien conclure $P(2)$, $P(4)$, ... **b)** $P(n)$ est vrai pour tous les entiers positifs n, us- une forte induction. **c)** L'étape inductive ici nous permet de conclure que $P(2)$, $P(4)$, $P(8)$, $P(16)$,… sont tous vrais, mais nous ne peut rien conclure sur $P(n)$ lorsque n n'est pas une puissance de 2. **d)** Il s'agit d'une induction mathématique; nous pouvons conclure que $P(n)$ est vrai pour tous les entiers positifs n. **27.** Supposons, pour une preuve par contradiction, qu'il existe un entier positif n tel que $P(n)$ n'est pas vrai. Soit m le plus petit entier positif supérieur que n pour lequel $P(m)$ *est* vrai; nous savons qu'un tel m existe parce que $P(m)$ est vrai pour une infinité de valeurs de m. Mais nous sachez que $P(m) \rightarrow P(m-1)$, donc $P(m-1)$ est également vrai. Donc, $m - 1$ ne peut pas être supérieur à n, donc $m - 1 = n$ et $P(n)$ est en fait vrai. Cette contradiction montre que $P(n)$ est vrai pour tout n. **29.** L'erreur est de passer du cas de base $n = 0$ au suivant cas, $n = 1$; nous ne pouvons pas écrire 1 comme la somme de deux plus petits nombres naturels. **31.** Supposons que la proposition bien ordonnée la propriété tient. Supposons que $P(1)$ soit vrai et que le conditionnel $[P(1) \wedge P(2) \wedge \cdots \wedge P(n)] \rightarrow P(n+1)$ est vrai pour chaque entier positif n. Soit S l'ensemble des entiers positifs n pour lequel $P(n)$ est faux. Nous montrerons $S = \emptyset$. Suppose que $S = \emptyset$. Ensuite, par la propriété bien ordonnée, il y a au moins nombre entier m en S. On sait que m ne peut pas être 1 car $P(1)$ est vrai. Parce que $n = m$ est le plus petit entier tel que $P(n)$ est faux, $P(1)$, $P(2)$,. . . , $P(m-1)$ sont vrais, et $m - 1 \geq 1$. Parce que $[P(1) \wedge P(2) \wedge \cdots \wedge P(m-1)] \rightarrow P(m)$ est vrai, il s'ensuit que $P(m)$ doit également être vrai, ce qui est une contradiction. Par conséquent, $S = \emptyset$. **33.** Dans chaque cas, fournir une preuve par contradiction fondée sur un «plus petit contre-exemple», c'est-à-dire des valeurs de n et k telles que $P(n, k)$ n'est pas vrai et n et k sont les plus petits dans un certain sens. **a)** Choisissez un contre-exemple avec $n + k$ aussi petit que possible. On ne peut pas avoir $n = 1$ et $k = 1$, car on nous donne que $P(1, 1)$ est vrai. Par conséquent, soit $n > 1$ ou $k > 1$. Dans le ancien cas, par notre choix de contre-exemple, nous savons que $P(n-1, k)$ est vrai. Mais le pas inductif force alors $P(n, k)$ pour être vrai, une contradiction. Ce dernier cas est similaire. Donc notre supposer qu'il y a un contre-exemple qui peut se tromper, et $P(n, k)$ est vrai dans tous les cas. **b)** Choisissez un contre-exemple avec n aussi petit que possible. Nous ne pouvons pas avoir $n = 1$, car on nous donne que $P(1, k)$ est vrai pour tout k. Par conséquent, $n > 1$. Par notre choix de contre-exemple, nous savons que $P(n - 1, k)$ est vrai. Mais le pas inductif force alors $P(n, k)$ à être vrai, une contradiction. **c)** Choisissez un contre-exemple avec k aussi petit que possible. Nous ne pouvons pas avoir $k = 1$, car on nous donne que $P(n, 1)$ est vrai pour tout n. Par conséquent, $k > 1$. Par notre choix de contre-exemple, nous savons que $P(n, k-1)$ est vrai. Mais le le pas inductif force alors $P(n, k)$ à être vrai, une contradiction. **35.** Soit $P(n)$ la déclaration que si $x_1, x_2, ..., x_n$ sont n dis- nombres réels tincts, puis $n - 1$ multiplications sont utilisées pour trouver le produit de ces nombres, peu importe la façon dont les parenthèses sont inséré dans le produit. Nous prouverons que $P(n)$ est vrai en utilisant forte induction. Le cas de base $P(1)$ est vrai car $1-1 = 0$ des multiplications sont nécessaires pour trouver le produit de x_1, un produit avec un seul facteur. Supposons que $P(k)$ soit vrai pour $1 \leq k \leq n$. La dernière multiplication utilisée pour trouver le produit du $n + 1$ nombres réels distincts $x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}$ est une multiplication du produit du premier k de ces nombres pour certains k et le produit des derniers $n + 1 - k$ d'entre eux. Par l'inductif hypothèse, $k - 1$ multiplications sont utilisées pour trouver le produit de k des nombres, peu importe la façon dont les parenthèses ont été insérées dans le produit de ces nombres, et les multiplications $n - k$ sont utilisé pour trouver le produit de l'autre $n + 1 - k$ d'entre eux, non peu importe comment les parenthèses ont été insérées dans le produit de ces Nombres. Parce qu'une multiplication supplémentaire est nécessaire pour trouver le produit de tous les nombres $n + 1$, le nombre total de plications utilisées est égal à $(k - 1) + (n - k) + 1 = n$. Par conséquent, $P(n + 1)$ est vrai. **37.** Supposons que $a = dq + r = dq + r$ avec $0 \leq r < d$ et $0 \leq r < d$. Alors $d(q - q) = r - r$. Il s'ensuit que d divise $r - r$. Parce que $-d < r - r < d$, nous avons $r - r = 0$. Par conséquent, $r = r$. Il s'ensuit que $q = q$. **39.** Il s'agit d'un paradoxe provoqué par l'auto-référence. La réponse est clairement «non». Il y a un nombre fini de mots anglais, donc seulement un nombre fini de chaînes de 15 mots ou moins; Là- par conséquent, seul un nombre fini d'entiers positifs peut être scribed, pas tous. **41.** Supposons que le bon ordre la propriété était fausse. Soit S un ensemble non négatif de non négatif des entiers qui n'ont pas le moindre élément. Soit $P(n)$ la déclaration "$I \in S$ pour $i = 0, 1, ..., n$." $P(0)$ est vrai car si $0 \in S$ alors S a un moindre élément, à savoir 0. Supposons maintenant que $P(n)$ soit vrai. Ainsi, $0 \in S$, $1 \in S$, ..., $n \in S$. Clairement, $n+1$ ne peut pas être en S, car s'il l'était, ce serait son moindre élément. Ainsi $P(n+1)$ est vrai. Donc, par le principe de l'induction mathématique, $n \in S$ pour tous les entiers non négatifs n. Ainsi, $S = \emptyset$, une contradiction. **43.** Une forte induction implique le principe de l'information mathématique duction, car si on a montré que $P(k) \rightarrow P(k + 1)$ est vrai, alors on a aussi montré que $[P(1) \wedge \cdots \wedge P(k)] \rightarrow P(k+1)$ est vrai. Par l'exercice 41, le principe de l'induction mathématique implique la propriété de bon ordre. Par conséquent, en supposant forte induction comme axiome, nous pouvons prouver le bon ordre propriété.

Section 5.3

1. **a)** $f(1) = 3$, $f(2) = 5$, $f(3) = 7$, $f(4) = 9$ **b)** $f(1) = 3$, $f(2) = 9$, $f(3) = 27$, $f(4) = 81$ **c)** $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, $f(3) = 16$, $f(4) = 65, 536$ **d)** $f(1) = 3$, $f(2) = 13$, $f(3) = 183$, $f(4) = 33, 673$ **3.** **a)** $f(2) = -1$, $f(3) = 5$, $f(4) = 2$, $f(5) = 17$ **b)** $f(2) = -4$, $f(3) = 32$, $f(4) = -4096$, $f(5) = 536, 870, 912$ **c)** $f(2) = 8$, $f(3) = 176$, $f(4) = 92, 672$, $f(5) = 25, 764, 174, 848$ **d)** $f(2) = -\frac{1}{2}$, $f(3) = -4$, $f(4) = \frac{1}{8}$, $f(5) = -32$ **5.** **a)** Non valide **b)** $f(n) = 1 - n$. *Pas de base:* $f(0) = 1 = 1 - 0$. *Pas inductif:* si $f(k) = 1 - k$, puis $f(k + 1) = f(k) - 1 = 1 - k - 1 = 1-(k + 1)$. **c)** $f(n) = 4 - n$ si $n > 0$, et $f(0) = 2$. *Base pas:* $f(0) = 2$ et $f(1) = 3 = 4 - 1$. *Pas inductif* (avec $k \geq 1$): $f(k + 1) = f(k) - 1 = (4 - k) - 1 = 4 - (k + 1)$. **d)** $f(n) = 2^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor}$. *Étape de base:* $f(0) = 1 = 2^{\lfloor (0+1)/2 \rfloor}$ et $f(1) = 2 = 2^{\lfloor (1+1)/2 \rfloor}$. *Pas inductif* (avec $k \geq 1$): $f(k+1) = 2f(k-1) = 2 \cdot 2^{\lfloor k/2 \rfloor} = 2^{\lfloor k/2 \rfloor + 1} = 2^{\lfloor ((k+1)+1)/2 \rfloor}$. **e)** $f(n) = 3^n$. *Étape de base:* triviale. *Étape inductive:* Pour les impairs n, $f(n) = 3f(n - 1) = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$; et même $n > 1$, $f(n) = 9f(n - 2) = 9 \cdot 3^{n-2} = 3^n$. **7.** Là sont de nombreuses bonnes réponses possibles. Nous fournirons relativement simples. **a)** $a_{n+1} = a_n + 6$ pour $n \geq 1$ et $a_1 = 6$ **b)** $a_{n+1} = a_n + 2$ pour $n \geq 1$ et $a_1 = 3$ **c)** $a_{n+1} = 10a_n$ pour $n \geq 1$ et $a_1 = 10$ **d)** $a_{n+1} = a_n$ pour $n \geq 1$ et $a_1 = 5$ **9.** $F(0) = 0$, $F(n) = F(n-1) + n$ pour $n \geq 1$

11. $P_m(0) = 0$, $P_m(n+1) = P_m(n) + m$ **13.** Soit $P(n)$ être «$f_1 + f_3 + \cdots + f_{2n-1} = f_{2n}$». *Étape de base:* $P(1)$ est vrai parce que $f_1 = 1 = f_2$. *Étape inductive:* Supposons que $P(k)$ est vrai. Alors $f_1 + f_3 + \cdots + f_{2k-1} + f_{2k+1} = f_{2k} + f_{2k+1} = f_{2k+2} + f_{2(k+1)}$. **15.** *Étape de base:* $f_0 f_1 + f_1 f_2 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1^2 = f_2^2$. *Inductif étape:* Supposons que $f_0 f_1 + f_1 f_2 + \cdots + f_{2k-1} f_{2k} = f_{2k}^2$. Alors $f_0 f_1 + f_1 f_2 + \cdots + f_{2k-1} f_{2k} + f_{2k} f_{2k+1} + f_{2k+1} f_{2k+2} = f_{2k}^2 + f_{2k} f_{2k+1} + f_{2k+1} f_{2k+2} = f_{2k}(f_{2k} + f_{2k+1}) + f_{2k+1} f_{2k+2} = f_{2k} f_{2k+2} + f_{2k+1} f_{2k+2} = (f_{2k} + f_{2k+1}) f_{2k+2} = f_{2k+2}^2$. **17.** Le nombre de divisions utilisé par l'algorithme euclidien pour trouver pgcd (f_{n+1}, f_n) est 0 pour $n = 0$, 1 pour $n = 1$, et $n - 1$ pour $n \geq 2$. Pour prouver ce résultat pour $n \geq 2$ nous utilisons l'induction mathématique. Pour $n = 2$, une division montre que gcd (f_3, f_2) = gcd $(2, 1)$ = gcd $(1, 0) = 1$. Maintenant supposons que $k - 1$ divisions sont utilisées pour trouver pgcd (f_{k+1}, f_k). Pour trouver pgcd (f_{k+2}, f_{k+1}), divisez d'abord f_{k+2} par f_{k+1} pour obtain $f_{k+2} = 1 \cdot f_{k+1} + f_k$. Après une division, nous avoir pgcd (f_{k+2}, f_{k+1}) = pgcd (f_{k+1}, f_k). Par l'induc- hypothèse positive, il s'ensuit que exactement $k - 1$ di- des visions sont nécessaires. Cela montre que k divisions sont requis pour trouver gcd (f_{k+2}, f_{k+1}), terminant la preuve inductive. **19.** $|A| = -1$. Par conséquent, $|A^n| = (-1)^n$. Il s'ensuit que $f_{n+1} f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$. **21. a)** Preuve par induction. *Ba- étape sis:* Pour $n = 1$, max $(-a_1) = -a_1 = -$ min (a_1). Pour $n = 2$, il y a deux cas. Si un $_2 \geq$ un $_1$, puis $-a_1 \geq -a_2$, donc max $(-a_1, -a_2) = -a_1 = -$ min (a_1, a_2). Si un $_2 < a_1$, puis $-a_1 < -a_2$, donc max $(-a_1, -a_2) = -$ un $_2 = -$ min (a_1, a_2). *Étape inductive:* Supposons vrai pour k avec $k \geq 2$. Alors max $(-a_1, -a_2, \ldots, -a_k, -a_{k+1})$ = max (max $(-a_1, \ldots, -a_k)$, $-a_{k+1}$) = max ($-$min $(a_1, \ldots, a_k)$, $-a_{k+1}$) = $-$ min (min $(a_1, \ldots, a_k)$, a_{k+1}) = $-$ min $(a_1, \ldots, a_{k+1})$. **b)** Preuve par induction mathématique. *Étape de base:* Pour $n = 1$, le résultat est l'identité $a_1 + b_1 = a_1 + b_1$. Pour $n = 2$, considérons d'abord le cas dans lequel $a_1 + b_1 \geq a_2 + b_2$. Alors max $(a_1 + b_1, a_2 + b_2) = a_1 + b_1$. Notez également qui $a_1 \leq$ max (a_1, a_2) et $b_1 \leq$ max (b_1, b_2), donc $a_1 + b_1 \leq$ max (a_1, a_2) + max (b_1, b_2). Donc, max $(a_1 + b_1, a_2 + b_2) = a_1 + b_1 \leq$ max (a_1, a_2) + max (b_1, b_2). Le cas avec un $_1 + b_1 < a_2 + b_2$ est similaire. *Dans- étape ductive:* Supposons que le résultat soit vrai pour k. alors max $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_k + b_k, a_{k+1} + b_{k+1})$ = max (max $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_k + b_k)$, $a_{k+1} + b_{k+1}$) $\leq$ max (max $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ + max $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$, $a_{k+1} + b_{k+1}$) $\leq$ max (max $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, a_{k+1}) + max (max $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$, b_{k+1}) = max $(a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1})$ + max $(b_1, b_2, \ldots, b_k, b_{k+1})$. **c)** Identique à la partie (b), mais remplacer chaque occurrence de «max» par «Min» et inverser chaque inégalité. **23.** $5 \in S$ et $x + y \in S$ si $x, y \in S$. **25. a)** $0 \in S$, et si $x \in S$, alors $x + 2 \in S$ et $x - 2 \in S$. **b)** $2 \in S$, et si $x \in S$, alors $x + 3 \in S$. **c)** $1 \in S$, $2 \in S$, $3 \in S$, $4 \in S$, et si $x \in S$, alors $x + 5 \in S$.

27. a) $(0, 1), (1, 1), (2, 1); (0, 2), (1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2); (0, 3), (1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 3), (5, 3), (6, 3); (0, 4), (1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4), (5, 4), (6, 4), (7, 4), (8, 4)$ **b)** Soit $P(n)$ être l'affirmation que $a \leq 2b$ chaque fois que $(a, b) \in S$ est obtenu par n applications de l'étape récursive. *Étape de base:* $P(0)$ est vrai, car le seul élément de S obtenu sans application de l'étape récursive est $(0, 0)$, et en effet $0 \leq 2 \cdot 0$. *Inductif étape:* Supposons que $a \leq 2b$ chaque fois que $(a, b) \in S$ est obtenu par k ou moins d'applications de l'étape récursive, et considérer un élément obtenu avec $k + 1$ applications du récursif étape. Parce que l'application finale de l'étape récursive à un élément (a, b) doit être appliqué à un élément obtenu avec moins d'applications de l'étape récursive, on sait que $a \leq 2b$. Ajouter $0 \leq 2$, $1 \leq 2$ et $2 \leq 2$, respectivement, pour obtenir $a \leq 2(b + 1)$, $a + 1 \leq 2(b + 1)$ et $a + 2 \leq 2(b + 1)$, comme voulu. **c)** Cela vaut pour l'étape de base, car $0 \leq 0$. Si cela vaut pour (a, b), puis il vaut aussi pour les éléments obtenus de (a, b) dans l'étape récursive, car en ajoutant $0 \leq 2$, $1 \leq 2$, et $2 \leq 2$, respectivement, à $a \leq 2b$ donne $a \leq 2(b + 1)$, $a + 1 \leq 2(b + 1)$ et $a + 2 \leq 2(b + 1)$. **29. a)** Définir S par $(1, 1) \in S$, et si $(a, b) \in S$, alors $(a + 2, b) \in S$, $(a, b + 2) \in S$, et $(a + 1, b + 1) \in S$. Tous les éléments mis dans S remplit la condition, car $(1, 1)$ a une somme paire de coordonnées, et si (a, b) a une somme paire de coordonnées, alors il en va de même pour $(a + 2, b)$, $(a, b + 2)$ et $(a + 1, b + 1)$. Inversement, nous montrer par induction sur la somme des coordonnées que si $a + b$ est pair, alors $(a, b) \in S$. Si la somme est 2, alors $(a, b) = (1, 1)$, et la vente de pas de base (a, b) dans S. Sinon, la somme est au moins 4 et au moins l'un de $(a - 2, b)$, $(a, b - 2)$, et $(a - 1, b - 1)$ doivent avoir des coordonnées entières positives dont somme est un nombre pair plus petit que $a + b$, et doit donc dans S. Ensuite, une application de l'étape récursive montre que $(a, b) \in S$. **b)** Définissez S par $(1, 1)$, $(1, 2)$ et $(2, 1)$ sont en S, et si $(a, b) \in S$, alors $(a + 2, b)$ et $(a, b + 2)$ sont dans S. À prouver que notre définition fonctionne, nous notons d'abord que $(1, 1)$, $(1, 2)$, et $(2, 1)$ ont tous une coordonnée impaire, et si (a, b) a une impair coordonner, puis faire $(a + 2, b)$ et $(a, b + 2)$. Inversement, nous montrons par induction sur la somme des coordonnées que si (a, b) comporte au moins une coordonnée impair, alors $(a, b) \in S$. Si $(a, b) = (1, 1)$ ou $(a, b) = (1, 2)$ ou $(a, b) = (2, 1)$, puis la vente de pas de base (a, b) dans S. Sinon, a ou b est au moins 3, donc au moins l'un de $(a - 2, b)$ et $(a, b - 2)$ doit avoir des coordonnées entières positives dont la somme est inférieure à $a + b$, et doit donc être en S. Ensuite, une application de les spectacles étape récursive qui $(a, b) \in S$. **c)** $(1, 6) \in S$ et $(2, 3) \in S$, et si $(a, b) \in S$, alors $(a + 2, b) \in S$ et $(a, b + 6) \in S$. Pour prouver que notre définition fonctionne, nous notons d'abord que $(1, 6)$ et $(2, 3)$ satisfont à la condition, et si (a, b) satisfait à la condition, il en va de même pour $(a + 2, b)$ et $(a, b + 6)$. Inversement, nous montrons par récurrence sur la somme des coordonnées nates que si (a, b) satisfait à la condition, alors $(a, b) \in S$. Pour les sommes 5 et 7, les seuls points sont $(1, 6)$, qui constituent la base étape mise en S, $(2, 3)$, que l'étape de base mise en S, et $(4, 3) = (2 + 2, 3)$, qui est en S par une application de la définition récursive. Pour une somme supérieure à 7, soit $a \geq 3$, soit

$a \leq 2$ et $b \geq 9$, auquel cas soit $(a - 2, b)$ ou $(a, b - 6)$ doit avoir des coordonnées entières positives dont la somme est plus petite que $un + b$ et satisfaire à la condition d'être dans S . alors une application des spectacles étape récursive qui $(a, b) \in S$.
31. Si x est un ensemble ou une variable représentant un ensemble, alors x est un formule bien formée. Si x et y sont des formules bien formées, il en est de même de x , $(x \cup y)$, $(x \cap y)$ et $(x - y)$. **33. a)** Si $x \in D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, puis $m(x) = x$; si $s = tx$, où $t \in D_*$ et $x \in D$, alors $m(s) = \min(m(s), x)$.
b) Soit $t = wx$, où $w \in D_*$ et $x \in D$. Si $w = \lambda$, alors $m(st) = m(sx) = \min(m(s), x) = \min(m(s), m(x))$ par l'étape récursive et l'étape de base de la définition de m . Sinon, $m(st) = m((sw)x) = \min(m(sw), x)$ par le définition de m . Maintenant $m(sw) = \min(m(s), m(w))$ par le hypothèse inductive de l'induction structurale, donc $m(st) = \min(\min(m(s), m(w)), x) = \min(m(s), \min(m(w), x))$ par la signification de min. Mais $\min(m(w), x) = m(wx) = m(t)$ par l'étape récursive de la définition de m . Ainsi, $m(st) = \min(m(s), m(t))$. **35.** $\lambda^R = \lambda$ et $(ux)^R = xu^R$ pour $x \in$, $u \in {}^*$. **37.** $w^0 = \lambda$ et $w^{n+1} = ww^n$. **39.** Lorsque le la chaîne se compose de n 0 suivis de n 1 pour certains non négatifs entier n **41.** Soit $P(i)$ « $l(w^i) = i \cdot l(w)$ ». $P(0)$ est vrai car $l(w^0) = 0 = 0 \cdot l(w)$. Supposons que $P(i)$ soit vrai. alors $l(w^{i+1}) = l(ww^i) = l(w) + l(w^i) = l(w) + i \cdot l(w) = (i + 1) \cdot l(w)$. **43.** *Étape de base:* pour l'arbre binaire complet, composé uniquement d'une racine, le résultat est vrai car $n(T) = 1$ et $h(T) = 0$, et $1 \geq 2 \cdot 0 + 1$. *Pas inductif:* Supposons que $n(T_1) \geq 2h(T_1) + 1$ et $n(T_2) \geq 2h(T_2) + 1$. Par les définitions récursives de $n(T)$ et $h(T)$, nous avons $n(T) = 1 + n(T_1) + n(T_2)$ et $h(T) = 1 + \max(h(T_1), h(T_2))$.
Donc $n(T) = 1 + n(T_1) + n(T_2) \geq 1 + 2h(T_1) + 1 + 2h(T_2) + 1 \geq 1 + 2 \cdot \max(h(T_1), h(T_2)) + 2 = 1 + 2(\max(h(T_1), h(T_2)) + 1) = 1 + 2h(T)$. **45.** *Base étape:* $un_{0,0} = 0 = 0 + 0$. *Pas inductif:* Supposons que $a_{m,n} = m + n$ chaque fois que (m, n) est inférieur à (m, n) dans l'ordre lexicographique de $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$. Si $n = 0$ alors $a_{m,n} = a_{m-1,n} + 1 = m - 1 + n + 1 = m + n$. Si $n > 0$, alors $a_{m,n} = a_{m,n-1} + 1 = m + n - 1 + 1 = m + n$.
47. a) $P_{m,m} = P_m$ car un nombre supérieur à m ne peut pas être utilisé dans une partition de m . **b)** Parce qu'il n'y a qu'une seule façon de partition 1, à savoir, 1 = 1, il s'ensuit que $P_{1,n} = 1$. Parce que il n'y a qu'une seule façon de partitionner m en 1, $P_{m,1} = 1$. Lorsque $n > m$, il s'ensuit que $P_{m,n} = P_{m,m}$ car un nombre dépasse-ing m ne peut pas être utilisé. $P_{m,m} = 1 + P_{m,m-1}$ car un supplémentaire partition, à savoir, $m = m$, apparaît lorsque m est autorisé dans la partie tition. $P_{m,n} = P_{m,n-1} + P_{m-n,n}$ si $m > n$ car une partition de m en nombres entiers ne dépassant pas n non plus n'utilise pas de n s et par conséquent, est compté dans $P_{m,n-1}$ ou bien utilise un n et une partition de $m - n$, et donc, est compté dans $P_{m-n,n}$. **c)** $P_5 = 7$, $P_6 = 11$
49. Soit $P(n)$ soit « $A(n, 2) = 4$.» *Étape de base:* $P(1)$ est vrai parce que $A(1, 2) = A(0, A(1, 1)) = A(0, 2) = 2 \cdot 2 = 4$. *Étape inductive:* Supposons que $P(n)$ est vrai, c'est-à-dire $A(n, 2) = 4$. Alors $A(n + 1, 2) = A(n, A(n + 1, 1)) = A(n, 2) = 4$.
51. a) 16 **b)** 65 536 **53.** Utiliser un argument à double induction pour prouver l'énoncé le plus fort: $A(m, k) > A(m, l)$ lorsque $k > l$. *Étape de base:* lorsque $m = 0$, l'énoncé est vrai car $k > l$ implique que $A(0, k) = 2k > 2l = A(0, l)$. *Inductif étape:* Supposons que $A(m, x) > A(m, y)$ pour tout non négatif les entiers x et y avec $x > y$. Nous montrerons que cela implique que $A(m + 1, k) > A(m + 1, l)$ si $k > l$. *Étapes de base:* quand $l = 0$ et $k > 0$, $A(m + 1, l) = 0$ et soit $A(m + 1, k) = 2$ ou $A(m + 1, k) = A(m, A(m + 1, k - 1))$. Si $m = 0$, c'est $2A(1, k - 1) = 2^k$. Si $m > 0$, c'est supérieur à 0 par l'hypothèse inductive. Dans tous les cas, $A(m + 1, k) > 0$, et en fait, $A(m + 1, k) \geq 2$. Si $l = 1$ et $k > 1$, alors $A(m + 1, l) = 2$ et $A(m + 1, k) = A(m, A(m + 1, k - 1))$, avec $A(m + 1, k - 1) \geq 2$. Par conséquent, par l'hypothèse inductive esis, $A(m, A(m + 1, k - 1)) \geq A(m, 2) > A(m, 1) = 2$. *Étape inductive:* Supposons que $A(m + 1, r) > A(m + 1, s)$ pour tous $r > s$, $s = 0, 1, ..., l$. Alors si $k + 1 > l + 1$, il s'ensuit que $A(m + 1, k + 1) = A(m, A(m + 1, k)) > A(m, A(m + 1, k)) = A(m + 1, l + 1)$. **55.** Il ressort de l'exercice 54 que $A(i, j) \geq A(i - 1, j) \geq \cdots \geq A(0, j) = 2j \geq j$.
57. Soit $P(n)$ « $F(n)$ est bien défini». Alors $P(0)$ est vrai car $F(0)$ est spécifié. Supposons que $P(k)$ soit vrai pour tous $k < n$. Alors $F(n)$ est bien défini en n car $F(n)$ est donné en termes de $F(0), F(1), \ldots, F(n - 1)$. Donc $P(n)$ est vrai pour tous les entiers n . **59. a)** La valeur de $F(1)$ est ambiguë. **b)** $F(2)$ n'est pas défini car $F(0)$ n'est pas défini. **c)** $F(3)$ est ambigu et $F(4)$ n'est pas défini car $F(\frac{4}{3})$ fait pas de sens. **d)** La définition de $F(1)$ est ambiguë car les deuxième et troisième clauses semblent s'appliquer. **e)** $F(2)$ ne peut pas être calculé car essayer de calculer $F(2)$ donne $F(2) = 1 + F(F(1)) = 1 + F(2)$. **61. a)** 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 3 **e)** 4 **f)** 4 **g)** 5 **63.** $f^*_0(n) = \lceil n/a \rceil$ **65.** $f^*_2(n) = \lceil \log \log n \rceil$ pour $n \geq 2$, $f^*_2(1) = 0$

Section 5.4

1. Premièrement, nous utilisons l'étape récursive pour écrire $5! = 5 \cdot 4!$. nous puis utilisez l'étape récursive à plusieurs reprises pour écrire $4! = 4 \cdot 3!$, $3! = 3 \cdot 2!$, $2! = 2 \cdot 1!$, et $1! = 1 \cdot 0!$. Insérer la valeur de $0! = 1$, et en remontant les étapes, nous voyons que $1! = 1 \cdot 1 = 1$, $2! = 2 \cdot 1! = 2 \cdot 1 = 2$, $3! = 3 \cdot 2! = 3 \cdot 2 = 6$, $4! = 4 \cdot 3! = 4 \cdot 6 = 24$, et $5! = 5 \cdot 4! = 5 \cdot 24 = 120$.
3. Avec cette entrée, l'algorithme utilise la clause **else** pour trouver ce pgcd $(8, 13)$ = pgcd $(13$ **mod** $8, 8)$ = pgcd $(5, 8)$. Il utilise ceci à nouveau pour trouver que gcd $(5, 8)$ = gcd $(8$ **mod** $5, 5)$ = gcd $(3, 5)$, puis pour obtenir gcd $(3, 5)$ = gcd $(5$ **mod** $3, 3)$ = pgcd $(2, 3)$, puis pgcd $(2, 3)$ = pgcd $(3$ **mod** $2, 2)$ = pgcd $(1, 2)$, et encore une fois pour obtenir gcd $(1, 2)$ = gcd $(2$ **mod** $1, 1)$ = pgcd $(0, 1)$. Enfin, pour trouver gcd $(0, 1)$, il utilise la première étape avec $a = 0$ pour trouver que pgcd $(0, 1) = 1$. Par conséquent, l'algorithme constate que gcd $(8, 13) = 1$. **5.** Tout d'abord, parce que $n = 11$ est impair, nous utilisons la clause **else** pour voir que *mpower* $(3, 11, 5)$ = (*mpower* $(3, 5, 5)^2$ **mod** $5 \cdot 3$ **mod** $5)$ **mod** 5. Nous utilisons ensuite à nouveau la clause **else** pour voir que *mpower* $(3, 5, 5)$ = (*mpower* $(3, 2, 5)^2$ **mod** $5 \cdot 3$ **mod** $5)$ **mod** 5. Ensuite, nous utilisons la clause **else if** pour voir que *mpower* $(3, 2, 5)$ = *mpower* $(3, 1, 5)^2$ **mod** 5. Us-Après la clause **else** , nous avons *mpower* $(3, 1, 5)$ = (*mpower* $(3, 0, 5)^2$ **mod** $5 \cdot 3$ **mod** $5)$ **mod** 5. Enfin, utilisez-

Page 37

En utilisant la clause **if** , nous voyons que *mpower* $(3, 0, 5) = 1$. En reculant, il s'ensuit que *mpower* $(3, 1, 5) = (1^2$ **mod** $5 \cdot 3$ **mod** $5)$ **mod** $5 = 3$, *mpower* $(3, 2, 5) = 3^2$ **mod** $5 = 4$, *mpower* $(3, 5, 5) = (4^2$ **mod** $5 \cdot 3$ **mod** $5)$ **mod** $5 = 3$, et enfin *mpower* $(3, 11, 5) = (3^2$ **mod** $5 \cdot 3$ **mod** $5)$ **mod** $5 = 2$. Nous concluons que 3^{11} **mod** $5 = 2$.

7. **procédure** *mult* (n : entier positif, x : entier)
  si $n = 1$ **alors retourne** x
  sinon retourne $x + mult(n - 1, x)$

9. **procédure** *somme des cotes* (n : entier positif)
  si $n = 1$ **alors retourne** 1
  sinon retourne la *somme des cotes* $(n - 1) + 2n - 1$

11. **procédure la** *plus petite* ($a_1, \ldots, a_n$: entiers)
  si $n = 1$, **renvoyer** a_1
  sinon retour
   min *(le plus petit* $(a_1, \ldots, a_{n-1}), a_n)$

13. **procédure** *modfactorielle* (n , m : entiers positifs)
  si $n = 1$ **alors retourne** 1
  sinon retour
   ($n \cdot$ *modfactoriel* $(n - 1, m))$ **mod** m

15. **procédure** *gcd* (a, b : entiers non négatifs)
  { $a < b$ supposé tenir}
  si $a = 0$ **alors retourne** b
  sinon si $a = b - a$ **alors retourne** a
  sinon si $a < b - a$ **alors retourne** *gcd* $(a, b - a)$
  sinon retourner *gcd* $(b - a, a)$

17. **procédure** *multiplie* (x, y : entiers non négatifs)
  si $y = 0$ **alors retourne** 0
  d' autre si y est même **alors**
   retourner $2 \cdot$ *multiplier* $(x, y / 2)$
  sinon retourner $2 \cdot$ *multiplier* $(x, (y - 1) / 2) + x$

19. Nous utilisons une forte induction sur a . *Étape de base:* si $a = 0$, nous sachez que gcd $(0, b) = b$ pour tout $b > 0$, et c'est précisément ce que fait la clause **if** . *Pas inductif:* Fixer $k > 0$, supposons l'hypothèse inductive - que l'algorithme fonctionne correctement pour toutes les valeurs de son premier argument inférieures à k - et considérez ce qui se passe avec l'entrée (k, b) , où $k < b$. Parce que $k > 0$, la clause **else** est exécutée, et la réponse est quelle que soit la l'algorithme donne comme sortie pour les entrées $(b$ **mod** $k, k)$. Car b **mod** $k < k$, la paire d'entrée est valide. Par notre hy- pothesis, cette sortie est en fait gcd $(b$ **mod** $k, k)$, ce qui équivaut à pgcd (k, b) par le lemme 1 dans la section 4.3. **21.** Si $n = 1$, alors $nx = x$, et l'algorithme renvoie correctement x . Suppose que l'algorithme calcule correctement kx . Pour calculer $(k + 1)x$ it calcule récursivement le produit de $k + 1 - 1 = k$ et x , puis ajoute x . Par l'hypothèse inductive, il calcule que donne en sortie (à cause de la clause **else**) sa sortie lorsque l'entrée est k , plus $2(k + 1 - 1) + 1$. Par l'inductif hypothèse, sa sortie à k est k^2 , donc sa sortie à $k + 1$ est $k^2 + 2(k + 1 - 1) + 1 = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$, comme souhaité.

25. n multiplications contre 2^n **27.** $O(\log n)$ contre n

29. **procédure** a (n : entier non négatif)
  si $n = 0$ **alors retourne** 1
  sinon si $n = 1$ **alors retourne** 2
  sinon retourne $a(n - 1) \cdot a(n - 2)$

31. Itératif

33. **procédure** *itérative* (n : entier non négatif)
  si $n = 0$ **alors** $z := 1$
  sinon si $n = 1$ **alors** $z := 2$
  autre
   $x := 1$
   $y := 2$
   $z := 3$
   pour $i := 1$ **à** $n - 2$
    $w := x + y + z$
    $x := y$
    $y := z$
    $z := w$
  renvoie z { z est le n ème terme de la séquence}

35. Nous donnons d'abord une procédure récursive, puis une procédure itérative procédure.

procédure r (n : entier non négatif)
si $n < 3$ **alors retourne** $2n + 1$
sinon retourner $r(n - 1) \cdot (r(n - 2))^2 \cdot (r(n - 3))^3$

procédure i (n : entier non négatif)
si $n = 0$ **alors** $z := 1$
sinon si $n = 1$ **alors** $z := 3$
autre
 $x := 1$
 $y := 3$
 $z := 5$
 pour $i := 1$ **à** $n - 2$
  $w := z \cdot y^2 \cdot x^3$
  $x := y$
  $y := z$
  $z := w$
renvoie z { z est le n ème terme de la séquence}
La version itérative est plus efficace.

37. **procédure** *inverse* (w : chaîne de bits)
  $n :=$ longueur (w)
  si $n \leq 1$, **alors retourner** w

produit correctement, donc la réponse retournée est $kx + x = (k+1)x$, qui est correct.

23. **procédure** *carré* (n : entier non négatif)
si $n = 0$ **alors retourne** 0
sinon retour *carré* $(n - 1) + 2(n - 1) + 1$

Soit $P(n)$ la déclaration selon laquelle cet algorithme se computes n^2. Parce que $0^2 = 0$, l'algorithme fonctionne correctement (en utilisant la clause **if**) si l'entrée est 0. Supposons que l'algorithme rithm fonctionne correctement pour l'entrée k. Alors pour l'entrée $k + 1$, il

sinon retour
substr (w, n, n) *reverse* (*substr* $(w, 1, n - 1)$)
{ *substr* (w, a, b) est la sous-chaîne de w composée de les symboles dans les positions a th à b th}

39. La procédure donne correctement l'inversion de λ comme λ (base étape), et parce que l'inversion d'une chaîne se compose de sa dernière suivi du renversement de son premier caractère $n - 1$ (voir l'exercice 35 à la section 5.3), l'algorithme se comporte correctement lorsque $n > 0$ par l'hypothèse inductive. **41.** Le

Page 38

algorithme implémente l'idée de l'exemple 14 dans la section 5.1. Si $n = 1$ (étape de base), placez le triomino droit de sorte que son l'aisselle correspond au trou dans la planche 2×2. Si $n > 1$, alors divisez la planche en quatre planches, chacune de taille $2^{n-1} \times 2^{n-1}$, remarquez dans quel quart le trou se produit, placez un omino au centre de la planche avec ses aisselles dans le quart où se trouve le carré manquant (voir la figure 7 à la section 5.1), et invoquer l'algorithme récursivement quatre fois - une fois sur chacun des les deux $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ planches, dont chacune a un carré manquant (soit parce qu'il manquait au départ, soit parce qu'il est couvert par le triomino central).

43. **procédure** A (m, n : entiers non négatifs)
si $m = 0$ **alors retourne** $2n$
sinon si $n = 0$ **alors retourne** 0
sinon si $n = 1$ **alors retourne** 2
sinon retourner $A(m - 1, A(m, n - 1))$

45.

bdafghzpok

bdafg hzpok

bda fg hzp D'accord

bd une F g hz p o k

b ré h z

bd hz

abd fg hpz ko

abdfg hkopz

Parce que $y = 3 > 0$, il affecte ensuite la valeur $z + 1 = 5 + 1 = 6$ à z.

5. $(p \wedge \text{condition } 1)\ \{S_1\}\ q$
$(p \wedge \neg\, \text{condition } 1 \wedge \text{condition } 2)\ \{S_2\}\ q$
.
.
.
$(p \wedge \neg\, \text{condition } 1 \wedge \neg\, \text{condition } 2$
$\cdots \wedge \neg\, \text{condition } (n - 1))\ \{S_n\}\ q$

$\therefore p$ { **si** *condition* 1 **alors** S_1 ;
sinon si *condition* 2 **alors** S_2 ; ... ; **sinon** S_n } q

7. Nous montrerons que p : “ $power = x^{i-1}$ et $i \leq n + 1$ "est un boucle invariante. Notez que p est vrai au départ, car avant le la boucle démarre, $i = 1$ et *puissance* $= 1 = x^0 = x^{1-1}$. Ensuite, nous devons montrer que si p est vrai et $i \leq n$ après une exécution de la boucle, alors p reste vrai après une autre exécution. La boucle augmente ments i de 1. Par conséquent, parce que $i \leq n$ avant ce passage, $i \leq n$ 1 après cette passe. La boucle affecte également la *puissance* $\cdot\, x$ à la *puissance* . Par l'hypothèse inductive, nous voyons que la *puissance* est attribuée à la valeur $x^{i-1} \cdot x = x^i$. Par conséquent, p reste vrai. En outre, le la boucle se termine après n traversées de la boucle avec $i = n + 1$ parce que la valeur 1 est attribuée à i avant d'entrer dans la boucle, est incrémenté de 1 à chaque passage, et la boucle se termine lorsque $i > n$. Par conséquent, à la *puissance de* terminaison $= x^n$, comme voulu.

9. Supposons que p soit « m et n sont des entiers». Ensuite, si la condition $n < 0$ est vrai, $a = -n = |n|$ après l' exécution de S_1. Si la la condition $n < 0$ est fausse, alors $a = n = |n|$ après l' exécution de S_1. Par conséquent, $p\ \{S_1\}\ q$ est vrai où q est $p \wedge (a = |n|)$. Parce que S_2 attribue la valeur 0 à k et x, il est clair que $q\ \{S_2\}\ r$ est vrai où r est $q \wedge (k = 0) \wedge (x = 0)$. Supposons que r soit vrai. Soit $P(k)$ « $x = mk$ et $k \leq a$ ». On peut montrer que $P(k)$ est un boucle invariante pour la boucle en S_3. $P(0)$ est vrai car avant la boucle est entrée $x = 0 = m \cdot 0$ et $0 \leq a$. Supposons maintenant $P(k)$ est vrai et $k < a$. Alors $P(k+1)$ est vrai car x est assigné la valeur $x + m = mk + m = m(k + 1)$. La boucle se termine lorsque $k = a$, et à ce point $x = ma$. Par conséquent, $r\ \{S_3\}\ s$ est vrai

47. Soit les deux listes 1 , 2 , ..., m - 1 , $m + n$ - 1 et m , m + 1 , ..., $m + n$ - 2, $m + n$, respectivement. **49.** Si n = 1, alors l'algorithme ne fait rien, ce qui est correct car une liste avec un élément est déjà triée. Suppose que l'algorithme fonctionne correctement pour n = 1 à $n = k$. Si $n = k$ +1, la liste est ensuite divisée en deux listes, L_1 et L_2 . Par le hypothèse inductive, *mergesort* trie correctement chacun de ces sous-listes; en outre, *fusionner fusionne* correctement deux listes triées en un parce qu'à chaque comparaison, le plus petit élément dans $L_1 \cup L_2$ non encore mis en L y est mis. **51.** $O(n)$ **53.** 6 **55.** $O(n^2)$

Section 5.5

1. Supposons que x = 0. Le segment de programme affecte d'abord le valeur 1 à y , puis attribue la valeur $x + y$ = 0 + 1 = 1 à z . **3.** Supposons que y = 3. Le segment de programme affecte la valeur 2 à x , puis attribue la valeur $x + y$ = 2 + 3 = 5 à z .

où s est « $a = \lfloor n \rfloor$ et $x = ma$. "Supposons maintenant que s est vrai. Alors si n < 0, il s'ensuit que a = - n , donc x = - mn . Dans ce cas, S_4 affecte - $x = mn$ au *produit* . Si n> 0 alors $x = ma = mn$, donc S_4 affecte mn au *produit* . Par conséquent, s { S_4 } t est vrai. **11.** Supposons que l'assertion initiale p soit vraie. alors parce que p { S } q_0 est vrai, q_0 est vrai après que le segment S est exécuté coupé. Parce que $q_0 \rightarrow q_1$ est vrai, il s'ensuit également que q_1 est vrai après l' exécution de S. Par conséquent, p { S } q_1 est vrai. **13.** Nous utiliserons la proposition p , «gcd (a, b) = gcd (x, y) et $y \geq 0$», comme boucle invariante. Notez que p est vrai avant que la boucle ne soit entrée, car à ce point $x = a$, $y = b$, et y est un entier positif ger, en utilisant l'assertion initiale. Supposons maintenant que p est vrai et y> 0; alors la boucle sera exécutée à nouveau. À l'intérieur de la boucle, x et y sont remplacés respectivement par y et x **mod** y . Par Lemma 1 de la section 4.3, pgcd (x, y) = pgcd $(y, x$ **mod** $y)$. Donc, après l'exécution de la boucle, la valeur de gcd (x, y) est la même comme avant. De plus, comme y est le reste, il est au moins 0. Par conséquent, p reste vrai, c'est donc un invariant de boucle. De plus, si la boucle se termine, alors y = 0. Dans ce cas, nous avons gcd $(x, y) = x$, l'assertion finale. Par conséquent, la programme, qui donne x comme sortie, a correctement calculé

Page 39

pgcd (a, b) . Enfin, nous pouvons prouver que la boucle doit se terminer, chaque itération fait diminuer la valeur de y d'au moins moins 1. Par conséquent, la boucle peut être itérée au plus b fois.

Exercices supplémentaires

1. Soit $P(n)$ l'énoncé de cette équation. *Base étape:* $P(1)$ dit deux / 3 = 1 - (1 / trois ^{1}) , ce qui est vrai. *Inductif étape:* Supposons que $P(k)$ soit vrai. Puis 2 / 3 + 2 / 9 + 2 / 27 + ··· + 2 / trois^n + 2 / trois^{n+1} = 1 - 1 / 3^n + 2 / trois^{n+1} (par l'inductif hypothèse), ce qui est égal à 1 - 1 / 3^{n+1} , comme voulu. **3.** Soit $P(n)$ soit «1 · 1 + 2 · 2 + ··· + n · 2^{n-1} = $(n - 1)$ 2^n + 1. " *Étape de base:* $P(1)$ est vrai car 1 · 1 = 1 = (1 - 1) 2^1 + 1. *Étape inductive:* Supposons que $P(k)$ soit vrai. Alors 1 · 1 + 2 · 2 + ··· + k · 2^{k-1} + $(k + 1)$ · 2^k = $(k - 1)$ 2^k + 1 + $(k + 1)$ 2^k = 2 k · 2^k + 1 = [$(k + 1)$ - 1] 2^{k+1} + 1. **5.** Soit $P(n)$ soit "1 / (1 · 4) + ··· + 1 / [(3 n - 2) (3 n + 1)] = n / (3 n + 1) ." *Étape de base:* $P(1)$ est vrai car 1 / (1 · 4) = 1 / 4. *Inductif étape:* Supposons que $P(k)$ est vrai. Puis 1 / (1 · 4) + ··· + 1 / [(3 k - 2) (3 k +1)] +1 / [(3 k +1) (3 k +4)] = k / (3 k +1) +1 / [(3 k + 1) (3 k + 4)] = [k (3 k + 4) + 1] / [(3 k + 1) (3 k + 4)] = [(3 k + 1) $(k + 1)$] / [(3 k + 1) (3 k + 4)] = $(k + 1)$ / (3 k + 4) . **7.** Soit $P(n)$ soit «2^n > n^3.» *Étape de base:* $P(10)$ est vrai car 1024 > 1000. *Étape inductive:* Supposons que $P(k)$ soit vrai. alors

provoquer la dérivée de $g(x) = xe^x$ est $x \cdot e^x + e^x = (x + 1) e^x$ par la règle du produit. *Étape inductive:* Supposons que l'état- est vrai pour $n = k$, c'est-à-dire que la dérivée k est donnée par $g^{(k)} = (x + k) e^x$. La différenciation par la règle du produit donne $(k$ +1) dérivée st: $g^{(k+1)} = (x + k) e^x + e^x$ = [$x + (k$ +1)] e^x , comme voulu. **19.** Nous utiliserons une forte induction pour montrer que f_n est pair si $n \equiv 0$ (mod 3) et impair sinon. *Étape de base:* Cette suit parce que f_0 = 0 est pair et f_1 = 1 est impair. *Inductif étape:* Supposons que si $j \leq k$, alors f_j est pair si $j \equiv 0$ (mod 3) et est étrange autrement. Supposons maintenant k + 1 ≡ 0 (mod 3). alors $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$ est pair car f_k et f_{k-1} sont tous deux impairs. Si k + 1 ≡ 1 (mod 3), alors $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$ est impair car f_k est pair et f_{k-1} est impair. Enfin, si k +1 ≡ 2 (mod 3), alors $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$ est impair car f_k est impair et f_{k-1} est pair. **21.** Soit $P(n)$ l'énoncé que $f_k f_n + f_{k+1} f_{n+1} = f_{n+k+1}$ pour chaque entier non négatif k . *Étape de base: elle* consiste en montrant que $P(0)$ et $P(1)$ tiennent tous les deux. $P(0)$ est vrai car $f_k f_0 + f_{k+1} f_1 = f_{k+1} \cdot 0 + f_{k+1} \cdot 1 = f_1$. Car $f_k f_1 + f_{k+1} f_2 = f_k + f_{k+1} = f_{k+2}$, il s'ensuit que $P(1)$ est vrai. *Étape inductive:* Supposons maintenant que $P(j)$ est vrai. Alors, par l'hypothèse inductive et la définition récursive de la Nombres de Fibonacci, il s'ensuit que $f_{k+1} f_{j+1} + f_{k+2} f_{j+2}$ = $f_k (f_{j-1} + f_j) + f_{k+1} (f_j + f_{j+1}) = (f_k f_{j-1} + f_{k+1} f_j)$ + $(f_k f_j + f_{k+1} f_{j+1}) = f_{j-1+k+1} + f_{j+k+1} = f_{j+k+2}$. Cette

$(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 \le k^3 + 9k^2 \le k^3 + k^3 = 2k^3 < 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$. **9.** Soit $P(n)$ soit « $a - b$ est un facteur d' $a^n - b^n$. » *Étape de base:* $P(1)$ est trivialement vrai. Supposons que $P(k)$ est vrai. Alors $a^{k+1} - b^{k+1} = a^{k+1} - ab^k + ab^k - b^{k+1} = a(a^k - b^k) + b^k(a - b)$. Ensuite parce *que* $a - b$ est un facteur de $a^k - b^k$ et $a - b$ est un facteur $a - b$, il s'ensuit que $a - b$ est un facteur de $a^{k+1} - b^{k+1}$. **11.** *Étape de base:* lorsque $n = 1$, $6^{n+1} + 7^{2n-1} = 36 + 7 = 43$. *Étape inductive:* Supposons que hypothèse inductive, que 43 divise $6^{n+1} + 7^{2n-1}$; nous devons montrer que 43 divise $6^{n+2} + 7^{2n+1}$. Nous en avons $6^{n+2} + 7^{2n+1} = 6 \cdot 6^{n+1} + 49 \cdot 7^{2n-1} = 6 \cdot 6^{n+1} + 6 \cdot 7^{2n-1} + 43 \cdot 7^{2n-1} = 6(6^{n+1} + 7^{2n-1}) + 43 \cdot 7^{2n-1}$. Par l'hypothèse inductive le premier terme est divisible par 43 et le second terme est clairement divisible par 43; donc la somme est divisible par 43. **13.** Soit $P(n)$ soit « $a + (a+d) + \cdots + (a+nd) = (n+1)(2a+nd)/2$.» *Étape de base:* $P(1)$ est vrai car $a + (a+d) = 2a + d = 2(2a+d)/2$. *Étape inductive:* Supposons que $P(k)$ soit vrai. alors $a + (a+d) + \cdots + (a+kd) + [a + (k+1)d] = (k+1)(2a+kd)/2 + a + (k+1)d = \frac{1}{2}(2ak + 2a + k^2d + kd + 2a + 2kd + 2d) = \frac{1}{2}(2ak + 4a + k^2d + 3kd + 2d) = \frac{1}{2}(k+2)[2a + (k+1)d]$. **15.** *Étape de base:* cela est vrai pour $n = 1$ parce que cinq $/6 = 10/12$. *étape inductive:* Supposons que l'équation est vraie pour $n = k$, et considérons $n = k + 1$. Alors $\sum_{i=1}^{k+1} \frac{i+4}{i(i+1)(i+2)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{i+4}{i(i+1)(i+2)} + \frac{k+5}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{k(3k+7)}{2(k+1)(k+2)} + \frac{k+5}{(k+1)(k+2)(k+3)}$ (par l'hypothèse inductive) $= \frac{1}{(k+1)(k+2)} \cdot \left(\frac{k(3k+7)}{2} + \frac{k+5}{k+3}\right) = \frac{1}{2(k+1)(k+2)(k+3)} \cdot [k(3k+7)(k+3) + 2(k+5)] = \frac{1}{2(k+1)(k+2)(k+3)} \cdot (3k^3 + 16k^2 + 23k + 10) = \frac{1}{2(k+1)(k+2)(k+3)} \cdot (3k+10)(k+1)^2 = \frac{1}{2(k+2)(k+3)} \cdot (3k+10)(k+1) = \frac{(k+1)(3(k+1)+7)}{2((k+1)+1)((k+1)+2)}$, comme voulu. **17.** *Étape de base:* L'énoncé est vrai pour $n = 1$ entre

montre que $P(j+1)$ est vrai. **23.** Soit $P(n)$ la déclaration $l_0^2 + l_1^2 + \cdots + l_n^2 = l_n l_{n+1} + 2$. *Étape de base:* $P(0)$ et $P(1)$ les deux tiennent parce que $l_0^2 = 2^2 = 2 \cdot 1 + 2 = l_0 l_1 + 2$ et $l_0^2 + l_1^2 = 2^2 + 1^2 = 1 \cdot 3 + 2 = l_1 l_3 + 2$. *Inductif étape:* Supposons que $P(k)$ *soit* vrai. Ensuite, par l'hypothèse inductive esis $l_0^2 + l_1^2 + \cdots + l_k^2 + l_{k+1}^2 = l_k l_{k+1} + 2 + l_{k+1}^2 = l_{k+1}(l_k + l_{k+1}) + 2 = l_{k+1} l_{k+2} + 2$. Cela montre que $P(k+1)$ tient. **25.** Soit $P(n)$ la déclaration selon laquelle le l'identité est valable pour l'entier n. *Étape de base:* $P(1)$ est évi- incroyablement vrai. *Étape inductive:* Supposons que $P(k)$ soit vrai. alors $\cos((k+1)x) + i\sin((k+1)x) = \cos(kx + x) + i\sin(kx + x) = \cos kx \cos x - \sin kx \sin x + i(\sin kx \cos x + \cos kx \sin x) = \cos x(\cos kx + i\sin kx)(\cos x + i\sin x) = (\cos x + i\sin x)^k(\cos x + i\sin x) = (\cos x + i\sin x)^{k+1}$. Il a suivi bas que $P(k+1)$ est vrai. **27.** Réécrire le côté droit comme $2^{n+1}(n^2 - 2n + 3) - 6$. Pour $n = 1$, nous avons $2 = 4 \cdot 2 - 6$. Comme- supposons que l'équation est vraie pour $n = k$, et considérons $n = k+1$. alors $\sum_{j=1}^{k+1} j^2 2^j = \sum_{j=1}^{k} j^2 2^j + (k+1)^2 2^{k+1} = 2^{k+1}(k^2 - 2k + 3) - 6 + (k^2 + 2k + 1) 2^{k+1}$ (par l'hypo- thèse) $= 2^{k+1}(2k^2 + 4) - 6 = 2^{k+2}(k^2 + 2) - 6 = 2^{k+2}[(k+1)^2 - 2(k+1) + 3] - 6$. **29.** Soit $P(n)$ le déclaration que cette équation est vraie. *Étape de base:* dans $P(2)$ *les* deux côtés réduisent à $1/3$. *étape inductive:* Supposons que $P(k)$ est vrai. alors $\sum_{j=1}^{k+1} 1/(j^2 - 1) = \left(\sum_{j=1}^{k} 1/(j^2 - 1)\right) + 1/[(k+1)^2 - 1] = (k-1)(3k+2)/[4k(k+1)] + 1/[(k+1)^2 - 1]$ par l'hypothèse inductive. Cela se simplifie en $(k-1)(3k+2)/[4k(k+1)] + 1/(k^2 + 2k) = (3k^3 + 5k^2)/[4k(k+1)(k+2)] = \{[(k+1) - 1][3(k+1) + 2]\}/[4(k+1)(k+2)]$, qui est exactement ce que $P(k+1)$ affirme. **31.** Soit $P(n)$ l'assertion qu'au moins $n+1$ lignes sont nécessaires pour couvrir les points du réseau dans la région triangulaire donnée. *Étape de base:* $P(0)$ est vrai, car

nous avons besoin d'au moins une ligne pour couvrir le point en $(0, 0)$. *Induit étape tive:* Supposons l'hypothèse inductive, qu'au moins $k + 1$ des lignes sont nécessaires pour couvrir les points du réseau avec $x \ge 0$, $y \ge 0$, et $x + y \le k$. Considérons le triangle de points de réseau défini par $x \ge 0$, $y \ge 0$ et $x + y \le k+1$. A titre de contradiction, supposons que $k + 1$ lignes pourraient couvrir cet ensemble. Alors ces lignes doit couvrir les $k + 2$ points sur la ligne $x + y = k + 1$. Mais seule la ligne $x + y = k + 1$ elle-même peut couvrir plus de l'un de ces points, parce que deux lignes distinctes se croisent à au moins plus un point. Par conséquent, aucune des $k + 1$ lignes qui sont nécessaire (par l'hypothèse inductive) pour couvrir l'ensemble du réseau les points dans le triangle mais pas sur cette ligne peuvent couvrir plus que l'un des points de cette ligne, ce qui laisse au moins un

cas, les régions de chaque côté étaient la même région et maintenant la partie intérieure est différente de l'extérieur, sinon la limite n'impliquait pas le nouveau cercle, auquel cas les régions sont colorées différemment parce qu'elles ont été colorées différemment avant la restauration du nouveau cercle. **41.** Si $n = 1$ alors l'équation lit $1 \cdot 1 = 1 \cdot 2/2$, ce qui est vrai. Présumer que l'équation est vraie pour n et considérez-la pour $n + 1$. Alors $\sum_{j=1}^{n+1}(2j-1)\left(\sum_{k=j}^{n+1}\frac{1}{k}\right) = \sum_{j=1}^{n}(2j-1)\left(\sum_{k=j}^{n+1}\frac{1}{k}\right) + [2(n+1) - 1] \cdot \frac{1}{n+1} = \sum_{j=1}^{n}(2j-1)\left(\sum_{k=j}^{n}\frac{1}{k}\right) + \frac{1}{n+1}\left(\sum_{j=1}^{n}(2j-1)\right) + \frac{2n+1}{n+1} = \sum_{j=1}^{n}(2j-1)\left(\sum_{k=j}^{n}\frac{1}{k}\right) + \frac{2n+1}{n+1} = \frac{1}{n+1} \cdot n^2 + \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2n+1}{n+1}$

$2n^2 + n(n+1)^2 + (4n+2)$

point découvert. Par conséquent, notre hypothèse que $k+1$ lignes pourrait couvrir l'ensemble plus grand est faux, et notre preuve est complète. **33.** Soit *P (n)* est $\mathbf{B}^k = \mathbf{MA}^k\mathbf{M}^{-1}$. *Étape de base: une* partie de la donnée conditions. *Étape inductive:* Supposons l'hypothèse inductive. Puis $\mathbf{B}^{k+1} = \mathbf{BB}^k = \mathbf{MAM}^{-1}\mathbf{B}^k = \mathbf{MAM}^{-1}\mathbf{MA}^k\mathbf{M}^{-1}$ (par l'hypothèse inductive) $= \mathbf{MAIA}^k\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{MAA}^k\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{MA}^{k+1}\mathbf{M}^{-1}$. **35.** Nous prouvons par induction mathématique que énoncé plus fort suivant: Pour tout $n \geq 3$, nous pouvons écrire n ! comme la somme de n de ses diviseurs positifs distincts, dont l'un est 1. Autrement dit, nous pouvons écrire $n! = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, où chacun a_i est un diviseur de n !, les diviseurs sont listés en ordre strictement décroissant ordre, et un $a_n = 1$. *Étape de base:* $3! = 3 + 2 + 1$. *Pas inductif:* Supposons que nous pouvons écrire k ! comme une somme de la forme souhaitée, disons $k! = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$, où chacun a_i est un diviseur de n !, les diviseurs sont listés par ordre strictement décroissant, et $a_n = 1$. Considérez $(k+1)!$. Alors nous avons $(k+1)! = (k+1)k! = (k+1)(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) = (k+1)a_1 + (k+1)a_2 + \cdots + (k+1)a_k = (k+1)a_1 + (k+1)a_2 + \cdots + k \cdot a_k + a_k$. Être-parce que chacun a_i était un diviseur de k !, chacun $(k+1)a_i$ est un diviseur de $(k+1)!$. De plus, $k \cdot a_k = k$, qui est un diviseur de $(k+1)!$, et $a_k = 1$, donc la nouvelle dernière sommation est à nouveau 1. (Remarquez aussi que notre liste de sommations est toujours en ordre strictement décroissant.) Ainsi, nous avons écrit $(k+1)!$ sous la forme souhaitée. **37.** Quand $n = 1$, l'énoncé est vide. Supposons que l'état-est vrai pour $n = k$, et considérons $k+1$ personnes debout en ligne, avec une femme en premier et un homme en dernier. Si la k ème personne est une femme, alors nous avons cette femme debout devant le l'homme à la fin. Si la k ème personne est un homme, alors la première k personne ple en ligne satisfont les conditions de l'hypothèse inductive pour les premiers k personnes en ligne, nous pouvons donc à nouveau conclure que il y a une femme directement devant un homme quelque part dans le ligne. **39.** *Étape de base:* lorsque $n = 1$, il y a un cercle et nous pouvons colorer le bleu intérieur et le rouge extérieur pour satisfaire conditions. *Étape inductive:* Supposons l'hypothèse inductive que s'il y a k cercles, alors les régions peuvent être bicolores de telle sorte qu'aucune région avec une frontière commune n'a la même couleur, et considérez une situation avec $k+1$ cercles. Supprimer un des cercles, produisant une image avec k cercles, et invoquez l'hypothèse inductive pour le colorer de la manière prescrite. Remplacez ensuite le cercle retiré et changez la couleur de chaque région à l'intérieur de ce cercle. Le chiffre obtenu satisfait condition, parce que si deux régions ont une frontière commune, alors soit cette limite impliquait le nouveau cercle, dans lequel

(par l'hypothèse inductive) $= \frac{2(n+1)^2 + n(n+1)^2}{2(n+1)} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. **43.** Soit *T (n)* l'état-ment que la séquence des tours de 2 est finalement constante modulo n. Nous utilisons une forte induction pour prouver que *T (n)* est vrai pour tous les entiers positifs n. *Étape de base:* lorsque $n = 1$ (et $n = 2$), la séquence de tours de 2 modulo n est la séquence de tous les 0. *Étape inductive:* Supposons que k est un entier avec $k \geq 2$. Sup-pose que *T (j)* est vrai pour $1 \leq j \leq k - 1$. Dans la preuve de la étape inductive, nous désignons le r e terme de la séquence mod-ulo n par a_r. Supposons d'abord que k soit pair. Soit $k = 2^s q$ où $s \geq 1$ et $q < k$ est impair. Lorsque j est assez grand, $a_{j-2} \geq s$, et pour tel, $a_j = 2^{2^{a_{j-2}}}$ est multiple de 2^s. Il s'ensuit que pendant assez grand j, $a_j \equiv 0 \pmod{2^s}$. Par conséquent, pour assez grand i, 2^s divise $a_{i+1} - a_i$. Par l'hypothèse inductive *T (q)* est vrai, donc la séquence $a_1, a_2, a_3, \ldots$ est finalement modulo q constante. Cela implique que pour un i assez grand, q divise $a_{i+1} - a_i$. Être-provoquer $\gcd(q, 2^s) = 1$ et pour i suffisamment grand à la fois q et 2^s diviser $a_{i+1} - a_i$, $k = 2^s q$ divise $a_{i+1} - a_i$ pendant suffisamment grand i. Donc, pour i suffisamment grand, $a_{i+1} - a_i \equiv 0 \pmod{k}$. Cela signifie que la séquence est finalement modulo k constante. Enfin, supposons que k soit impair. Alors pgcd $(2, k) = 1$, donc par Euler théorème (trouvé dans les livres de théorie des nombres élémentaires, tels que [Ro10]), nous savons que $2^{\varphi(k)} \equiv 1 \pmod{k}$. Soit $r = \varphi(k)$. Être-provoquer $r < k$, par l'hypothèse inductive *T (r)*, la séquence $a_1, a_2, a_3, \ldots$ est finalement modulo r constant, disons égal à c. Donc pour i assez grand, pour un entier t_i, $a_i = t_i r + c$. D'où $a_{i+1} = 2^{a_i} = 2^{t_i r + c} = (2^r)^{t_i} 2^c \equiv 2^c \pmod{k}$. Cela montre que $a_1, a_2, \ldots$ est finalement modulo k constant. **45. a)** 92 **b)** 91 **c)** 91 **d)** 91 **e)** 91 **f)** 91 **47.** Le pas de base est incorrect car $n = 1$ pour la somme indiquée. **49.** Soit *P (n)* «le plan est divisé en $n^2 - n + 2$ régions par n cercles si tous les deux de ces cercles ont deux points communs mais aucun n'a un point commun. » *Étape de base: P (1)* est vrai car un cercle divise le plan en $2 = 1^2 - 1 + 2$ régions. *Étape inductive:* Supposons que *P (k)* est vrai, c'est-à-dire k cercles avec les propriétés spécifiées diviser le plan en $k^2 - k + 2$ Régions. Supposons qu'un $(k+1)$ premier cercle soit ajouté. Ce cir-cle coupe chacun des k autres cercles en deux points, donc ces points d'intersection forment $2k$ nouveaux arcs, dont chacun divise une ancienne région. Par conséquent, il y a $2k$ régions divisées, ce qui montre qu'il y a 2 *000* régions de plus qu'il y en avait vieusement. Par conséquent, $k+1$ cercles satisfaisant la propo-

propriétés divisent le plan en $k^2 - k + 2 + 2k = (k^2 + 2k + 1) - (k+1) + 2 = (k+1)^2 - (k+1) + 2$ re √

si $a_1 = 0$ **alors retourne** 1
sinon retourne 0

gions. **51.** Supposons $\sqrt{2}$ étaient rationnels, alors $\sqrt{2} = a / b$, où a et b sont des entiers positifs. Il s'ensuit que l'ensemble $S = \{ n\sqrt{2} \mid n \in \mathbf{N} \} \cap \mathbf{N}$ est un ensemble non vide d'entiers positifs, parce que $b\sqrt{2} = un$ appartient à S. Soit t le moindre élément de S, qui existe par la propriété bien ordonnée. Alors $t = s\sqrt{2}$ pour un certain nombre entier s. Nous avons $t - s = s\sqrt{2} - s = s(\sqrt{2}-1)$, donc $t - s$ est un entier positif car $\sqrt{2} > 1$. Par conséquent, $t - s$ appartient à S. Ceci est une contradiction car $t - s = s\sqrt{2} - s < s$. Par conséquent, $\sqrt{2}$ est irrationnel. **53.** **a)** Soit d = pgcd $(a_1, a_2, ..., a_n)$. Alors d est un diviseur de chaque a_i et doit donc être un diviseur de pgcd (a_{n-1}, a_n). Par conséquent, d est un diviseur commun de $a_1, a_2, ..., a_{n-2}$, et pgcd (a_{n-1}, a_n). Pour montrer que c'est le plus grand diviseur commun de ces nombres, supposons que *c en* soit un diviseur commun. Alors c est un diviseur de un_i pour $i = 1, 2, ..., n-2$ et un diviseur de gcd (a_{n-1}, un_n), de sorte qu'il est un diviseur de un_{n-1} et un_n. Par conséquent, c est un diviseur commun de $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$, et un_n. Par conséquent, il est un diviseur de d, le plus grand commun diviseur de $a_1, a_2, ..., a_n$. Il s'ensuit que d est le plus grand diviseur commun, comme revendiqué. **b)** Si $n = 2$, appliquez l'algorithme euclidien. Sinon, appliquer l'algorithme euclidien à un_{n-1} et un_n, obtenant d = gcd (a_{n-1}, a_n), puis appliquer l'algorithme récursivement à un_1, $a_2, ..., a_{n-2}, d$. **55.** $f(n) = n^2$. Soit $P(n)$ soit « $f(n) = n^2$ ». *Étape de base:* $P(1)$ est vrai car $f(1) = 1 = 1^2$, qui suit de la définition de f. *Étape inductive:* Supposons que $f(n) = n^2$. Alors $f(n+1) = f((n+1)-1) + 2(n+1) - 1 = f(n) + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$. **57.** **a)** λ, 0, 1, 00, 01, 11, 000, 001, 011, 111, 0000, 0001, 0011, 0111, 1111, 00000, 00001, 00011, 00111, 01111, 11111 **b)** $S = \{ \alpha\beta \mid \alpha$ est une chaîne de m 0s et β est une chaîne de n 1s, $m \geq 0$, $n \geq 0\}$
59. Appliquer la première étape récursive à X pour obtenir $() \in B$. Appliquer la deuxième étape récursive à cette chaîne pour obtenir $()() \in B$. Ap-épaisseur de la première étape récursive à cette chaîne pour obtenir $(()()) \in B$. Par l'exercice 62, $(()))$ n'est pas en B car le nombre de parenthèses n'est pas égal au nombre de parenthèses droites.
61. λ, (), (()), () () **63.** **a)** 0 **b)** -2 **c)** 2 **d)** 0

65.
génération de **procédure** (n : entier non négatif)
si n est impair **alors**
  $S := S(n-1)$ {le S construit par *generate* $(n-1)$ }
  $T := T(n-1)$ {le T construit par *generate* $(n-1)$ }
sinon si $n = 0$ **alors**
  $S := \varnothing$
  $T := \{ \lambda \}$
autre
  $S := S(n-2)$ {le S construit par *generate* $(n-2)$ }
  $T := T(n-2)$ {le T construit par *generate* $(n-2)$ }
  $T := T \cup \{ (x) \mid x \in T \cup S \wedge$ longueur $(x) = n-2\}$
  $S := S \cup \{ xy \mid x \in T \wedge y \in T \cup S \wedge$ longueur $(xy) = n \}$
{ $T \cup S$ est l'ensemble des chaînes de longueur équilibrées au plus n }

67. Si $x \leq y$ initialement, alors $x := y$ n'est pas exécuté, donc $x \leq y$ est une véritable affirmation finale. Si $x > y$ initialement, alors $x := y$ est exécuté, donc $x \leq y$ est à nouveau une véritable assertion finale.
69. **procédure** *zerocount* ($a_1, a_2, ..., a_n$: liste d'entiers)
  si $n = 1$ **alors**
autre
  si $a_n = 0$, **alors retourne** *zéro* $(a_1, a_2, ..., a_{n-1}) + 1$
  sinon retourne le *zéro* $(a_1, a_2, ..., a_{n-1})$
71. Nous prouverons que $a(n)$ est un nombre naturel et $a(n) \leq n$. Cela est vrai pour le cas de base $n = 0$ car $a(0) = 0$. Maintenant supposons que $a(n-1)$ est un nombre naturel et $a(n-1) \leq n-1$. Alors $a(a(n-1))$ est a appliqué à un nombre naturel inférieur ou égal à $n-1$. Par conséquent, $a(a(n-1))$ est également un nombre naturel moins que ou égal à $n-1$. Par conséquent, $n - a(a(n-1))$ est n moins un nombre naturel inférieur ou égal à $n-1$, qui est un nombre naturel inférieur ou égal à n. **73.** De l'exercice 72, $a(n) = \lfloor (n+1)\mu \rfloor$ et $a(n-1) = \lfloor n\mu \rfloor$. Parce que $\mu < 1$, ces deux valeurs sont égales ou diffèrent de 1. Supposons d'abord que $\mu n - \lfloor \mu n \rfloor < 1 - \mu$. Cela équivaut à $\mu(n+1) < 1 + \lfloor \mu n \rfloor$. Si cela est vrai, alors $\lfloor \mu(n+1) \rfloor = \lfloor \mu n \rfloor$. D'autre part, si $\mu n - \lfloor \mu n \rfloor \geq 1 - \mu$, alors $\mu(n+1) \geq 1 + \lfloor \mu n \rfloor$, donc $\lfloor \mu(n+1) \rfloor = \lfloor \mu n \rfloor + 1$, comme souhaité. **75.** $f(0) = 1$, $m(0) = 0$; $f(1) = 1$, $m(1) = 0$; $f(2) = 2$, $m(2) = 1$; $f(3) = 2$, $m(3) = 2$; $f(4) = 3$, $m(4) = 2$; $f(5) = 3$, $m(5) = 3$; $f(6) = 4$, $m(6) = 4$; $f(7) = 5$, $m(7) = 4$; $f(8) = 5$, $m(8) = 5$; $f(9) = 6$, $m(9) = 6$ **77.** Le dernier occurrence de n est dans la position pour laquelle le nombre total de 1s, 2s, ..., n s tous ensemble est ce numéro de position. Mais parce que a_k est le nombre d'occurrences de k, c'est juste $\sum_{k=1}^{n} a_k$, as voulu. Parce que $f(n)$ est la somme des n premiers termes de la séquence, $f(f(n))$ est la somme des premiers $f(n)$ termes du séquence. Mais parce que $f(n)$ est le dernier terme dont la valeur est n, cela signifie que la somme est la somme de tous les termes de la séquence dont la valeur est au plus n. Parce qu'il y a un_k termes de séquence dont la valeur est k, cette somme est $\sum_{k=1}^{n} k \cdot a_k$, comme souhaité

CHAPITRE 6

Section 6.1

1. **a)** 5850 **b)** 343 **3.** **a)** 4^{10} **b)** 5^{10} **5.** 42 **7.** 26^3
9. 676 **11.** 2^8 **13.** $n + 1$ (en comptant la chaîne vide)
15. 475 255 (en comptant la chaîne vide) **17.** 1 321 368 961
19. **a)** 729 **b)** 256 **c)** 1024 **d)** 64 **21.** **a)** Sept: 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98 **b)** Cinq: 55, 66, 77, 88, 99 **c)** Un: 77 **23.** **a)** 128 **b)** 450 **c)** 9 **d)** 675 **e)** 450 **f)** 450 **g)** 225 **h)** 75 **25.** **a)** 990 **b)** 500 **c)** 27 **27.** 3^{50}
29. 52 457 600 **31.** 20 077 200 **33.** **a)** 37 822 859 361 **b)** 8 204 716 800 **c)** 40 159 050, 880 **d)** 12 113 640 000 **e)** 171 004 205 215 **f)** 72 043 541 640 **g)** 6 230 721 635 **h)** 223 149 655 **35.** **a)** 0 **b)** 120 **c)** 720 **d)** 2520 **37.** **a)** 2 si $n = 1$, 2 si $n = 2$, 0 si $n \geq 3$ **b)** 2^{n-2} pour $n > 1$; 1 si $n = 1$ **c)** $2(n-1)$ **39.** $(n+1)^m$ **41.** Si n est pair, $2^{n/2}$; si n est impair, $2^{(n+1)/2}$ **43.** **a)** 175 **b)** 248 **c)** 232 **d)** 84
45. 60 **47.** **a)** 240 **b)** 480 **c)** 360 **49.** 352 **51.** 147
53. 33 **55.** **a)** 9, 920, 671, 339, 261, 325, 541, 376 $\approx 9.9 \times 10^{21}$ **b)** 6, 641, 514, 961, 387, 068, 437, 760 $\approx 6.6 \times 10^{21}$ **c)** environ 314, 000 années **57.** $54(64^{65536} - 1)/63$

59. 7 104 000 000 000 **61.** $16^{10} + 16^{26} + 16^{58}$ **63.** 666 , 667 **65.** 18 **67.** 17 **69.** 22 **71.** Soit $P(m)$ soit la règle de somme pour m tâches. Pour le cas de base, prendre $m = 2$. Ce n'est que la règle de somme pour deux tâches. Supposons maintenant que $P(m)$ soit vrai. Considérons $m + 1$ tâches, $T_1, T_2, \ldots, T_m, T_{m+1}$, qui peuvent être fait respectivement en $n_1, n_2, \ldots, n_m, n_{m+1}$ de telle sorte que aucune de ces tâches ne peut être effectuée en même temps. Pour en faire un de ces tâches, nous pouvons soit faire l'un des premiers m de ceux-ci ou faire la tâche T_{m+1}. Selon la règle de somme pour deux tâches, le nombre de façons de le faire est la somme du nombre de façons de faire l'un des les m premières tâches, plus n_{m+1}. Par l'hypothèse inductive, cette est $n_1 + n_2 + \cdots + n_m + n_{m+1}$, comme souhaité. **73.** $n(n - 3)/2$

Section 6.2

1. Comme il y a six classes, mais seulement cinq jours de semaine, le le principe du pigeonnier montre qu'au moins deux classes doivent être tenue le même jour. **3.** **a)** 3 **b)** 14 **5.** Parce qu'il y a quatre restes possibles lorsqu'un entier est divisé par 4, le principe du pigeonhole implique que, étant donné cinq entiers, à au moins deux ont le même reste. **7.** Soit $a, a + 1, \ldots, a + n - 1$ sont les entiers de la séquence. Les entiers $(a + i)$ **mod** n, $i = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$, sont distincts, car $0 < (a + j) - (a + k) < n$ chaque fois que $0 \le k < j \le n - 1$. Être-car il y a n valeurs possibles pour $(a + i)$ **mod** n et il sont n entiers différents dans l'ensemble, chacune de ces valeurs est prise exactement une fois. Il s'ensuit qu'il y a exactement un entier dans la séquence divisible par n. **9.** 4951 **11.** Le milieu point du segment joignant les points (a, b, c) et (d, e, f) est $((a + d)/2, (b + e)/2, (c + f)/2)$. Il a des coefficients entiers si et seulement si a et d ont la même parité, b et e ont la même parité, et c et f ont la même parité. Parce que là sont huit triplets de parité possibles [tels que (*pair* , *impair* , *pair*)], par le principe du pigeonnier au moins deux des neuf points ont le même triple de parités. Le milieu du segment jointure-deux de ces points ont des coefficients entiers. **13.** **a)** Groupe les huit premiers entiers positifs en quatre sous-ensembles de deux entiers gers chacun pour que les entiers de chaque sous-ensemble totalisent 9: {1 , 8}, {2 , 7}, {3 , 6} et {4 , 5}. Si cinq entiers sont sélectionnés dans le huit premiers entiers positifs, selon le principe du pigeonhole au moins deux d'entre eux proviennent du même sous-ensemble. Deux de ces entiers avoir une somme de 9, comme vous le souhaitez. **b)** Non. Prenez {1 , 2 , 3 , 4}, pour ple. **15.** 4 **17.** 21 251 **19.** **a)** S'il y avait moins de 9 étudiants de première année, moins de 9 étudiants de deuxième année et moins de 9 juniors dans la classe, il n'y aurait pas plus de 8 avec chacun de ces classement en trois classes, pour un total de 24 étudiants au maximum, traduisant le fait qu'il y a 25 étudiants dans la classe. **b)** Si il y avait moins de 3 étudiants de première année, moins de 19 étudiants de deuxième année, et moins de 5 juniors, il y aurait alors au plus 2 nouveaux hommes, au plus 18 étudiants de deuxième année et au plus 4 juniors, pour un total de 24 étudiants au maximum. Cela contredit le fait qu'il existe 25 élèves dans la classe. **21.** 4, 3, 2, 1, 8, 7, 6, 5, 12, 11, 10, 9, 16, 15, 14, 13 **23.** Numérotez les sièges autour de la table de 1 à 50, et pensez au siège 50 comme étant adjacent au siège 1. Il y a 25 sièges avec des nombres impairs et 25 sièges avec des nombres pairs Nombres. Si pas plus de 12 garçons occupaient le nombre impair sièges, alors au moins 13 garçons occuperaient le nombre pair sièges, et vice versa. Sans perte de généralité, supposons que au moins 13 garçons occupent les 25 sièges impairs. Puis à au moins deux de ces garçons doivent être en nombre impair consécutif sièges, et la personne assise entre eux aura des garçons comme ses deux voisins.

25. **procédure** *longue* ($a_1, \ldots, a_n$: entiers positifs)
{trouver d'abord la sous-séquence qui augmente le plus longtemps}
max : = 0; *set* : = 00 ... 00 { n bits}
pour i : = 1 **à** 2^n
  dernier : = 0; *nombre* : = 0, *OK* : = **vrai**
  pour j : = 1 **à** n
    si *set (j)* = 1 **alors**
      si a_j > *last* **then** *last* : = a_j
      count : = *count* + 1
    sinon *OK* : = **faux**
  si *count*> *max* **alors**
    max : = *count*
    meilleur : = *définir*
  set : = *set* + 1 (addition binaire)
{ *max* est la longueur et indique le *mieux* la séquence}
{répéter pour une sous-séquence décroissante avec seulement
  les changements étant *un* $_j$ <*dernier* au lieu d' *un* $_j$ > *dernier*
  et *dernier* : = ∞ au lieu de *dernier* : = 0}

27. Par symétrie, il suffit de prouver la première affirmation. Laisser A être l' une des personnes. Soit A a au moins quatre amis, soit A a au moins six ennemis parmi les neuf autres personnes (parce que $3 + 5 < 9$). Supposons, dans le premier cas, que B, C, D et E sont tous les amis de A. Si deux d'entre eux sont amis avec chacun autre, alors nous avons trouvé trois amis communs. Autrement { B, C, D, E } est un ensemble de quatre ennemis mutuels. Dans la seconde cas, soit { B, C, D, E, F, G } un ensemble d'ennemis de A. Par Exemple 11, parmi B, C, D, E, F et G, il y a soit trois amis communs ou trois ennemis communs, qui forment, avec A, un ensemble de quatre ennemis mutuels. **29.** Nous devons montrer deux choses: que si nous avons un groupe de n personnes, alors parmi elles nous devons trouver soit une paire d'amis ou un sous-ensemble de n d'entre eux qui sont tous des ennemis mutuels; et qu'il existe un groupe de $n - 1$ personnes pour lesquelles ce n'est pas possible. Pour le premier déclaration, s'il y a une paire d'amis, alors la condition est satisfait, et sinon, chaque paire de personnes est ennemie, donc la deuxième condition est remplie. Pour la deuxième déclaration, si nous avons un groupe de $n - 1$ personnes qui sont toutes des ennemis de les uns des autres, alors il n'y a ni paire d'amis ni sous-ensemble de n d'entre eux qui sont tous des ennemis mutuels. **31.** Là sont 6 432 816 possibilités pour les trois initiales et un anniversaire. Donc, selon le principe du pigeonnier généralisé, il y a au moins $\lceil 37,000,000/6,432,816 \rceil = 6$ personnes qui partagent le même initiales et anniversaire. **33.** Parce que $800,001 > 200,000$, la Le principe du pigeonnier garantit qu'il y a au moins deux Parisiens avec le même nombre de cheveux sur la tête. le Le principe généralisé des trous de pigeon garantit moins $\lceil 800,001/200,000 \rceil = 5$ Parisiens avec le même nombre de poils sur la tête. **35.** 18 **37.** Parce qu'il y a six ordinateurs, le nombre d'autres ordinateurs qu'un ordinateur est connecté à est un entier compris entre 0 et 5 inclus. Comment-jamais, 0 et 5 ne peuvent pas se produire tous les deux. Pour voir cela, notez que si certains l'ordinateur n'est connecté à aucun autre, aucun ordinateur n'est connecté aux cinq autres, et si un ordinateur est connecté aux cinq autres, aucun ordinateur n'est connecté à aucun autre. Par conséquent, par le principe du pigeonhole, car il y a au plus cinq possibilités pour le nombre d'ordinateurs qu'un ordinateur est connecté à, il y a au moins deux ordinateurs dans l'ensemble de six connecté au même nombre d'autres. **39.** Étiquetez la com- puters C_1 à travers C_{100}, et d' étiqueter les imprimantes P_1 par P_{20}. Si nous connectons C_k à P_k pour $k = 1, 2, ..., 20$ et connectons chacun des ordinateurs C_{21} à C_{100} à *toutes* les imprimantes, nous ont utilisé un total de $20 + 80 \cdot 20 = 1620$ câbles. C'est clairement suffisant, car si les ordinateurs C_1 à C_{20} ont besoin d'imprimantes, ils peuvent alors utiliser les imprimantes avec les mêmes indices, et si tous les ordinateurs avec des indices plus élevés ont besoin d'une imprimante au lieu de un ou plusieurs de ceux-ci, ils peuvent utiliser les imprimantes qui ne sont pas utilisé, car ils sont connectés à toutes les imprimantes. Maintenant il faut montrer que 1619 câbles ne suffisent pas. Parce que là 1619 câbles et 20 imprimantes, le nombre moyen d'ordinateurs puters par imprimante est $1619/20$, qui est inférieur à 81. Par conséquent, certaines imprimantes doivent être connectées à moins de 81 ordinateurs. Cela signifie qu'il est connecté à 80 ordinateurs ou moins, donc il sont 20 ordinateurs qui n'y sont pas connectés. Si ces 20 puters avaient tous besoin d'une imprimante simultanément, ils seraient pas de chance, car ils sont reliés au plus aux 19 autres imprimantes. **41.** Soit a_i le nombre de matchs terminés par heure i. Alors $1 \le a_1 < a_2 < \cdots < a_{75} \le 125$. Aussi $25 \le a_1 + 24 < a_2 + 24 < \cdots < a_{75} + 24 \le 149$. Il sont 150 nombres $a_1, ..., a_{75}, a_1 + 24, ..., a_{75} + 24$. Par le principe du trou de pigeon, au moins deux sont égaux. Parce que tous les a_i s sont distincts et tous les $(a_i + 24)$ s sont distincts, il s'ensuit que $a_i = a_j + 24$ pour certains $i > j$. Ainsi, au cours de la période du $(j + 1)$ st à la i ème heure, il y a exactement 24 correspondances. **43.** Utilisez le principe du pigeonnier généralisé en plaçant le $|S|$ objets $f(s)$ pour $s \in S$ dans $|T|$ boîtes, une pour chaque élément de T. **45.** Soit d_j soit $jx - N(jx)$, où $N(jx)$ est le nombre entier plus proche de jx pour $1 \le j \le n$. Chaque d_j est un nombre irrationnel ber entre $-1/2$ et $1/2$. Nous supposerons que n est pair; le cas où n est impair est plus compliqué. Considérez les n intervalles $\{x \mid j/n < x < (j+1)/n\}$, $\{x \mid -(j+1)/n < x < -j/n\}$ pour $j = 0, 1, \ldots, (n/2) - 1$. Si d_j appartient à l'intervalle $\{x \mid 0 < x < 1/n\}$ ou à l'intervalle $\{x \mid -1/n < x < 0\}$ pour certains j, nous avons terminé. Sinon, car il y a $n - 2$ tervalles et n nombres d_j, le principe du pigeonnier nous dit qu'il y a un intervalle $\{x \mid (k-1)/n < x < k/n\}$ con- contenant d_r et d_s avec $r < s$. La preuve peut être terminée par montrant que $(s - r)x$ est à $1/n$ près de son entier le plus proche. **47. a)** Supposons que $i_k \le n$ pour tout k. Puis par le généralisé principe du pigeonnier, au moins $\lceil (n^2 + 1)/n \rceil = n + 1$ de la les nombres $i_1, i_2, \ldots, i_{n^2+1}$ sont égaux. **b)** Si $a_{k_j} < a_{k_{j+1}}$, alors le sous-séquence consistant en a_{k_j} suivi de la sous-augmentation séquence de longueur $i_{k_{j+1}}$ à partir d' $a_{k_{j+1}}$ contredit le fait que $i_{k_j} = i_{k_{j+1}}$. Par conséquent, $a_{k_j} > a_{k_{j+1}}$. **c)** S'il n'y a pas d'augmentation sous-séquence de longueur supérieure à n, puis les parties (a) et (b) s'appliquent. On a donc $a_{k_{n+1}} > a_{k_n} > \cdots > a_{k_2} > a_{k_1}$, une séquence décroissante de longueur $n + 1$.

Section 6.3

1. $abc, acb, bac, bca, cab, cba$ **3.** 720 **5. a)** 120 **b)** 720 **c)** 8 **d)** 6720 **e)** 40320 **f)** 3 628 800 **7.** 15 120 **9.** 1320 **11. a)** 210 **b)** 386 **c)** 848 **d)** 252 **13.** $2(n!)^2$ **15.** 65 780 **17.** $2^{100} - 5051$ **19. a)** 1024 **b)** 45 **c)** 176 **d)** 252 **21. a)** 120 **b)** 24 **c)** 120 **d)** 24 **e)** 6 **f)** 0 **23.** 609, 638, 400 **25. a)** 94.109.400 **b)** 941.094 **c)** 3 764 376 **d)** 90 345 024 **e)** 114 072 **f)** 2328 **g)** 24 **h)** 79 727 040 **i)** 3 764 376 **j)** 109 440 **27. a)** 12 650 **b)** 303 600 **29. a)** 37 927 **b)** 18 915 **31. a)** 122 523 030 **b)** 72 930 375 **c)** 223 149 695 **d)** 100 626 625 **33.** 54 600 **35.** 45 **37.** 912 **39.** 11 232 000 **41.** $n!/(r(n-r)!)$ **43.** 13 **45.** 873

Section 6.4

1. $x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$ **3.** $x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$ **5.** 101 **7.** $-2^{10}\binom{19}{9} = -94,595,072$ **9.** $-2^{101}3^{99}\binom{200}{99}$ **11.** $(-1)^{(200-k)/3}\binom{100}{(200-k)/3}$ si $k \equiv 2 \pmod 3$ et $-100 \le k \le 200$; 0 sinon **13.** 1 9 36 84 126 126 84 36 9 1 **15.** La somme de *tous* les nombres positifs $\binom{n}{k}$, comme k va de 0 à n, est 2^n, donc chacun d'eux n'est pas grand- ger que cette somme. **17.** $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 2} \le \frac{n \cdot n \cdots n}{2 \cdot 2 \cdots 2} = n^k/2^{k-1}$ **19.** $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k+1)!} \cdot [k + (n-k+1)] = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}$ **21. a)** Nous montrons que chaque côté compte le nombre de façons choisir parmi un ensemble de n éléments un sous-ensemble de k élé- et un élément distingué de cet ensemble. Pour la gauche- côté main, choisissez d'abord le k- set (cela peut être fait en $\binom{n}{k}$ façons) puis choisissez l'un des k éléments de ce sous-ensemble pour être l'élément distingué (cela peut être fait de k façons). Pour le côté droit, choisissez d'abord l'élément distingué de l'ensemble n- set (cela peut être fait de n façons), puis choisir les $k - 1$ éléments restants du sous-ensemble dans le $n - 1$ éléments restants de l'ensemble (cela peut être fait en $\binom{n-1}{k-1}$ façons). **b)** $k\binom{n}{k} = k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\binom{n-1}{k-1}$ **23.** $\binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \frac{(n+1)}{k} \frac{n!}{(k-1)![n-(k-1)]!} = (n+1)\binom{n}{k-1}/k$. Cette identité avec $\binom{n}{0} = 1$ donne un récursif définition. **25.** $\binom{2n}{n+1} + \binom{2n}{n} = \binom{2n+1}{n+1} = \frac{1}{2}\left[\binom{2n+1}{n+1} + \binom{2n+1}{n+1}\right] = \frac{1}{2}\left[\binom{2n+1}{n+1} + \binom{2n+1}{n}\right] = \frac{1}{2}\binom{2n+2}{n+1}$ **27. a)** $\binom{n+r+1}{r}$ compte le nombre de façons de choisir une séquence de r 0 et $n + 1$ 1s en choisissant les positions des 0s. Alternativement, pose que le $(j + 1)$ st terme est le dernier terme égal à 1, de sorte que $n \le j \le n + r$. Une fois que nous avons déterminé où se trouve le dernier, nous décider où les 0 doivent être placés dans les espaces j avant la dernier 1. Il y a n 1 et $j - n$ 0 dans cette plage. Par la règle de somme il s'ensuit qu'il y a $\sum_{j=n}^{n+r}\binom{j}{j-n} = \sum_{k=0}^{r}\binom{n+k}{k}$ façons de faire cette. **b)** Soit $P(r)$ la déclaration à prouver. L'étape de base est l'équation $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$, qui est juste $1 = 1$. Supposons que $P(r)$ est vrai. alors $\sum_{k=0}^{r+1}\binom{n+k}{k} = \sum_{k=0}^{r}\binom{n+k}{k} + \binom{n+r+1}{r+1} = \binom{n+r+1}{r} + \binom{n+r+1}{r+1} = \binom{n+r+2}{r+1}$, en utilisant l'hypothèse inductive et l'identité de Pascal. **29.** Nous pouvons d'abord choisir le leader n différentes manières. On peut alors choisir le reste de l'engagement tee en 2^{n-1} façons. Il y a donc $n2^{n-1}$ façons de choisir comité et son chef. Pendant ce temps, le nombre de façons de sélectionner un comité avec k personnes est $\binom{n}{k}$. Une fois que nous avons choisi sen un comité avec k personnes, il y a k façons de choisir son leader. Il existe donc $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$ façons de choisir comité et son chef. Par conséquent, $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

31. Laissez l'ensemble avoir n éléments. Du Corollaire 2, nous avons $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$. Il s'ensuit que $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots$. Le côté gauche donne le nombre de sous-ensembles avec un nombre pair d'éléments, et le côté droit donne le nombre de sous-ensembles avec un nombre impair d'éléments. **33. a)** Un chemin du type souhaité se compose de m se déplace vers la droite et n se déplace vers le haut. Chacun de ces le chemin peut être représenté par une chaîne de bits de longueur $m + n$ avec m 0s et n 1s, où un 0 représente un déplacement vers la droite et un 1 un mouvement vers le haut. **b)** Le nombre de chaînes de bits de longueur $m + n$ contenant exactement n 1s est égal à $\binom{m+n}{n} = \binom{m+n}{m}$ parce qu'un tel la chaîne est déterminée en spécifiant les positions des n 1 ou en spécifiant les positions des m 0s. **35.** Par l'exercice 33 le nombre de trajets de longueur n du type décrit en ce que l'exercice est égal à 2^n, le nombre de chaînes de bits de longueur n. Sur le d'autre part, un chemin de longueur n du type décrit dans l'exercice 33 doit se terminer en un point dont n est la somme de ses coordonnées, disons $(n - k, k)$ pour certains k entre 0 et n, inclus. Par Exercise 33, le nombre de ces chemins se terminant à $(n - k, k)$ est égal à $\binom{n-k+k}{k} = \binom{n}{k}$. Par conséquent, $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$. **37.** Par l'exercice 33 le nombre de chemins de $(0, 0)$ à $(n+1, r)$ de type décrit dans cet exercice est égal à $\binom{n+r+1}{r}$. Mais un tel chemin commence en faisant j pas verticalement pour certains j avec $0 \le j \le r$. le nombre de ces chemins commençant par j étapes verticales est égal à le nombre de chemins du type décrit dans l'exercice 33 qui passer de $(1, j)$ à $(n+1, r)$. C'est le même que le nombre de ces chemins qui vont de $(0, 0)$ à $(n, r - j)$, qui par l'exercice 33 égal $\binom{n+r-j}{r-j}$. Car $\sum_{j=0}^{r}\binom{n+r-j}{r-j} = \sum_{k=0}^{r}\binom{n+k}{k}$, il s'ensuit que $\sum_{k=0}^{r}\binom{n+k}{k} = \binom{n+r+1}{r}$. **39. a)** $\binom{n+1}{2}$ **b)** $\binom{n+2}{3}$ **c)** $\binom{2n-2}{n-1}$ **ré)** $\binom{n-1}{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}$ **e) La** plus grande entrée impaire dans la n e rangée de Triangle de Pascal **f)** $\binom{3n-3}{n-1}$

Section 6.5

1. 243 **3.** 26^6 **5.** 125 **7.** 35 **9. a)** 1716 **b)** 50 , 388 **c)** 2 , 629 , 575 **d)** 330 **11.** 9 **13.** 4 , 504 , 501 **15. a)** 10 , 626 **b)** 1 , 365 **c)** 11 , 649 **d)** 106 **17.** 2 , 520 **19.** 302 , 702 , 400 **21.** 3003 **23.** 7 , 484 , 400 **25.** 30 , 492 **27.** $C(59, 50)$ **29.** 35 **31.** 83 , 160 **33.** 63 **35.** 19 , 635 **37.** 210 **39.** 27 , 720 **41.** $52!/(7!^5 17!)$ **43.** Environ 6.5×10^{32} **45. a)** $C(k+n-1, n)$ **b)** $(k+n-1)!/(k-1)!$ **47.** Là sont $C(n, n_1)$ façons de choisir n_1 objets pour la première case. Une fois ces objets choisis, il y a $C(n - n_1, n_2)$ façons de choisir des objets pour la deuxième boîte. De même, il y a $C(n - n_1 - n_2, n_3)$ façons de choisir les objets pour la troisième case. Continuez ainsi jusqu'à ce qu'il y ait $C(n - n_1 - n_2 - \cdots - n_{k-1}, n_k) = C(n_k, n_k) =$ 1 façon de choisir les objets pour la dernière case (car $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$). Par la règle du produit, le nombre des façons de faire l'assignation entière est $C(n, n_1)\, C(n - n_1, n_2)\, C(n - n_1 - n_2, n_3) \cdots C(n - n_1 - n_2 - \cdots - n_{k-1}, n_k)$, ce qui équivaut à $n!/(n_1!\, n_2! \cdots n_k!)$, comme simple montre la simplification. **49. a)** Parce que $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_r$, il s'ensuit que $x_1 + 0 < x_2 + 1 < \cdots < x_r + r - 1$. Les inégalités sont strictes car $x_j + j - 1 < x_{j+1} + j$ tant que $x_j \le x_{j+1}$. Parce que $1 \le x_j \le n + r - 1$, ce séquence est constituée de r éléments distincts de T. **b)** Supposons que $1 \le x_1 < x_2 < \cdots < x_r \le n + r - 1$. Soit $y_k = x_k - (k - 1)$. Il n'est alors pas difficile de voir que $y_k \le y_{k+1}$ pour $k = 1, 2, ..., r - 1$ et que $1 \le y_k \le n$ pour $k = 1, 2, ... r$. Il s'ensuit que $\{y_1, y_2, ..., y_r\}$ est une combinaison r avec repetitions a permis de S. **c)** Il découle des parties a) et b) qu'il existe une correspondance biunivoque de combinaisons r avec des répétitions autorisées de combinaisons S et r de T, un sertie de $n + r - 1$ éléments. Nous concluons qu'il existe Combinaisons $C(n + r - 1, r)$ r avec répétitions autorisées de S. **51.** 65 **53.** 65 **55.** 2 **57.** 3 **59. a)** 150 **b)** 25 **c)** 6 **d)** 2 **61.** 90 720 6 **63.** Les termes de l'expansion sont de la forme $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_m^{n_m}$, où $n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$. Un tel terme découle du choix des facteurs x_1 dans n_1, le x_2 dans n_2 facteurs , ..., et les x_m dans n_m facteurs. Cela peut être fait de $C(n; n_1, n_2, ..., n_m)$, car un choix est un permutation de n_1 étiquettes «1», n_2 étiquettes «2», ... et n_m étiquettes « M ». **65.** 2520

Section 6.6

1. 14532, 15432, 21345, 23451, 23514, 31452, 31542, 43521, 45213, 45321 **3.** AAA1, AAA2, AAB1, AAB2, AAC1, AAC2, ABA1, ABA2, ABB1, ABB2, ABC1, ABC2, ACA1, ACA2, ACB1, ACB2, ACC1, ACC2, BAA1, BAA2, BAB1, BAB2, BAC1, BAC2, BBA1, BBA2, BBB1, BBB2, BBC1, BBC2, BCA1, BCA2, BCB1, BCB2, BCC1, BCC2, CAA1, CAA2, CAB1, CAB2, CAC1, CAC2, CBA1, CBA2, CBB1, CBB2, CBC1, CBC2, CCA1, CCA2, CCB1, CCB2, CCC1, CCC2 **5. a)** 2134 **b)** 54132 **c)** 12534 **d)** 45312 **)** 7.1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432, 2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431, 3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421, 4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321 **9.** $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{1, 3, 5\}$, $\{1, 4, 5\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{2, 3, 5\}$, $\{2, 4, 5\}$, $\{3, 4, 5\}$ **11.** La chaîne de bits représentant la prochaine plus grande combinaison r doit différer de la chaîne de bits représentant l'original en position i parce que les positions $i + 1, ..., r$ sont occupés par le plus grand nombre possible. Aussi un $i + 1$ est le plus petit nombre possible que nous pouvons mettre position i si nous voulons une combinaison supérieure à l'original un. Alors $a_i + 2, ..., a_i + r - i + 1$ sont les plus petits admissibles numéros pour les positions $i + 1$ à r. Ainsi, nous avons produit la prochaine combinaison r. **13.** 123, 132, 213, 231, 312, 321, 124, 142, 214, 241, 412, 421, 125, 152, 215, 251, 512, 521, 134, 143, 314, 341, 413, 431, 135, 153, 315, 351, 513, 531, 145, 154, 415, 451, 514, 541, 234, 243, 324, 342, 423, 432, 235, 253, 325, 352, 523, 532, 245, 254, 425, 452, 524, 542, 345, 354, 435, 453, 534, 543 **15.** Nous montrerons qu'il s'agit d'un bijection en montrant qu'elle a un inverse. Étant donné un résultat positif entier inférieur à n !, soit $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ ses chiffres de Cantor. Mettez n en position $n - a_{n-1}$; alors clairement, un_{n-1} est le nombre d'entiers inférieurs à n qui suivent n dans la permutation. alors mettre n - 1 en position libre $(n - 1) - a_{n-2}$, où nous avons numéroté les positions libres 1 , 2 , ..., n - 1 (hors position dans laquelle n est déjà). Continuez jusqu'à ce que 1 soit placé dans la seule position libre à gauche. Parce que nous avons construit un inverse, la correspondance est une bijection.

17. **procédure** *Permutation de Cantor* (n , i : entiers avec $n \geq 1$ et $0 \leq i < n$!)

```
x := n
pour j := 1 à n
  p_j := 0
pour k := 1 à n - 1
  c := ⌊ x / (n - k) ! ⌋; x := x - c (n - k) !; h := n
  tandis que p_h = 0
    h := h - 1
  pour j := 1 à c
    h := h - 1
    tandis que p_h = 0
      h := h - 1
  p_h := n - k + 1
h := 1
tandis que p_h = 0
  h := h + 1
p_h := 1
{ p_1 p_2 ... p_n est la permutation correspondante
    à i }
```

Exercices supplémentaires

1. **a)** 151 200 **b)** 1 000 000 **c)** 210 **d)** 5005 **3.** 3^{100} **5.** 24 600 **7.** **a)** 4060 **b)** 2688 **c)** **25** 009 600 **9.** **a)** 192 **b)** 301 **c)** 300 **d)** 300 **11.** 639 **13.** La position maximale la somme possible est de 240, et la somme minimale possible est de 15. Donc le nombre de sommes possibles est de 226. Parce qu'il y en a 252 sous-ensembles à cinq éléments d'un ensemble à 10 éléments, par le principe du pigeonnier, il s'ensuit qu'au moins deux ont la même somme. **15.** **a)** 50 **b)** 50 **c)** 14 **d)** 17 **17.** Soit a_1, $a_2, \ldots, a_m$ les entiers, et soit $d_i = \sum_{j=1}^{i} a_j$. Si $d_i \equiv 0 \pmod{m}$ pour certains i , nous avons terminé. Sinon $d_1 \mathbf{mod}\ m$, $d_2 \mathbf{mod}\ m, \ldots, d_m \mathbf{mod}\ m$ sont m entiers avec des valeurs en $\{1, 2, \ldots, m - 1\}$. Par le principe du pigeonnier $d_k = d_l$ pour quelque $1 \leq k < l \leq m$. alors $\sum_{j=k+1}^{l} a_j = d_l - d_k \equiv 0 \pmod{m}$. **19.** L'expansion décimale du nombre rationnel ber a / b peut être obtenu par division de b en a , où a est écrit avec un point décimal et une chaîne arbitrairement longue de 0 le suivre. L'étape de base consiste à trouver le chiffre suivant du patient, à savoir, $\lfloor r / b \rfloor$, où r est le reste avec le prochain chiffre du dividende abaissé. Le reste actuel est b restes possibles. Ainsi, à un moment donné, par le pigeonnier principe du trou, nous aurons la même situation que surgi. À partir de ce moment, le calcul doit suivez le même schéma. En particulier, le quotient tourbe. **21.** **a)** 125,970 **b)** 20 **c)** 141,120,525 **d)** 141,120,505 **e)** 177 100 **f)** 141 078 021 **23.** **a)** 10 **b)** 8 **c)** 7 **25.** 3^n

27. $C(n + 2, r + 1) = C(n + 1, r + 1) + C(n + 1, r) =$
$2C(n + 1, r + 1) - C(n + 1, r + 1) + C(n + 1, r) =$
$2C(n + 1, r + 1) - (C(n, r + 1) + C(n, r)) + (C(n, r) +$
$C(n, r - 1)) = 2C(n + 1, r + 1) - C(n, r + 1) + C(n, r - 1)$

29. Remplacez $x = 1$ et $y = 3$ dans le théorème binomial.

31. Les deux parties comptent le nombre de façons de choisir un sous-ensemble de trois nombres distincts $\{i, j, k\}$ avec $i < j < k$ de $\{1, 2, \ldots, n\}$. **33.** $C(n + 1, 5)$ **35.** **3** 491 888 400 **37.** 5^{24}

39. **a)** 45 **b)** 57 **c)** 12 **41.** **a)** 386 **b)** 56 **43.** 0 si $n < m$; $C(n - 1, n - m)$ si $n \geq m$ **45.** **a)** 15 , 625 **b)** 202 **c)** 210 **d)** 10 **47.** **a)** 3 **b)** 11 **c)** 6 **d)** 10 **49.** Il y a deux pos- responsabilités: trois personnes assises à une table avec tout le monde assis seul, ce qui peut être fait de 2 manières $C(n, 3)$ (choisissez le trois personnes et les asseoir dans l'un des deux arrangements), ou deux des groupes de deux personnes assises ensemble avec tout le monde assis seul, ce qui peut être fait de 3 manières $C(n, 4)$ (choisissez quatre les gens, puis choisissez l'une des trois façons de les jumeler vers le haut). Les deux $2C(n, 3) + 3C(n, 4)$ et $(3n - 1)C(n, 3) / 4$ sont égaux $n^4/8$ - cinq $n^3/12 + 3n^{\text{deux}}/8 - n/12$. **51.** Le nombre de per- mutations de $2n$ objets de n types différents, deux de chaque type, est $(2n)! / 2^n$ Parce que cela doit être un entier, le dénominateur doit diviser le numérateur. **53.** CCGGUCCGAAAG

55. **procédure** *permutation suivante* (n : entier positif, $a_1, a_2, \ldots, a_r$: entiers positifs n'excédant pas n avec $a_1 a_2 \ldots a_r = nn \ldots n$)

```
i := r
tandis que a_i = n
  a_i := 1
  i := i - 1
a_i := a_i + 1
{ a_1 a_2 ... a_r est la prochaine permutation en lexicographique
  commande}
```

57. Il faut montrer que s'il y a $R(m, n - 1) + R(m - 1, n)$ les gens lors d'une fête, alors il doit y avoir au moins m amis mutuels ou n ennemis mutuels. Considérez une personne; appelons-le Jerry. Ensuite, il y a $R(m - 1, n) + R(m, n - 1) - 1$ autres personnes à le parti, et selon le principe du pigeonnier, il doit y avoir au moins $R(m - 1, n)$ amis de Jerry ou $R(m, n - 1)$ ennemis de Jerry parmi ces gens. Supposons d'abord qu'il existe $R(m - 1, n)$ amis de Jerry. Par la définition de R , parmi ces personnes nous avons la garantie de trouver m - 1 amis communs ou n ennemis mutuels. Dans le premier cas, ces $m - 1$ amis mutuels ensemble avec Jerry sont un ensemble de m amis communs; et dans le Dans ce dernier cas, nous avons l'ensemble souhaité de n ennemis mutuels. le autre situation est analogue: Supposons qu'il y ait $R(m, n - 1)$ ène mmes de Jerry; on est assuré de trouver parmi eux soit m amis mutuels ou n - 1 ennemis mutuels. Dans le cas précédent, obtenu à partir du reste précédent en soustrayant b fois le chiffre précédent du quotient. Finalement, le dividende a rien que des 0 à faire tomber. De plus, il n'y a que

nous avons l'ensemble souhaité de m amis mutuels, et dans ce dernier cas, ces $n - 1$ ennemis mutuels avec Jerry sont un ensemble de n ennemis mutuels.

Page 46

CHAPITRE 7

Section 7.1

1. 1 / treize **3.** 1 / 2 **5.** 1 / 2 **7.** 1 / 64 **9.** 47 / 52 **11.** $1 / C(52, 5)$ **13.** $1 - [C(48, 5) / C(52, 5)]$ **15.** $C(13, 2)\, C(4, 2)\, C(4, 2)\, C(44, 1) / C(52, 5)$ **17.** $10, 240 / C(52, 5)$ **19.** $1, 302, 540 / C(52, 5)$ **21.** 1 / 64 **23.** huit / 25 **25. a)** $1 / C(50, 6) = 1 / 15, 890, 700$ **b)** $1 / C(52, 6) =$ Une / 20 , 358 , 520 **c)** $1 / C(56, 6) = 1 / 32, 468, 436$ **d)** $1 / C(60, 6) = 1 / 50, 063, 860$ **27. a)** 139 , 128 / 319 , 865 **b)** 212 , 667 / 511 , 313 **c)** 151 , 340 / 386 , 529 **d)** 163 , 647 / 446 , 276 **29.** $1 / C(100, 8)$ **31.** trois / 100 **33. a)** 1 / 7 , 880 , 400 **b)** une / huit , 000 , 000 **35. a)** 9 / dix-neuf **b)** 81 / 361 **c)** 1 / 19 **d)** 1 , 889 , 568 / deux , 476 , 099 **e)** 48 / 361 **37.** Trois dés **39.** La porte du concurrent choisit est choisi au hasard sans savoir où le le prix est, mais la porte choisie par l'hôte n'est pas choisie au au hasard, car il évite toujours d'ouvrir la porte avec le prix. Cela rend invalide tout argument basé sur la symétrie. **41. a)** 671 / 1 296 **b)** 1 à $35^{24} / 36^{24}$; non **c)** L'ancien

Section 7.2

1. $p(T) = 1 / 4$, $p(H) = 3 / 4$ **3.** $p(1) = p(3) = p(5) = p(6) = 1 / 16$; $p(2) = p(4) = 3 / 8$ **5.** 9 / 49 **7. a)** une / 2 **b)** 1 / 2 **c)** 1 / 3 **d)** 1 / 4 **e)** 1 / 4 **9. a)** 1 / 26! **b)** 1 / 26 **c)** 1 / 2 **d)** une / 26 **e)** une / 650 **f)** une / quinze , 600 **11.** Il est clair que $p(E \cup F) \geq p(E) = 0.7$. Aussi, $p(E \cup F) \leq 1$. Si nous appliquons le théorème 2 à partir de la section 7.1, nous pouvons réécrire ceci comme $p(E) + p(F) - p(E \cap F) \leq 1$ ou $0.7 + 0.5 - p(E \cap F) \leq 1$. Solv- pour $p(E \cap F)$ donne $p(E \cap F) \geq 0.2$. **13.** Parce que $p(E \cup F) = p(E) + p(F) - p(E \cap F)$ et $p(E \cup F) \leq 1$, il s'ensuit que $1 \geq p(E) + p(F) - p(E \cap F)$. De cela l'inégalité nous concluons que $p(E) + p(F) \leq 1 + p(E \cap F)$. **15.** Nous utiliserons l'induction mathématique pour prouver que l'in- l'égalité vaut pour $n \geq 2$. Soit $P(n)$ la déclaration que $p(\bigcup_{j=1}^{n} E_j) \leq \sum_{j=1}^{n} p(E_j)$. *Étape de base:* $P(2)$ est vrai cause $p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2) \leq p(E_1) + p(E_2)$. *Étape inductive:* Supposons que $P(k)$ soit vrai. Nous- Dans le cas de base et l'hypothèse inductive, il s'ensuit que $p(\bigcup_{j=1}^{k+1} E_j) \leq p(\bigcup_{j=1}^{k} E_j) + p(E_{k+1}) \leq \sum_{j=1}^{k+1} p(E_j)$.

0 . 02825 **c)** 0,03795012 **33. a)** cinq / huit **b)** 0,627649 **c)** 0,6431 **35. a)** p^n **b)** $1 - p^n$ **c)** $p^n + n \cdot p^{n-1} \cdot (1 - p)$ **d)** $1 - [p^n + n \cdot p^{n-1} \cdot (1 - p)]$ **37.** $p(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)$ est la somme de $p(s)$ pour chaque résultat s dans $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. Car les E_i sont disjoints deux à deux, c'est la somme des probabilités capacités de tous les résultats dans l'un des E_i s, ce qui est ce $\sum_{i=1}^{\infty} p(E_i)$ est. (Nous pouvons réorganiser les sommets et toujours obtenir la même réponse car cette série converge absolument.) **39. a)** $E = \bigcup_{j=1}^{\binom{m}{k}} F_j$, donc l'inégalité donnée suit maintenant de l'inégalité de Boole (exercice 15). **b)** La probabilité que un joueur particulier qui ne fait pas partie du j e bat tous les k joueurs dans la j ième ensemble est $(\text{une} / 2)^k = 2^{-k}$. Par conséquent, la probabilité que ce joueur ne le fait pas est $1 - 2^{-k}$, donc la probabilité que tous les $m - k$ des joueurs qui ne sont pas dans le j ème ensemble sont incapables de vanter un record parfait contre tout le monde dans le j ème ensemble est $(1 - 2^{-k})^{m-k}$. C'est précisément $p(F_j)$. **c)** La première inégalité suit immédiatement, car tous les sommets sont les mêmes et il y a $\binom{m}{k}$ d'eux. Si cette probabilité est inférieure à 1, alors il doit être possible que E échoue, c'est-à-dire que E se produise. Donc il y a un tournoi qui remplit les conditions du problème tant que la deuxième inégalité se maintient. **d)** $m \geq 21$ pour $k = 2$, et $m \geq 91$ pour $k = 3$

41. procédure *probabiliste prime (n, k)*

composite : = **faux**
i : = 0

tandis que *composite* = **false** et *i* <*k*
  i : = *i* + 1

  choisir *b* uniformément au hasard avec 1 <*b* <*n*

  appliquer le test de Miller à la base *b*

  si *n* échoue au test, **alors** *composite* : = **true**

si *composite* = **true alors** print («composite»)

sinon imprimer («probablement premier»)

Section 7.3

REMARQUE: Dans les réponses de la section 7.3, toutes les probabilités les liens donnés sous forme décimale sont arrondis à trois décimales des endroits. **1.** trois / 5 **3.** trois / quatre **5.** 0 . 481 **7. a)** 0 . 999 **b)** 0 . 324 **9. a)** 0 . 740 **b)** 0 . 260 **c)** 0 . 002 **d)** 0 . 998 **11.** 0 . 724 **13.** trois / 17 **15. a)** 1 / trois **b)** $p(M = j \mid W = k) = 1$ si i , j et k sont distincts; $p(M = j \mid W = k) = 0$

Cela montre que $P(k+1)$ est vrai, complétant la démonstration par induction ématique. **17.** Parce que $E \cup \bar{E}$ est l'échantillon entier l'espace S, l'événement F peut être divisé en deux événements disjoints: $F = S \cap F = (E \cup \bar{E}) \cap F = (E \cap F) \cup (\bar{E} \cap F)$, en utilisant le droit distributif. Par conséquent, $p(F) = p((E \cap F) \cup (\bar{E} \cap F)) = p(E \cap F) + p(\bar{E} \cap F)$, car ces deux événements sont dis-mixte. Soustraire $p(E \cap F)$ des deux côtés, en utilisant le fait que $p(E \cap F) = p(E) \cdot p(F)$ (l'hypothèse que E et F sont indépendants), et en factorisant, nous avons $p(F)[1 - p(E)] = p(\bar{E} \cap F)$. Parce que $1 - p(E) = p(\bar{E})$, cela dit que $p(\bar{E} \cap F) = p(\bar{E}) \cdot p(F)$, comme souhaité. **19.** **a)** une / douze **b)** $1 - \frac{11}{12} \cdot \frac{10}{12} \cdots \frac{13-n}{12}$ **c)** 5 **21** 614 **23.** 1 / quatre **25.** 3 / huit **27.** **a)** Non indépendant **b)** Non indépendant **c)** Non indépendant pendants **29.** trois / seize **31.** **a)** $1/32 = 0.03125$ **b)** $0.49^5 \approx$

si $j = k$ ou $j = i$; $p(M = j \mid W = k) = 1/$deux si $i = k$ et $j = i$ **c)** deux / trois **d)** Vous devez changer portes, parce que vous avez maintenant un 2 / la chance de gagner 3 par SWITCH-ing. **17.** La définition de la probabilité conditionnelle nous dit que $p(F_j \mid E) = p(E \cap F_j) / p(E)$. Pour le numérateur, en utilisant à nouveau la définition de la probabilité conditionnelle, nous avons $p(E \cap F_j) = p(E \mid F_j)\, p(F_j)$, comme souhaité. Pour la dénomination tor, on montre que $p(E) = \sum_{i=1}^{n} p(E \mid F_i)\, p(F_i)$. Les événements $E \cap F_i$ partitionne l'événement E ; c'est-à-dire que $(E \cap F_{i_1}) \cap (E \cap F_{i_2}) = \varnothing$ lorsque $i_1 \neq i_2$ (car les F_i sont mutuellement exclusifs), et $\bigcup_{i=1}^{n} (E \cap F_i) = E$ (car le $\bigcup_{i=1}^{n} F_i = S$). Donc, $p(E) = \sum_{i=1}^{n} p(E \cap F_i) = \sum_{i=1}^{n} p(E \mid F_i)\, p(F_i)$. **19.** Non **21.** Oui **23.** Par le théorème de Bayes, $p(S \mid E_1 \cap E_2) = p(E_1 \cap E_2 \mid S)\, p(S) / [\, p(E_1 \cap E_2 \mid S)\, p(S) + p(E_1 \cap E_2 \mid \bar{S})\, p(\bar{S})\,]$.

Page 47

Parce que nous ne supposons aucune connaissance préalable un message est ou n'est pas du spam, nous fixons $p(S) = p(\bar{S}) = 0.5$, et donc l'équation ci-dessus se simplifie en $p(S \mid E_1 \cap E_2) = p(E_1 \cap E_2 \mid S) / [\, p(E_1 \cap E_2 \mid S) + p(E_1 \cap E_2 \mid \bar{S})\,]$.

En raison de l'indépendance supposée de E_1, E_2 et S, nous ont $p(E_1 \cap E_2 \mid S) = p(E_1 \mid S) \cdot p(E_2 \mid S)$, et de même pour $\bar{S}$.

Section 7.4

1. 2.5 **3.** 5 / 3 **5.** 336 / 49 **7.** 170 **9.** $(4n + 6)/3$ **11.** 50, 700, 551 / 10, 077, 696 ≈ 5.03 **13.** 6 **15.** $p(X \geq j) = \sum_{k=j}^{\infty} p(X = k) = \sum_{k=j}^{\infty} (1-p)^{k-1} p = p(1-p)^{j-1} \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k = p(1-p)^{j-1} / (1-(1-p)) = (1-p)^{j-1}$ **17.** 2302 **19.** $(7/2) \cdot 7 = 329/12$ **21.** 10 **23.** 1472 livres **25.** $p + (n-1)p(1-p)$ **27.** cinq / deux **29.** **a)** 0 **b)** n **31.** Ce n'est pas vrai. Par exemple, que X soit le nombre de têtes en un seul coup de coin, et que Y soit le nombre de têtes dans un flip d'une deuxième pièce de monnaie équitable. alors $A(X) + A(Y) = 1$ mais $A(X + Y) = 0.5$. **33.** **a)** Nous on dit que X_1 et X_2 sont indépendants. Pour voir que X_1 et X_3 sont indépendants, nous énumérons les huit possibilités bilités pour (X_1, X_2, X_3) et constater que $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$ ont chacun une probabilité de 1 / 4 et les autres ont une probabilité de 0 (en raison de la définition de X_3). Donc, $p(X_1 = 0 \wedge X_3 = 0) = 1/4$, $p(X_1 = 0) = 1/2$, et $p(X_3 = 0) = 1/2$, de sorte qu'il est vrai que $p(X_1 = 0 \wedge X_3 = 0) = p(X_1 = 0)\, p(X_3 = 0)$. Essentiellement le même calcul montre que $p(X_1 = 0 \wedge X_3 = 1) = p(X_1 = 0)\, p(X_3 = 1)$, $p(X_1 = 1 \wedge X_3 = 0) = p(X_1 = 1)\, p(X_3 = 0)$, et $p(X_1 = 1 \wedge X_3 = 1) = p(X_1 = 1)\, p(X_3 = 1)$. Là-

d) Parce que $X(P) \geq I(P)$ pour tout P, il résulte de la définition de l'attente que $E(X) \geq E(I)$. **e)** Cette somme L'information compte 1 pour chaque instance d'une inversion. **f)** Cette découle du théorème 3. **g)** Par le théorème 2 avec $n = 1$, le attente de $I_{j,k}$ est la probabilité d' *une* $_k$ précède *un* $_j$ dans la permutation. Ceci est clairement 1 / 2 de symétrie. **h)** Le la somme dans la partie (f) consiste en $C(n, 2) = n(n-1)/2$ termes, chacune égale à 1 / 2, de sorte que la somme est $n(n-1)/4$ **i)** de la partie (a) et la partie (b) nous savons que $E(X)$, l'objet d'intérêt, est au plus $n(n-1)/2$, et de la partie (d) et de la partie (h) nous savons que $E(X)$ est au moins $n(n-1)/4$, les deux étant (n^2). **43.** 1 **45.** $V(X + Y) = E((X + Y)^2) - E(X + Y)^2 = E(X^2 + 2XY + Y^2) - [\,E(X) + E(Y)\,]^2 = E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - E(X)^2 - 2E(X)E(Y) - E(Y)^2 = E(X^2) - E(X)^2 + 2[\,E(XY) - E(X)E(Y)\,] + E(Y^2) - E(Y)^2 = V(X) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y) + V(Y)$ **47.** $[(n-1)/n]^m$ **49.** $(n-1)^m / n^{m-1}$

Exercices supplémentaires

1. 1 / 109, 668 **3.** **a)** 1 / 195, 249, 054 **b)** une / 5, 138, 133 **c)** 45 / 357, 599 **d)** 18, 285 / 18, 821 **5.** **a)** $1/C(52, 13)$ **b)** $4/C(52, 13)$ **c)** $2,944,656 / C(52, 13)$ **d)** $35,335,872 / C(52, 13)$ **7.** **a)** 9 / deux **b)** vingt-et-un / quatre **9.** **a)** 9 **b)** vingt-et-un / deux **11.** **a)** 8 **b)** 49 / six **13.** **a)** $n/2^{n-1}$ **b)** $p(1-p)^{k-1}$, où $p = n/2^{n-1}$ **c)** $2^{n-1}/n$ **15.** $\frac{(m-1)(n-1) + \operatorname{pgcd}(m, n) - 1}{mn - 1}$ **17.** **a)** 2 / trois **b)** 2 / trois **19.** 1 / 32 **21** **a)** La probabilité que l' on gagne 2^n dollars est égal à 1 / deux^n, car cela se produit précisément lorsque le joueur obtient $n-1$ queues suivies d'une tête. La valeur attendue du gain est donc la somme de 2^n FOIS 1 / deux^n comme n va de 1 à donc par définition, X_1 et X_3 sont indépendants. Le même le raisonnement montre que X_2 et X_3 sont indépendants. À voir que X_3 et $X_1 + X_2$ ne sont pas indépendants, on observe que $p(X_3 = 1 \wedge X_1 + X_2 = 2) = 0$. Mais $p(X_3 = 1)\, p(X_1 + X_2 = 2) = (1/2)(1/\text{quatre}) = 1/8$ **b)** On voit par le calcul en partie (a) que X_1, X_2 et X_3 sont tous des variances aléatoires de Bernoulli. ables, de sorte que la variance de chacun d' eux est $(1/\text{deux})(1/\text{deux}) = 1/4$. Par conséquent, $V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) = 3/4$. Nous utilisons les calculs dans la partie (a) de voir que $E(X_1 + X_2 + X_3) = 3/2$, puis $V(X_1 + X_2 + X_3) = 3/4$. **c)** Pour utiliser la première partie de Théorème 7 pour montrer que $V((X_1 + X_2 + \cdots + X_k) + X_{k+1}) = V(X_1 + X_2 + \cdots + X_k) + V(X_{k+1})$ dans le pas inductif de une preuve par induction mathématique, il faudrait savoir que $X_1 + X_2 + \cdots + X_k$ et X_{k+1} sont indépendants, mais nous voir de la partie (a) que ce n'est pas nécessairement vrai. **35.** $1/100$ **37.** $E(X)/a = \sum_r (r/a) \cdot p(X = r) \geq \sum_{r \geq a} 1 \cdot p(X = r) = p(X \geq a)$ **39. a)** dix / onze **b)** 0,9999 **41. a)** Chaque n ! permutations se produit avec la probabilité $1/n$!, donc $E(X)$ est le nombre de comparaisons, en moyenne sur toutes ces permutations. **b)** Même si l'algorithme continue $n - 1$ tours, X sera au plus $n(n-1)/2$. Il résulte de la formule de prévision que $E(X) \leq n(n-1)/2$. **c)** L'algorithme procède en comparant les éléments adjacents puis en les échangeant si nécessaire. Ainsi, la seule façon dont les éléments inversés peuvent devenir inversé est pour eux d'être comparés et échangés.

infini. Parce que chacun de ces termes est 1, la somme est infinie. En d'autres termes, il faut être prêt à miser n'importe quel montant de l'argent et s'attendre à sortir en tête à long terme. **b)** 9 $, 9 $

23. a) $1/3$ lorsque $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ et $B = \{1, 2, 3, 4\}$; $1/12$ lorsque $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ et $B = \{1, 2, 3, 4\}$ **b)** 1 lorsque $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ et $B = \{1, 2, 3, 4\}$; $3/4$ où $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ et $B = \{1, 2, 3, 4\}$

25. a) $p(E_1 \cap E_2) = p(E_1)\, p(E_2)$, $p(E_1 \cap E_3) = p(E_1)\, p(E_3)$, $p(E_2 \cap E_3) = p(E_2)\, p(E_3)$, $p(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = p(E_1)\, p(E_2)\, p(E_3)$ **b)** Oui **c)** Oui; oui **d)** Oui; non **e)** $2^n - n - 1$

27. a) une / 2 dans la première interprétation; $1/3$ dans des secondes interprétation **b)** Soit M soit l'événement que les deux de M. Smith les enfants sont des garçons et laissez B être l'événement que M. Smith a choisi un garçon pour la promenade d'aujourd'hui. Ensuite , $p(M) = 1/4$, $p(B \mid M) = 1$, et $p(B \mid M) = 1/3$. Appliquer le théorème de Bayes pour calculer $p(M \mid B) = 1/2$. **c)** Cette variation est équivalente à la deuxième interprétation discutée dans la partie (a), donc la réponse est sans ambiguïté $1/3$. **29.** $V(aX + b) = E((aX + b)^2) - E(aX + b)^2 = E(a^2X^2 + 2abX + b^2) - [aE(X) + b]^2 = E(a^2X^2) + E(2abX) + E(b^2) - [a^2E(X)^2 + 2abE(X) + b^2] = a^2E(X^2) + 2abE(X) + b^2 - a^2E(X)^2 - 2abE(X) - b^2 =$

$a^2[E(X^2) - E(X)^2] = a^2V(X)$ **31.** Pour compter chaque élément dans l'espace échantillon exactement une fois, nous devons inclure chaque élément dans chacun des ensembles, puis enlevez le double comptage des éléments dans les intersections. Donc $p(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_m) = p(E_1) + p(E_2) + \cdots + p(E_m) - p(E_1 \cap E_2) - p(E_1 \cap E_3) - \cdots - p(E_1 \cap E_m) - p(E_2 \cap E_3) - p(E_2 \cap E_4) - \cdots - p(E_2 \cap E_m) - \cdots - p(E_{m-1} \cap E_m) = qm - (m(m-1)/2)r$, car les termes $C(m, 2)$ sont soustrait. Mais $p(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_m) = 1$, nous avons donc $qm - [m(m-1)/2]r = 1$. Parce que $r \geq 0$, cette équation nous dit que $qm \geq 1$, alors $q \geq 1/m$. Parce que $q \leq 1$, cette équation a également implique que $[m(m-1)/2]r = qm - 1 \leq m - 1$, à partir duquel il s'ensuit que $r \leq 2/m$. **33. a)** Nous achetons les cartes jusqu'à ce que ont obtenu un de chaque type. Cela signifie que nous avons acheté X cartes en tout. D'un autre côté, cela signifie également que nous avons acheté des cartes X_0 jusqu'à ce que nous obtenions le premier type que nous avons obtenu, puis acheté X_1 cartes supplémentaires jusqu'à ce que nous obtenions le deuxième type que nous avons obtenu, etc. Ainsi, X est la somme des X_j. **b)** Une fois j distinct types ont été obtenus, il y a $n - j$ nouveaux types disponibles sur un total de n types disponibles. Parce qu'il est tout aussi probable

fait de façon $S(m, k)$. Il existe donc $\sum_{k=1}^{n-1} C(n, k)\, S(m, k)$ fonctions qui ne sont pas activées. Mais il y a n^m les fonctions au total, donc $S(m, n) = n^m - \sum_{k=1}^{n-1} C(n, k)\, S(m, k)$.

31. a) $C_5 = C_0C_4 + C_1C_3 + C_2C_2 + C_3C_1 + C_4C_0 = 1 \cdot 14 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 14 \cdot 1 = 42$ **b)** $C(10, 5)/6 = 42$

33. $J(1) = 1$, $J(2) = 1$, $J(3) = 3$, $J(4) = 1$, $J(5) = 3$, $J(6) = 5$, $J(7) = 7$, $J(8) = 1$, $J(9) = 3$, $J(10) = 5$, $J(11) = 7$, $J(12) = 9$, $J(13) = 11$, $J(14) = 13$, $J(15) = 15$, $J(16) = 1$ **35.** Premièrement, supposons que le nombre de personnes soit même, disons $2n$. Après avoir fait le tour du cercle une fois et être revenu à la première personne, parce que les gens dans des endroits avec même les chiffres ont été éliminés, il reste exactement n personnes et la personne actuellement à l'emplacement i est la personne qui était à l'origine à l'emplacement $2i - 1$. Par conséquent, le survivant [à l'origine à l'emplacement $J(2n)$] est maintenant à l'emplacement $J(n)$; c'était la personne qui était à l'emplacement $2J(n) - 1$. Par conséquent, $J(2n) = 2J(n) - 1$. De même, quand il y a un nombre impair de personnes, disons $2n + 1$, puis après avoir fait le tour du cercle une fois puis éliminé personne 1, il y a n personnes ont quitté et la personne actuellement à loque nous obtenons chaque type, la probabilité de succès sur le prochain acheter (obtenir un nouveau type) est $(n - j) / n$. **c)** Cela suit immédiatement à partir de la définition de la distribution géométrique, la définition de X_j , et partie (b). **d)** Il ressort de la partie c) que $E(X_j) = n / (n - j)$. Ainsi, par la linéarité de l'attente et partie (a), on a $E(X) = E(X_0) + E(X_1) + \cdots + E(X_{n-1})$ $= \frac{n}{n} + \frac{n}{n-1} + \cdots + \frac{n}{1} = n\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{1}\right)$. **e)** À propos 224 . 46 **35.** $24 \cdot 13^4 / (52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49)$

CHAPITRE 8

Section 8.1

1. Soit $P(n)$ « $H_n = 2^n - 1$». *Étape de base:* $P(1)$ est vrai car $H_1 = 1$. *Pas inductif:* Supposons que $H_n = 2^n - 1$. Alors devenez-car $H_{n+1} = 2H_n + 1$, il s'ensuit que $H_{n+1} = 2(2^{n-1}) + 1 = 2^{n+1} - 1$. **3. a)** $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-5}$ pour $n \geq 5$ **b)** $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 8$, $a_4 = 16$ **c)** 1217 **5.** 9494

7. a) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 2^{n-2}$ pour $n \geq 2$ **b)** $a_0 = 0$, $a_1 = 0$ **c)** 94 **9. a)** $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$ pour $n \geq 3$ **b)** $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$ **c)** 81 **11. a)** $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ pour $n \geq 2$ **b)** $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ **c)** 34 **13. a)** $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$ pour $n \geq 2$ **b)** $a_0 = 1$, $a_1 = 3$ **c)** 448 **15. a)** $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$ pour $n \geq 2$ **b)** $a_0 = 1$, $a_1 = 3$ **c)** 239 **17. a)** $a_n = 2a_{n-1}$ pour $n \geq 2$ **b)** $a_1 = 3$ **c)** 96 **19. a)** $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ pour $n \geq 2$ **b)** $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ **c)** 89 **21. a)** $R_n = n + R_{n-1}$, $R_0 = 1$ **b)** $R_n = n(n+1)/2 + 1$ **23. a)** $S_n = S_{n-1} + (n^2 - n + 2)/2$, $S_0 = 1$ **b)** $S_n = (n^3 + 5n + 6)/6$ **25.** 64 **27. a)** $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$ **b)** $a_0 = 1$, $a_1 = 3$ **c)** 1224 **29.** De toute évidence, $S(m, 1) = 1$ pour $m \geq 1$. Si $m \geq n$, alors une fonction qui n'est pas sur de l'ensemble avec m éléments à l'ensemble avec n les éléments peuvent être spécifiés en choisissant la taille de la plage, qui est un entier compris entre 1 et n - 1 inclusivement, en choisissant les éléments de la gamme, ce qui peut être fait de manière $C(n, k)$, et choisir une fonction sur sur la plage, qui peut être

cation i est la personne qui se trouvait à l'emplacement $2i + 1$. Par conséquent, la le survivant sera le joueur occupant actuellement l'emplacement $J(n)$, à savoir, la personne qui se trouvait à l'origine à l'emplacement $2J(n) + 1$. Par conséquent, $J(2n + 1) = 2J(n) + 1$. L'étape de base est $J(1) = 1$. **37.** 73 , 977 , 3617 **39.** Ces neuf mouvements résolvent le puzzle: Déplacez le disque 1 de la cheville 1 à la cheville 2; déplacer le disque 2 de la cheville 1 vers cheville 3; déplacer le disque 1 de la cheville 2 à la cheville 3; déplacer le disque 3 de cheville 1 à cheville 2; déplacer le disque 4 de la cheville 1 à la cheville 4; déplacer le disque 3 de la cheville 2 à la cheville 4; déplacer le disque 1 de la cheville 3 à la cheville 2; bouge toi disque 2 de la cheville 3 à la cheville 4; déplacer le disque 1 de la cheville 2 à la cheville 4. Pour voir qu'au moins neuf mouvements sont nécessaires, notez d'abord qu'au au moins sept mouvements sont nécessaires quel que soit le nombre de chevilles présent: trois pour désempiler les disques, un pour déplacer le plus grand disque 4, et trois autres mouvements pour les réempiler. Au moins deux d'autres mouvements sont nécessaires, car pour déplacer le disque 4 du piquet 1 pour cheviller 4, les trois autres disques doivent être sur les chevilles 2 et 3, donc à au moins un mouvement est nécessaire pour les réempiler et un mouvement pour les dépiler. **41.** Les cas de base sont évidents. Si $n > 1$, l'algorithme se compose de trois étapes. Dans un premier temps, par le hypothèse inductive, les mouvements $R(n - k)$ sont utilisés pour transférer plus petits $n - k$ disques à cheviller 2. Ensuite, en utilisant les trois chevilles habituelles Algorithme de la tour de Hanoi, il en faut $2^k - 1$ se déplace pour transférer le reste des disques (les plus grands k disques) au piquet 4, en évitant le piquet 2. Là encore par l'hypothèse inductive, il faut $R(n - k)$ se déplace pour transférer les plus petits $n - k$ disques sur le pion 4; tous les des chevilles sont disponibles pour cela, car les plus gros disques, maintenant cheville 4, ne pas interférer. Ceci établit la relation de récurrence tion. **43.** Notons tout d'abord que $R(n) = \sum_{j=1}^{n} [R(j) - R(j - 1)]$ [qui suit car la somme est télescopique et $R(0) = 0$]. Par l'exercice 42, c'est la somme de 2^{k-1} pour cette gamme de ues de j . Par conséquent, la somme est $\sum_{i=1}^{k} i 2^{i-1}$, sauf que si n n'est pas un nombre triangulaire, puis les dernières valeurs lorsque $i = k$ sont manquants, et c'est ce que le terme final dans le compte tenu de l'expression. **45.** Par l'exercice 43, $R(n)$ est pas plus grand que $\sum_{i=1}^{k} i 2^{i-1}$. On peut montrer que cette somme est égale à $(k+1)2^k - 2^{k+1} + 1$, il n'est donc pas supérieur à $(k+1)2^k$. Car $n > k(k-1)/2$, la formule quadratique peut être utilisée pour montrer que

Page 49

$k < 1 + \sqrt{2n}$ pour tout $n > 1$. Par conséquent, $R(n)$ est borné ci-dessus par $(1 + \sqrt{2n} + 1) 2^{1+\sqrt{2n}} < 8\sqrt{n}\, 2^{\sqrt{2n}}$ pour tout $n > 2$. Par conséquent, $R(n)$ est $O(\sqrt{n}\, 2^{\sqrt{2n}})$. **47. a)** 0 **b)** 0 **c)** 2 **d)** $2^{n-1} - 2^{n-2}$

49. $a_n - 2\nabla a_n + \nabla^2 a_n = a_n - 2(a_n - a_{n-1}) + (\nabla a_n - \nabla a_{n-1}) = -a_n + 2a_{n-1} + [(a_n - a_{n-1}) - (a_{n-1} - a_{n-2})] = -a_n + 2a_{n-1} + (a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2}) = a_{n-2}$ **51.** $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} = (a_n - \nabla a_n) + (a_n - 2\nabla a_n + \nabla^2 a_n) = 2a_n - 3\nabla a_n + \nabla^2 a_n$, ou $a_n = 3\nabla a_n - \nabla^2 a_n$ **53.** Insérer $S(0) := \varnothing$ après $T(0) := 0$ (où $S(j)$ enregistrera le

11. a) *Étape de base:* Pour $n = 1$, nous avons $1 = 0 + 1$, et pour $n = 2$, nous avons $3 = 1 + 2$. *Pas inductif:* Assume vrai pour $k \leq n$. Alors $L_{n+1} = L_n + L_{n-1} = f_{n-1} + f_{n+1} + f_{n-2} + f_n = (f_{n-1} + f_{n-2}) + (f_{n+1} + f_n) = f_n + f_{n+2}$. **b)** $L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ **13.** $a_n = 8(-1)^n - 3(-2)^n + 4 \cdot 3^n$ **15.** $a_n = 5 + 3(-2)^n - 3^n$ **17.** Soit $a_n = C(n, 0) + C(n-1, 1) + \cdots + C(n - k, k)$ où $k = \lfloor n/2 \rfloor$. Tout d'abord, supposons que n est pair, de sorte que $k = n/2$, ensemble optimal de pourparlers parmi les premiers j), et remplacer le instruction $T(j) := \max(w_j + T(p(j)), T(j-1))$ avec le code suivant:

si $w_j + T(p(j)) > T(j-1)$ **alors**
$T(j) := w_j + T(p(j))$
$S(j) := S(p(j)) \cup \{j\}$

autre
$T(j) := T(j-1)$
$S(j) := S(j-1)$

55. **a)** Pourparlers 1, 3 et 7 **b)** Pourparlers 1 et 6, ou pourparlers 1, 3, et 7 **c)** Pourparlers 1, 3 et 7 **d)** Pourparlers 1 et 6 **57.** **a)** Cette découle immédiatement de l'exemple 5 et de l'exercice 41c Section 8.4. **b)** La dernière étape du calcul de $\mathbf{A}_{ij}$ consiste à tiplier $\mathbf{A}_{ik}$ par $\mathbf{A}_{k+1,j}$ pour certains k entre i et $j-1$ inclusive, ce qui nécessitera $m_i m_{k+1} m_{j+1}$ multiplicateur entier indépendamment de la manière dont $\mathbf{A}_{ik}$ et $\mathbf{A}_{k+1,j}$ sont calculés. Par conséquent, pour minimiser le nombre total de multiplications entières, chacun de ces deux facteurs doit être calculé de la manière la plus efficace. **c)** Cela fait suite à à partir de la partie (b) et de la définition de $M(i, j)$.
d) *ordre matriciel de la* **procédure** ($m_1, \ldots, m_{n+1}$: entiers positifs)

pour $i := 1$ **à** n
$M(i, i) := 0$
pour $d := 1$ **à** $n - 1$
pour $i := 1$ **à** $n - d$
min := 0
pour $k := i$ **à** $i + d$
nouveau := $M(i, k) + M(k+1, i+d) + m_i m_{k+1} m_{i+d+1}$
si *nouveau* <*min* **alors**
min := *nouveau*
où $(i, i+d) := k$
$M(i, i+d) :=$ *min*

e) L'algorithme a trois boucles imbriquées, dont chacune est dexé sur au plus n valeurs.

Section 8.2

1. **a)** Degré 3 **b)** Non **c)** Degré 4 **d)** Non **e)** Non **f)** Degré 2 **g)** Non **3.** **a)** $a_n = 3 \cdot 2^n$ **b)** $a_n = 2$ **c)** $a_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n$ **d)** $a_n = 6 \cdot 2^n - 2 \cdot n2^n$ **e)** $a_n = n(-2)^{n-1}$ **f)** $a_n = 2^n - (-2)^n$ **g)** $un_n = (\text{une}/2)^{n+1} - (-1/2)^{n+1}$
5. $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$ **7.** $[2^{n+1} + (-1)^n]/3$
9. **a)** $P_n = 1.2P_{n-1} + 0.45P_{n-2}$, $P_0 = 100,000$, $P_1 = 120,000$ **b)** $P_n = (250,000/3)(3/\text{deux})^n + (50,000/3)(-3/\text{dix})^n$

et le dernier terme est $C(k, k)$. Par l'identité de Pascal, nous avons $a_n = 1 + C(n-2, 0) + C(n-2, 1) + C(n-3, 1) + C(n-3, 2) + \cdots + C(n-k, k-2) + C(n-k, k-1) + 1 = 1 + C(n-2, 1) + C(n-3, 2) + \cdots + C(n-k, k-1) + C(n-2, 0) + C(n-3, 1) + \cdots + C(n-k, k-2) + 1 = a_{n-1} + a_{n-2}$ car $\lfloor (n-1)/2 \rfloor = k - 1 = \lfloor (n-2)/2 \rfloor$. Un sim-
Le calcul ilaire fonctionne lorsque n est impair. Par conséquent, $\{a_n\}$ satisfait la relation de récurrence $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ pour toutes les positions entiers n, $n \geq 2$. De plus, $a_1 = C(1, 0) = 1$ et $a_2 = C(2, 0) + C(1, 1) = 2$, qui sont f_2 et f_3 . Il s'ensuit que $a_n = f_{n+1}$ pour tous les entiers positifs n . **19.** $a_n = (n^2 + 3n + 5)(-1)^n$ **21.** $(a_{1,0} + a_{1,1}n + a_{1,2}n^2 + a_{1,3}n^3) + (a_{2,0} + a_{2,1}n + a_{2,2}n^2)(-2)^n + (a_{3,0} + a_{3,1}n)3^n + a_{4,0}(-4)^n$
23. **a)** $3a_{n-1} + 2^n = 3(-2)^n + 2^n = 2^n(-3+1) = -2^{n+1} = a_n$ **b)** $a_n = \alpha 3^n - 2^{n+1}$ **c)** $a_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$
25. **a)** $A = -1$, $B = -7$ **b)** $a_n = \alpha 2^n - n - 7$
c) $a_n = 11 \cdot 2^n - n - 7$ **27.** **a)** $p_3n^3 + p_2n^2 + p_1n + p_0$
b) $n^2 p_0(-2)^n$ **c)** $n^2(p_1n + p_0)2^n$ **d)** $(p_2n^2 + p_1n + p_0)4^n$
e) $n^2(p_2n^2 + p_1n + p_0)(-2)^n$ **f)** $n^2(p_4n^4 + p_3n^3 + p_2n^2 + p_1n + p_0)2^n$ **g)** p_0 **29.** **a)** $a_n = \alpha 2^n + \beta 3^n - n \cdot 2^{n+1} + 3n/2 + 21/\text{quatre}$ **b)** $a_n = -2 \cdot 2^n + 3^{n+1}$ **31.** $a_n = \alpha 2^n + 3^{n+1}$ **33.** $a_n = (\alpha + \beta n + n^2 + n^3/\text{six})2^n$
35. $a_n = -4 \cdot 2^n - n^2/4 - \text{cinq}\,n/2 + 1/8 + (39/8)3^n$
37. $a_n = n(n+1)(n+2)/6$ **39.** **a)** $1, -1, i, -i$ **b)** $a_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(-1)^n + \frac{2+i}{4}i^n + \frac{2-i}{4}(-i)^n$ **41.** **a)** Utilisation de la formule pour f_n , on voit que $\left| f_n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right| < 1/\sqrt{5} < 1/2$. Cela signifie que f_n est le nombre entier est à $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$. **b)** Moins quand n est pair; plus grand quand n est impair **43.** $a_n = f_{n-1} + 2f_n - 1$
45. **a)** $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}$, $a_0 = 2$, $a_1 = 6$ **b)** $a_n = [4^{n+1} + (-1)^n]/5$ **47.** **a)** $un_n = 2a_{n-1} + (n-1)10,000$
b) $un_n = 70,000 \cdot 2^{n-1} - 10,000n - 10,000$ **49.** $a_n = 5n^{\text{deux}}/12 + 13n/12 + 1$ **51.** Voir le chapitre 11, Section 5 dans [Ma93]. **53.** $6^n \cdot 4^{n-1}/n$

Section 8.3

1. 14 **3.** La première étape est $(1110)_2(1010)_2 = (2^4 + 2^2)(11)_2(10)_2 + 2^2[(11)_2 - (10)_2][(10)_2 - (10)_2] + (2^2 + 1)(10)_2 \cdot (10)_2$. Le produit est $(10001100)_2$.
5. $C = 50,665\ C + 729 = 33,979$ **7.** **a)** 2 **b)** 4 **c)** 7 **9.** **a)** 79 **b)** 48, 829 **c)** 30, 517, 579 **11.** $O(\log n)$
13. $O(n^{\log_3 2})$ **15.** 5 **17.** **a)** *Étape de base:* si la séquence a juste un élément, alors la seule personne sur la liste est gagnante. *Étape récursive:* divisez la liste en deux parties: la première moitié et la seconde moitié - aussi équitablement que possible. Appliquer l'algorithm récursivement à chaque moitié pour trouver au plus deux

des noms. Parcourez ensuite la liste entière pour compter le nombre de occurrences de chacun de ces noms pour décider lequel, le cas échéant, est le gagnant. **b)** $O(n \log n)$ **19.** **a)** $f(n) = f(n/2) + 2$ **b)** $O(\log n)$ **21.** **a)** 7 **b)** $O(\log n)$

23. **a)** **procédure la** *plus grande somme* $(a_1, \ldots, a_n)$

meilleur := 0 {la sous-séquence vide a la somme 0}

pour i := 1 **à** n

somme := 0

pour $j := i + 1$ **à** n

somme := *somme* + a_j

si *somme*> *meilleur* **alors** *meilleur* := *somme*

{ *meilleur* est la somme maximale possible de nombres dans la liste}

b) $O(n^2)$ **c)** Nous divisons la liste en une première moitié et une seconde moitié et appliquer l'algorithme récursivement pour trouver le plus grand somme de termes consécutifs pour chaque moitié. La plus grande somme de termes consécutifs dans toute la séquence est l'un de ces deux nombres ou la somme d'une séquence de termes consécutifs qui traverse le milieu de la liste. Pour trouver le plus grand somme d'une séquence de termes consécutifs qui traverse la milieu de la liste, on commence au milieu et on avance pour trouver la plus grande somme possible dans la seconde moitié de la liste, et reculer pour trouver la plus grande somme possible dans le première moitié de la liste; la somme souhaitée est la somme de ces deux quantités. La réponse finale est alors la plus grande de cette somme et les deux réponses obtenues récursivement. Le cas de base est que la plus grande somme d'une séquence d'un terme est la plus grande de ce nombre et 0. **d)** 11, 9, 14 **e)** $S(n) = 2S(n/2) + n$, $C(n) = 2C(n/2) + n + 2$, $S(1) = 0$, $C(1) = 1$

f) $O(n \log n)$, meilleur que $O(n^2)$ **25.** $(1, 6)$ et $(3, 6)$ à distance 2 **27.** L'algorithme est essentiellement le même que le algorithme donné dans l'exemple 12. La bande centrale a toujours une largeur $2d$ mais nous devons considérer seulement deux boîtes de taille $d \times d$ plutôt de huit boîtes de taille $(d/2) \times (d/2)$. La relation de récurrence est la même que la relation de récurrence dans l'exemple 12, sauf que le coefficient 7 est remplacé par 1. **29.** Avec $k = \log_b n$, il s'ensuit que $f(n) = a^k f(1) + \sum_{j=0}^{k-1} a^j c(n/b^j)^d = a^k f(1) + \sum_{j=0}^{k-1} cn^d = a^k f(1) + kcn^d = a^{\log_b n} f(1) + c(\log_b n)n^d = n^{\log_b a} f(1) + cn^d \log_b n = n^d f(1) + cn^d \log_b n$. **31.** Soit $k = \log_b n$ où n est une puissance de b. *Étape de base:* si $n = 1$ et $k = 0$, alors $c_1 n^d + c_2 n^{\log_b a} = c_1 + c_2 = b^d c/(b^d - a) + f(1) + b^d c/(a - b^d) = f(1)$. *Étape inductive:* Supposons vrai pour k, où $n = b^k$. Alors pour $n = b^{k+1}$, $f(n) = af(n/b) + cn^d = a\{[b^d c/(b^d - a)](n/b)^d + [f(1) + b^d c/(a - b^d)] \cdot (n/b)^{\log_b a}\} + cn^d = b^d c/(b^d - a) n^d a/b^d + [f(1) + b^d c/(a - b^d)] n^{\log_b a} + cn^d = n^d [ac/(b^d - a) + c(b^d - a)/(b^d - a)] + [f(1) + b^d c/(a - b^d c)] n^{\log_b a} = [b^d c/(b^d - a)] n^d + [f(1) + b^d c/(a - b^d)] n^{\log_b a}$. **33.** Si $a > b^d$, puis $\log_b a > d$, donc le deuxième terme domine, donnant $O(n^{\log_b a})$. **35.** $O(n^{\log_4 5})$ **37.** $O(n^3)$

Section 8.4

1. $f(x) = 2(x^6 - 1)/(x - 1)$ **3.** **a)** $f(x) = 2x(1 - x^6)/(1 - x)$ **b)** $x^3/(1 - x)$ **c)** $x/(1 - x^3)$ **d)** $2/(1 - 2x)$ **e)** $(1 + x)^7$ **f)** $2/(1 + x)$ **g)** $[1/(1 - x)] - x^2$ **h)** $x^3/(1 - x)^2$ **5.** **a)** $5/(1 - x)$ **b)** $1/(1 - 3x)$ **c)** $2x^3/(1 - x)$ **d)** $(3 - x)/(1 - x)^2$ **e)** $(1 + x)^8$ **7.** **a)** $a_0 = -64$, $a_1 = 144$, $a_2 = -108$, $a_3 = 27$ et $a_n = 0$ pour tout $n \geq 4$ **b)** Les seuls coefficients non nuls sont $a_0 = 1$, $a_3 = 3$, $a_6 = 3$, $a_9 = 1$. **c)** $a_n = 5^n$ **d)** $a_n = (-3)^{n-3}$ pour $n \geq 3$, et $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ **e)** $a_0 = 8$, $a_1 = 3$, $a_2 = 2$, $a_n = 0$ pour n impair supérieur à 2 et $a_n = 1$ pour pair n supérieur que 2 **f)** $a_n = 1$ si n est un multiple positif 4, $a_n = -1$ si $n < 4$, et $a_n = 0$ sinon **g)** $a_n = n - 1$ pour $n \geq 2$ et $a_0 = a_1 = 0$ **h)** $a_n = 2^{n+1}/n!$ **9.** **a)** 6 **b)** 3 **c)** 9 **d)** 0 **e)** 5 **11.** **a)** 1024 **b)** 11 **c)** 66 **d)** 292 864 **e)** 20 412 **13.** 10 **15.** 50 **17.** 20 **19.** $f(x) = 1/[(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^5)(1 - x^{10})]$ **21.** 15 **23.** **a)** $x^4(1 + x + x^2 + x^3)^2/(1 - x)$ **b)** 6 **25.** **a)** Le coefficient de x^r dans l'expansion de la série de puissance de $1/[(1 - x^3)(1 - x^4)(1 - x^{20})]$ **b)** $1/(1 - x^3 - x^4 - x^{20})$ **c)** 7 **d)** 3224 **27.** **a)** 3 **b)** 29 **c)** 29 **d)** 242 **29.** **a)** 10 **b)** 49 **c)** 2 **d)** 4 **31.** **a)** $G(x) - a_0 - a_1 x - a_2 x^2$ **b)** $G(x^2)$ **c)** $x^4 G(x)$ **d)** $G(2x)$ **e)** $\int_0^x G(t)\,dt$ **f)** $G(x)/(1 - x)$ **33.** $a_k = 2 \cdot 3^k - 1$ **35.** $a_k = 18 \cdot 3^k - 12 \cdot 2^k$ **37.** $a_k = k^2 + 8k + 20 + (6k - 18)2^k$ **39.** Soit $G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k$. Après avoir changé les indices de sommation et en ajoutant des séries, nous voyons que $G(x) - xG(x) - x^2G(x) = f_0 + (f_1 - f_0)x + \sum_{k=2}^{\infty}(f_k - f_{k-1} - f_{k-2})x^k = 0 + x + \sum_{k=2}^{\infty} 0x^k$. Par conséquent, $G(x) - xG(x) - x^2G(x) = x$. La résolution de $G(x)$ donne $G(x) = x/(1 - x - x^2)$. Par la méthode des fractions partielles, on peut montrer que $x/(1 - x - x^2) = (1/\sqrt{5})[1/(1 - \alpha x) - 1/(1 - \beta x)]$, où $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$ et $\beta = (1 - \sqrt{5})/2$. Utilisation du fait que $1/(1 - \alpha x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k x^k$, il s'ensuit que $G(x) = (1/\sqrt{5}) \cdot \sum_{k=0}^{\infty}(\alpha^k - \beta^k)x^k$. Par conséquent, $f_k = (1/\sqrt{5}) \cdot (\alpha^k - \beta^k)$. **41.** **a)** Soit $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ être la fonction génératrice pour $\{C_n\}$. Alors $G(x)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}\right)x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}\right)x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^{n-1}$. Par conséquent, $xG(x)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n$, ce qui implique que $xG(x)^2 - G(x) + 1 = 0$. L'application de la formule quadratique montre que $G(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$. Nous choisissons le signe moins dans ce formula parce que le choix du signe plus conduit à une division par zéro. **b)** Par l'exercice 40, $(1 - 4x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}x^n$. Intégration terme par terme (qui est valide par un théorème de calculus) montre que $\int_0^x (1-4t)^{-1/2}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}x^{n+1} = x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}x^n$. Car $\int_0^x (1-4t)^{-1/2}\,dt = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2} = xG(x)$, l'équivalence des coefficients montre que $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. **c)** Vérifiez l'étape de base pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Supposons l'hypothèse inductive que $C_j \geq 2^{j-1}$ pour $1 \leq j < n$, où $n \geq 6$. Alors $C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1} \geq \sum_{k=1}^{n-2} C_k C_{n-k-1} \geq (n-2)2^{k-1}2^{n-k-2} = (n-2)2^{n-1}/4 \geq 2^{n-1}$. **43.** Application du théorème binomial à l'égalité $(1 + x)^{m+n} = (1 + x)^m(1 + x)^n$ montre que $\sum_{r=0}^{m+n} C(m+n, r)x^r = \sum_{r=0}^{m} C(m, r)x^r \cdot \sum_{r=0}^{n} C(n, r)x^r = \sum_{r=0}^{m+n}\left[\sum_{k=0}^{r} C(m, r-k)C(n, k)\right]x^r$. La comparaison des coefficients donne l'identité souhaitée. **45.** **a)** $2e^x$ **b)** e^{-x} **c)** e^{3x} **d)** $xe^x + e^x$ **47.** **a)** $a_n = (-1)^n$ **b)** $a_n = 3 \cdot 2^n$

c) $a_n = 3^n - 3 \cdot 2^n$ **d)** $a_n = (-2)^n$ pour $n \geq 2$, $a_1 = -3$, $a_0 = 2$ **e)** $a_n = (-2)^n + n!$ **f)** $a_n = (-3)^n + n! \cdot 2^n$ pour $n \geq 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = -2$ **g)** $a_n = 0$ si n est impair et $a_n = n!/(n/2)!$ si n est pair **49. a)** $a_n = 6a_{n-1} + 8^{n-1}$ pour $n \geq 1$, $a_0 = 1$ **b)** La solution générale de l'association La relation de récurrence homogène linéaire est $a_n^{(h)} = \alpha 6^n$. Une solution particulière est $un_n^{(p)} = \frac{1}{2} \cdot 8^n$. Par conséquent, le général la solution est $a_n = \alpha 6^n + \frac{1}{2} \cdot 8^n$. En utilisant la condition initiale, il s'ensuit que $\alpha = \frac{1}{2}$. Par conséquent, $a_n = (6^n + 8^n)/2$. **c)** Soit $G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. En utilisant la relation de récurrence pour $\{a_k\}$, il on peut montrer que $G(x) - 6xG(x) = (1-7x)/(1-8x)$. Par conséquent, $G(x) = (1-7x)/[(1-6x)(1-8x)]$. En utilisant des fractions partielles, il en résulte que $G(x) = (1/\text{deux})/(1\text{-}6x) + (1/\text{deux})/(1\text{-}8x)$. À l'aide du tableau 1, il s'ensuit que $a_n = (6^n + 8^n)/2$.

51. $\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdots$ **53.** $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots$

55. Les fonctions génératrices obtenues dans les exercices 52 et 53 sont égaux parce que $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots = \frac{1-x^2}{1-x} \cdot \frac{1-x^4}{1-x^2} \cdot \frac{1-x^6}{1-x^3} \cdots = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdots$. **57. a)** $G_X(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p(X=k) \cdot 1^k = \sum_{k=0}^{\infty} p(X=k) = 1$ **b)** $G'_X(1) = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} p(X=k) \cdot x^k \big|_{x=1} = \sum_{k=0}^{\infty} p(X=k) \cdot k \cdot x^{k-1} \big|_{x=1} = \sum_{k=0}^{\infty} p(X=k) \cdot k = E(X)$ **c)** $G''_X(1) = \frac{d^2}{dx^2} \sum_{k=0}^{\infty} p(X=k) \cdot x^k \big|_{x=1} = \sum_{k=0}^{\infty} p(X=k) \cdot k(k-1) \cdot x^{k-2} \big|_{x=1} = \sum_{k=0}^{\infty} p(X=k) \cdot (k^2 - k) = V(X) + E(X)^2 - E(X)$. Combiner cela avec la partie (b) donne les résultats souhaités. **59. a)** $G(x) = p^m/(1-qx)^m$ **b)** $V(x) = mq/p^2$

Section 8.5

1. a) 30 **b)** 29 **c)** 24 **d)** 18 **3.** 1% **5. a)** 300 **b)** 150 **c)** 175 **d)** 100 **7.** 492 **9.** 974 **11.** 55 **13.** 248 **15.** 50.138 **17.** 234

19. $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| + |A_5| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| - |A_1 \cap A_5| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_4| - |A_2 \cap A_5| - |A_3 \cap A_4| - |A_3 \cap A_5| - |A_4 \cap A_5| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_2 \cap A_5| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_5| + |A_1 \cap A_4 \cap A_5| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_5| + |A_2 \cap A_4 \cap A_5| + |A_3 \cap A_4 \cap A_5| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5| - |A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5| - |A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| - |A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5|$

21. $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| + |A_5| + |A_6| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| - |A_1 \cap A_5| - |A_1 \cap A_6| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_4| - |A_2 \cap A_5| - |A_2 \cap A_6| - |A_3 \cap A_4| - |A_3 \cap A_5| - |A_3 \cap A_6| - |A_4 \cap A_5| - |A_4 \cap A_6| - |A_5 \cap A_6|$

23. $p(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = p(E_1) + p(E_2) + p(E_3) - p(E_1 \cap E_2) - p(E_1 \cap E_3) - p(E_2 \cap E_3) + p(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$

25. $4972/71,295$ **27.** $p(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup E_5) = p(E_1) + p(E_2) + p(E_3) + p(E_4) + p(E_5) - p(E_1 \cap E_2) - p(E_1 \cap E_3) - p(E_1 \cap E_4) - p(E_1 \cap E_5) - p(E_2 \cap E_3) - p(E_2 \cap E_4) - p(E_2 \cap E_5) - p(E_3 \cap E_4) - p(E_3 \cap E_5) - p(E_4 \cap E_5) + p(E_1 \cap E_2 \cap E_3) + p(E_1 \cap E_2 \cap E_4) + p(E_1 \cap E_2 \cap E_5) + p(E_1 \cap E_3 \cap E_4) + p(E_1 \cap E_3 \cap E_5) + p(E_1 \cap E_4 \cap E_5) + p(E_2 \cap E_3 \cap E_4) + p(E_2 \cap E_3 \cap E_5) + p(E_2 \cap E_4 \cap E_5) + p(E_3 \cap E_4 \cap E_5)$

29. $p\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{1 \leq i \leq n} p(E_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} p(E_i \cap E_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} p(E_i \cap E_j \cap E_k) - \cdots + (-1)^{n+1} p\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right)$

Section 8.6

1. 75 **3.** 6 **5.** 46 **7.** 9875 **9.** 540 **11.** 2100 **13.** 1854

15. a) $D_{100}/100!$ **b)** $100 D_{99}/100!$ **c)** $C(100, 2)/100!$ **d)** 0 **e)** $1/100!$ **17.** $2, 170, 680$ **19.** Par l'exercice 18, nous ont $D_n - nD_{n-1} = -[D_{n-1} - (n-1)D_{n-2}]$. Itérat-ing, nous avons $D_n - nD_{n-1} = -[D_{n-1} - (n-1)D_{n-2}] = -[-(D_{n-2} - (n-2)D_{n-3})] = D_{n-2} - (n-2)D_{n-3} = \cdots = (-1)^n (D_2 - 2D_1) = (-1)^n$ car $D_2 = 1$ et $D_1 = 0$. **21.** Lorsque n est impair **23.** $\varphi(n) = n - \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{n}{p_i}\right) + \sum_{1 \leq i < j \leq m} \frac{n}{p_i p_j} - \cdots \pm \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_m} = n \prod_{i=1}^{m} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$ **25.** 4

27. Il y a n^m fonctions d'un ensemble avec m éléments à un ensemble avec n éléments, $C(n, 1)(n-1)^m$ fonctions d'un ensemble avec m éléments à un ensemble avec n éléments qui manquent exactement un élément, $C(n, 2)(n-2)^m$ fonctions d'un ensemble avec m éléments à un ensemble avec n éléments qui manquent exactement deux éléments et ainsi de suite, avec $C(n, n-1) \cdot 1^m$ fonctions d'un ensemble avec m éléments à un ensemble avec n éléments qui manquent exactement n -1 éléments. Par conséquent, par le principe de l'inclusion-exclusion, il y a $n^m - C(n, 1)(n-1)^m + C(n, 2)(n-2)^m - \cdots + (-1)^{n-1} C(n, n-1) \cdot 1^m$ sur les fonctions.

Exercices supplémentaires

1. a) $A_n = 4A_{n-1}$ **b)** $A_1 = 40$ **c)** $A_n = 10 \cdot 4^n$

3. a) $M_n = M_{n-1} + 160,000$ **b)** $M_1 = 186,000$ **c)** $M_n = 160,000n + 26,000$ **d)** $T_n = T_{n-1} + 160,000n + 26,000$ **e)** $T_n = 80,000n^2 + 106,000n$ **5. a)** $un_n = a_{n-2} + a_{n-3}$ **b)** $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1$ **c)** $a_{12} = 12$ **7. a)** 2 **b)** 5 **c)** 8 **d)** 16 **9.** $a_n = 2^n$ **11.** $a_n = 2 + 4n/3 + n^2/2 + n^3/\text{six}$

13. $a_n = a_{n-2} + a_{n-3}$ **15. a)** Dans les conditions données, une sous-séquence commune la plus longue se termine clairement au dernier terme dans chaque séquence, donc $a_m = b_n = c_p$. De plus, un sous-séquence commune de ce qui reste de la a- séquence et la b -la suite de la suppression de ces derniers termes doit former le début d'une sous-séquence commune la plus longue de l'original séquences. **b)** Si $c_p = a_m$, alors la plus longue subdivision commune l'apparence de la quence *un* -Séquence doit se terminer avant la fin; par conséquent, la séquence c doit être une plus longue commune sous-séquence de $a_1, a_2, ..., a_{m-1}$ et $b_1, b_2, ..., b_n$. le l'autre moitié est similaire.

17. *durée de la* **procédure** ($a_1, ..., a_m, b_1, ..., b_n$: séquences)

```
pour i := 1 à m
  L(i, 0) := 0
pour j := 1 à n
  L(0, j) := 0
pour i := 1 à m
  pour j := 1 à n
    si a_i = b_j alors L(i, j) := L(i - 1, j - 1) + 1
    sinon L(i, j) := max(L(i, j - 1), L(i - 1, j))
retourner L(m, n)
```

19. $f(n) = (4n^2 - 1)/3$ **21.** $O(n^4)$ **23.** $O(n)$ **25.** Utilisation seulement deux comparaisons, l'algorithme est en mesure de réduire la rechercher m jusqu'à la première moitié ou la seconde moitié de la séquence originale. Puisque la longueur de la séquence est coupée la moitié à chaque fois, seulement environ $2 \log_2 n$ comparaisons sont nécessaires dans tout. **27.** **a)** $18n + 18$ **b)** 18 **c)** 0 **29.** $\Delta(a_n b_n) = a_{n+1}b_{n+1} - a_n b_n = a_{n+1}(b_{n+1} - b_n) + b_n(a_{n+1} - a_n) = a_{n+1}\Delta b_n + b_n \Delta a_n$ **31.** **a)** Soit $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. alors $G'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$. Donc, $G'(x) - G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1) a_{n+1} - a_n] x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n / n! = e^x$, comme voulu. Que $G(0) = a_0 = 1$ est donné. **b)** Nous avons $[e^{-x} G(x)]' = e^{-x} G'(x) - e^{-x} G(x) = e^{-x}[G'(x) - G(x)] = e^{-x} \cdot e^x = 1$. Par conséquent, $e^{-x} G(x) = x + c$, où c est une constante.

Par conséquent, $G(x) = xe^x + ce^x$. Parce que $G(0) = 1$, il s'ensuit que $c = 1$. **c)** Nous avons $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}/n! + \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n! = \sum_{n=1}^{\infty} x^n/(n-1)! + \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$. Donc, $a_n = 1/(n-1)! + 1/n!$ pour tout $n \geq 1$, et $a_0 = 1$. **33.** 7

35. 110 **37.** 0 **39.** **a)** 19 **b)** 65 **c)** 122 **d)** 167 **e)** 168

41. $D_{n-1}/(n-1)!$ **43.** onze / 32

CHAPITRE 9

Section 9.1

1. **a)** $\{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ **b)** $\{(1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 0)\}$ **c)** $\{(1, 0), (2, 0), (2, 1), (3, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 0), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$ **d)** $\{(1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 0), (2, 2), (3, 0), (3, 3), (4, 0)\}$ **e)** $\{(0, 1), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 3)\}$

f) $\{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$ **3.** **a)** Transitif **b)** Réflexif, symétrique, transitif **c)** Symétrique **d)** Antisymétrique **e)** Réflexif, symétrique, antisymétrique, transitif **f)** Aucune de ces propriétés **5.** **a)** Réflexive, transsitive **b)** Symétrique **c)** Symétrique **d)** Symétrique **7.** **a)** Symétrique **b)** Symétrique, transitive **c)** Symétrique **d)** Réflexive, symétrique, transitive **e)** Réflexif, transitive **f)** Réflexive, symétrique, transitive **g)** Antisymétrique **h)** Antisymétrique, transitif **9.** Chacune des trois propriétés est vide de satisfaction. **11.** (c), (d), (f) **13.** **a)** Non irréflexible ive **b)** non irréflexif **c)** non irréflexif **d)** non irréflexif **15.** Oui, par exemple $\{(1, 1)\}$ le $\{1, 2\}$ **17.** $(a, b) \in R$ si et seulement si a est plus grand que b **19.** (a) **21.** Aucun **23.** $\forall a \forall b\, [(a, b) \in R \to (b, a) \notin R]$ **25.** 2^{mn} **27.** **a)** $\{(a, b) \mid b$ divise $a\}$ **b)** $\{(a, b) \mid a$ ne divise pas $b\}$ **29.** Le graphe de f^{-1} **31.** **a)** $\{(a, b) \mid$ *un* est requis pour lu ou a lu $b\}$ **b)** $\{(a, b) \mid a$ est nécessaire pour lire et a lire $b\}$ **c)** $\{(a, b) \mid$ soit a est requis pour lire b mais n'a pas le lire ou a a lu b mais n'est pas obligé de$\}$ **d)** $\{(a, b) \mid$ *une* est nécessaire pour lire b mais ne l'a pas lu$\}$ **e)** $\{(a, b) \mid a$ a lire b mais n'est pas obligé de$\}$ **33.** $S \circ R = \{(a, b) \mid a$ est un parent de b et b a un frère$\}$, $R \circ S = \{(a, b) \mid a$ est une tante ou oncle de $b\}$ **35.** **a)** $\mathbf{R}_2$ **b)** R_6 **c)** R_3 **d)** R_3 **e)** $\varnothing$ **f)** R_1 **g)** R_4 **h)** R_4 **37.** **a)** R_1 **b)** R_2 **c)** R_3 **d)** $\mathbf{R}_2$ **e)** R_3 **f)** $\mathbf{R}_2$ **g)** $\mathbf{R}_2$ **h)** $\mathbf{R}_2$ **39.** b a obtenu son doctorat auprès d'une personne qui a obtenu son doctorat sous *un* ; il y a une séquence de $n + 1$ personnes, commençant par a et se terminant par b, tel que chacun est le conseiller de la personne suivante dans la séquence **41.** **a)** $\{(a, b) \mid a - b \equiv 0, 3, 4, 6,, 8$, ou $9 \pmod{12}\}$ **b)** $\{(a, b) \mid a \equiv b \pmod{12}\}$ **c)** $\{(a, b) \mid a - b \equiv 3, 6$, ou $9 \pmod{12}\}$ **d)** $\{(a, b) \mid a - b \equiv 4$ ou $8 \pmod{12}\}$ **e)** $\{(a, b) \mid a - b \equiv 3, 4, 6, 8$, ou $9 \pmod{12}\}$ **43.** 8 **45.** **a)** 65 , 536 **b)** 32 , 768 **47.** **a)** $2^{n(n+1)/2}$ **b)** $2^n 3^{n(n-1)/2}$ **c)** $3^{n(n-1)/2}$ **d)** $2^{n(n-1)}$ **e)** $2^{n(n-1)/2}$ **f)** $2^{n^2} - 2 \cdot 2^{n(n-1)}$ **49.** Il peut ne pas y en avoir b. **51.** Si R est symétrique et $(a, b) \in R$, puis $(b, a) \in R$, donc $(a, b) \in R^{-1}$. Par conséquent, $R \subseteq R^{-1}$. De même, $R^{-1} \subseteq R$. Donc $R = R^{-1}$. Inversement, si $R = R^{-1}$ et $(a, b) \in R$, puis $(a, b) \in R^{-1}$, De sorte que $(b, a) \in R$. Ainsi, R est symétrique. **53.** R est réflexif si et seulement si $(a, a) \in R$ pour tout $a \in A$ si et seulement si $(a, a) \in R^{-1}$ [car $(a, a) \in R$ si et seulement si $(a, a) \in R^{-1}$] si et seulement si R^{-1} est flexive. **55.** Utilisez l'induction mathématique. Le résultat est trivial pour $n = 1$. Supposons que R^n est réflexif et transitif. Par Theorem 1, $R^{n} \subseteq R$. Pour voir que $R \subseteq R^{n+1} = R^n \circ R$, laissez $(a, b) \in R$. Par l'hypothèse inductive, $R^n = R$ et donc, est réflexive. Ainsi $(b, b) \in R^n$. Donc $(a, b) \in R^{n+1}$. **57.** Utilisez des induction ématique. Le résultat est trivial pour $n = 1$. Supposons que R^n est réflexif. Alors $(a, a) \in R^n$ pour tout *un* $\in A$ et $(a, a) \in R$. Ainsi $(a, a) \in R^n \circ R = R^{n+1}$ pour tout *un* $\in A$. **59.** Non, pour par exemple, prenez $R = \{(1, 2), (2, 1)\}$.

Section 9.2

1. $\{(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 3, 4), (2, 3, 4)\}$ **3.** (Nadir, 122, 34, Detroit, 08:10), (Acme, 221, 22, Denver, 08:17), (Acme, 122, 33, Anchorage, 08:22), (Acme, 323, 34, Honolulu 08:30), (Nadir, 199, 13, Détroit, 08:47), (Acme, 222, 22, Denver, 09:10), (Nadir, 322, 34, Detroit, 09:44) **5.** Compagnie aérienne et vol numéro, compagnie aérienne et heure de départ **7.** **a)** Oui **b)** Non **c)** Non **9.** **a)** Numéro de sécurité sociale **b)** Il n'y a pas deux personnes avec le même nom qui se trouve avoir la même adresse. **c)** Il n'y a pas deux personnes du même nom vivant ensemble. **11.** (Nadir, 122, 34, Détroit, 08: 10), (Nadir, 199, 13, Détroit, 08: 47), (Nadir, 322, 34, Detroit, 09: 44) **13.** (Nadir, 122, 34, Detroit, 08: 10), (Nadir, 199, 13, Detroit, 08: 47), (Nadir, 322, 34, Détroit, 09: 44), (Acme, 221, 22, Denver, 08: 17), (Acme, 222, 22, Denver, 09: 10) **15.** $P_{3,5,6}$

17.

Destination de la compagnie aérienne	
Nadir	Detroit
Acmé	Denver
Acmé	Ancrage
Acmé	Honolulu

Page 53

19.

Numéro de fournisseur	Partie_	Quantité du projet		Couleur_ code
23	1092	1	2	2
23	1101	3	1	1
23	9048	4	12	2
31	4975	3	6	2
31	3477	2	25	2
32	6984	4	dix	1
32	9191	2	80	4
33	1001	1	14	8

21. Les deux côtés de cette équation choisissent le sous-ensemble de R con-composé de ces n -tuples satisfaisant à la fois aux conditions C_1 et C_2. **23.** Les deux côtés de cette équation choisissent l'ensemble des n -tuples qui sont dans R, sont en S, et satisfaire à la condition C. **25.** Les deux côtés de cette équation choisir les m -tuples consistant en i_1 e, i_2 ème, ..., i_m ième composantes de n - uplets dans les deux R ou S.

27. Soit $R = \{ (a, b) \}$ et $S = \{ (a, c) \}$, $n = 2$, $m = 1$, et $i_1 = 1$; $P_1(R - S) = \{ (a) \}$, mais $P_1(R) - P_1(S) = \varnothing$.

29. a) J_2 suivi de $P_{1,3}$ **b)** $(23, 1), (23, 3), (31, 3), (32, 4)$

31. Il n'y a pas de clé primaire.

Section 9.3

1. a) $\begin{bmatrix} 1&1&1 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 0&1&0 \\ 1&1&0 \\ 0&0&1 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 1&1&1 \\ 0&1&1 \\ 0&0&1 \end{bmatrix}$ **ré)** $\begin{bmatrix} 0&0&1 \\ 0&0&0 \\ 1&0&0 \end{bmatrix}$

3. a) $(1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 3)$ **b)** $(1, 2), (2, 2), (3, 2)$ **c)** $(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)$ **5.** La relation est irréflexive si et seulement si la diagonal de la matrice ne contient que 0s. **7. a)** Réflexif, symétrique, transitive **b)** Antisymétrique, transitive **c)** Symétrique **9. a)** 4950 **b)** 9900 **c)** 99 **d)** 100 **e)** 1 **11.** Changer chaque 0 à 1 et chaque 1 à 0.

13. a) $\begin{bmatrix} 0&1&1 \\ 1&1&0 \\ 1&0&1 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 1&0&0 \\ 0&0&1 \\ 0&1&0 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 1&1&1 \\ 1&1&1 \\ 1&1&1 \end{bmatrix}$

15. a) $\begin{bmatrix} 0&0&1 \\ 1&1&0 \\ 0&1&1 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 1&1&0 \\ 0&1&1 \\ 1&1&1 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 0&1&1 \\ 1&1&1 \\ 1&1&1 \end{bmatrix}$

17. $n^2 - k$

19. a) 1 4 2 3 **b)** 1 4 2 3

c) 1 4 2 3 **d)** 1 4 2 3

21. Pour simplifier, nous avons indiqué des paires d'arêtes entre les deux mêmes sommets dans des directions opposées en utilisant un double pointe de flèche, plutôt que de tracer deux lignes distinctes.

une) 1 2 3 4 **b)** 1 2 3 4 **c)** 1 2 3 4

23. $\{ (a, b), (a, c), (b, c), (c, b) \}$ **25.** $(a, c), (b, a), (c, d), (d, b)$ **27.** $\{ (a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (d, d) \}$ **29.** La relation est asymétrique si et seulement si le graphe orienté n'a pas de boucles ni de chemins fermés de longueur 2. **31.** Exercice 23: irréflexif. Exercice 24: réflexe ive, antisymétrique, transitive. Exercice 25: irréflexif, anti-symétrique. **33.** Inversez la direction sur chaque bord du digramme pour R. **35.** Preuve par induction mathématique. *Base étape:* triviale pour $n = 1$. *Étape inductive:* supposons vrai pour k. Parce que $R^{k+1} = R^k \circ R$, sa matrice est $\mathbf{M}_R \odot \mathbf{M}_{R^k}$. Par le hypothèse inductive c'est $\mathbf{M}_R \odot \mathbf{M}_R^{[k]} = \mathbf{M}_R^{[k+1]}$.

Section 9.4

1. a) $\{ (0, 0), (0, 1), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 2), (3, 0), (3, 3) \}$ **b)** $\{ (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (3, 0) \}$ **3.** $\{ (a, b) \mid a$ divise b ou b divise $a \}$

5. une b c ré **sept.** une b c ré

9. a) a b c ré **b)** une b c ré **c)** un b c ré

11. a) une b c ré **b)** une b c ré

c) une b c ré

13. La fermeture symétrique de R est $R \cup R^{-1}$. $\mathbf{M}_{R \cup R^{-1}} = \mathbf{M}_R \vee \mathbf{M}_{R^{-1}} = \mathbf{M}_R \vee \mathbf{M}_R^t$. **15.** Seulement lorsque R est irréflexif,

Page 54

auquel cas il s'agit de sa propre fermeture. **17.** *a, a, a, a* ; *a, b, e, a* ; *a, d, e, a* ; *b, c, c, b* ; *b, e, a, b* ; *c, b, c, c* ; *c, c, b, c* ; *c, c, c, c* ; *ré, e, a, d* ; *d, e, e, d* ; *e, a, b, e* ; *e, a, d, e* ; *e, d, e, e* ; *e, e, d, e* ; *e, e, e, e* **19. a)** $\{(1,1),(1,5),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,5),(5,3),(5,4)\}$ **b)** $\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,5),(3,1),(3,3),(3,4),(3,5),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(5,1),(5,3),(5,5)\}$ **c)** $\{(1,1),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(4,1),(4,3),(4,4),(4,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5)\}$ **d)** $\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,3),(2,4),(2,5),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5)\}$ **e)** $\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5)\}$ **f)** $\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5)\}$ **21. a)** S'il y a un étudiant dent c qui partage une classe avec a et une classe avec b **b)** Si il y a deux étudiants c et d tels que a et c partagent une classe, c et d partagent une classe, et d et b partagent une classe **c)** S'il y a est une séquence $s_0, \ldots, s_n$ d'élèves avec $n \geq 1$ telle que $s_0 = a$, $s_n = b$, et pour chaque $i = 1, 2, \ldots, n$, s_i et s_{i-1} partage une classe **23.** Le résultat résulte de $(R^*)^{-1} = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n\right)^{-1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (R^n)^{-1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R^*$.

25. a) $\begin{bmatrix} 1&1&1&1\\ 1&1&1&1\\ 1&1&1&1\\ 1&1&1&1 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 0&0&0&0\\ 1&0&1&1\\ 1&0&1&1\\ 1&0&1&1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0&1&1&1\\ 0&0&1&1\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&0 \end{bmatrix}$ **ré)** $\begin{bmatrix} 1&1&1&1\\ 1&1&1&1\\ 1&1&1&1\\ 1&1&1&1 \end{bmatrix}$

27. Réponses identiques à celles de l'exercice 25. **29. a)** $\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,2),(3,3),(4,1),(4,2),(4,4)\}$ **b)** $\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4),(3,3),(4,1),(4,2),(4,4)\}$ **c)** $\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4),(3,3),(4,1),(4,2),(4,4)\}$ **31.** Algorithme 1: $O(n^{3.8})$; Algorithme 2: $O(n^3)$ **33.** Initialiser avec $\mathbf{A} := \mathbf{M}_R \vee \mathbf{I}_n$ et boucle seulement pour $i := 2$ à $n - 1$. **35. a)** Parce que R est réflexif, tout la relation qui la contient doit également être réflexive. **b)** Les deux $\{(0,0),(0,1),(0,2),(1,1),(2,2)\}$ et $\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1),(2,2)\}$ contiennent R et ont un nombre impair d'éléments, mais aucun n'est un sous-ensemble de l'autre.

ouvert la même année; une classe d'équivalence se compose de l'ensemble des bâtiments ouverts au cours d'une année donnée (tant était au moins un bâtiment ouvert cette année-là). (2) Deux bâtiments sont équivalents s'ils ont le même nombre d'histoires; les classes d'équivalence sont l'ensemble des bâtiments d'un étage, le ensemble de bâtiments de 2 étages, etc. (une classe pour chaque n pour qui comprend au moins un bâtiment à étages n). (3) Chaque construction dans lequel vous avez une classe équivaut à chaque bâtiment que vous avez une classe (y compris lui-même), et chaque bâtiment dans lequel vous n'avez pas de classe équivaut à chaque bâtiment dans lequel vous n'avez pas de classe (y compris elle-même); il y a deux classes d'équivalence - l'ensemble des bâtiments dans lesquels vous avoir une classe et l'ensemble des bâtiments dans lesquels vous n'avez pas (en supposant que ceux-ci ne sont pas vides). **7.** La déclaration « p est équivalent à q "signifie que p et q ont les mêmes entrées dans leurs tables de vérité. R est réflexif, car p a le même table de vérité comme p . R est symétrique, car si p et q ont la même chose table de vérité, alors q et p ont la même table de vérité. Si p et q ont les mêmes entrées dans leurs tables de vérité et q et r ont la mêmes entrées dans leurs tables de vérité, alors p et r font aussi, donc R est transitif. La classe d'équivalence de **T** est l'ensemble de tous les tautologies; la classe d'équivalence de **F** est l'ensemble de toutes les contradictions. **9. a)** $(x, x) \in R$ car $f(x) = f(x)$. Par conséquent, R est réflexif. $(x, y) \in R$ si et seulement si $f(x) = f(y)$, qui vaut si et seulement si $f(y) = f(x)$ si et seulement si $(y, x) \in R$. Par conséquent, R est symétrique. Si $(x, y) \in R$ et $(y, z) \in R$, alors $f(x) = f(y)$ et $f(y) = f(z)$. Par conséquent, $f(x) = f(z)$. Ainsi, $(x, z) \in R$. Il s'ensuit que R est transitif. **b)** Les ensembles $f^{-1}(b)$ pour b dans la plage de f **11.** Soit x une chaîne de bits de longueur 3 ou plus. Parce que x est d' accord avec lui - même dans les trois premiers bits, $(x, x) \in R$. Par conséquent, R est réflexif. Supposons que $(x, y) \in R$. Alors x et y d'accord dans les trois premiers bits. Par conséquent, y et x sont d'accord dans le premier trois bits. Ainsi, $(y, x) \in R$. Si (x, y) et (y, z) sont dans R , alors x et y s'accordent dans les trois premiers bits, tout comme y et z . Par conséquent, x et z sont d'accord dans les trois premiers bits. Par conséquent, $(x, z) \in R$. Ça suit que R est transitif. **13.** Cela découle de l'exercice 9, où f est la fonction qui prend une chaîne de bits de longueur 3 ou plus pour la paire ordonnée avec son premier bit comme premier composant et le troisième bit comme deuxième composant. **15.** Pour la réflexivité, $((a, b), (a, b)) \in R$ car $a + b = b + a$. Pour la symétrie, si $((a, b), (c, d)) \in R$, alors $a + d = b + c$, donc $c + b = d + a$, si $((c, d), (a, b)) \in R$. Pour la transitivité, si $((a, b), (c, d)) \in R$ et $((c, d), (e, f)) \in R$, alors $a + d = b + c$ et $c + e = d + f$, donc $a + d + c + e = b + c + d + f$, donc $a + e = b + f$, si $((a, b), (e, f)) \in R$. Une solution plus simple consiste à noter qu'en algèbre, la condition donnée est la même que la condition que $f((a, b)) = f((c, d))$, où $f((x, y)) = x - y$; donc par Exercice 9, c'est une relation d'équivalence. **17. a)** Cette

Section 9.5

1. **a)** Relation d'équivalence **b)** Non réflexive, non transitive **c)** Relation d'équivalence **d)** Non transitive **e)** Non symétrique, non transitive **3.** **a)** Relation d'équivalence **b)** Non transitive **c)** non réflexif, non symétrique, non transitif **d)** équivalence relation **e)** Pas réflexif, pas transitif **5.** Beaucoup de réponses sont possibles. (1) Deux bâtiments sont équivalents s'ils étaient

bas de l'exercice 9, où la fonction *f* de l'ensemble des fonctions différenciables (de **R** à **R**) à l'ensemble des fonctions (de **R** à **R**) est l'opérateur de différenciation. **b)** L'ensemble de tous fonctions de la forme $g(x) = x^2 + C$ pour une constante C **19.** Cela découle de l'exercice 9, où la fonction *f* de l'ensemble de toutes les URL vers l'ensemble de toutes les pages Web est la fonction qui attribue à chaque URL la page Web de cette URL. **21.** Non **23.** Non **25.** R est réflexif car une chaîne de bits s

Page 55

a le même nombre de 1 que lui. R est symétrique car s et t ayant le même nombre de 1 implique que t et s *le* font. R est transitif car s et t ayant le même nombre de 1, et t et u ayant le même nombre de 1 implique que s et *vous* avez le même nombre de 1. **27.** **a)** Les ensembles de personnes le même âge **b)** Les ensembles de personnes avec les mêmes deux parents **29.** L'ensemble de toutes les chaînes de bits avec exactement deux 1. **31.** **a)** Le ensemble de toutes les chaînes de bits de longueur 3 **b)** L'ensemble de toutes les chaînes de bits de longueur 4 qui se terminent par 1 **c)** L'ensemble de toutes les chaînes de bits de longueur 5 qui se termine 11 **d)** L'ensemble de toutes les chaînes de bits de longueur 8 cette fin 10101 **33.** Chacune des chaînes de 15 bits de longueur moins que quatre est dans une classe d'équivalence en soi: $[\lambda]_{R_4} = \{\lambda\}$, $[0]_{R_4} = \{0\}$, $[1]_{R_4} = \{1\}$, $[00]_{R_4} = \{00\}$, $[01]_{R_4} = \{01\}$, …, $[111]_{R_4} = \{111\}$. Les 16 classes d'équivalence restantes sont déterminés par les chaînes de bits de longueur 4: $[0000]_{R_4} = \{0000, 00000, 00001, 000000, 000001, 000010, 000011, 0000000, \ldots\}$, $[0001]_{R_4} = \{0001, 00010, 00011, 000100, 000101, 000110, 000111, 0001000, \ldots\}, \ldots, [1111]_{R_4} = \{1111, 11110, 11111, 111100, 111101, 111110, 111111, 1111000, \ldots\}$ **35.** **a)** $[2]_5 = \{i \mid i \equiv 2 \pmod 5\} = \{\ldots, -8, -3, 2, 7, 12, \ldots\}$ **b)** $[3]_5 = \{i \mid i \equiv 3 \pmod 5\} = \{\ldots, -7, -2, 3, 8, 13, \ldots\}$ **c)** $[6]_5 = \{i \mid i \equiv 6 \pmod 5\} = \{\ldots, -9, -4, 1, 6, 11, \ldots\}$ **d)** $[-3]_5 = \{i \mid i \equiv -3 \pmod 5\} = \{\ldots, -8, -3, 2, 7, 12, \ldots\}$ **37.** $\{6n + k \mid n \in \mathbf{Z}\}$ pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ **39.** **a)** $[(1, 2)] = \{(a, b) \mid a - b = -1\} = \{(1, 2), (3, 4), (4, 5), (5, 6), \ldots\}$ **b)** Chaque équiva-

La classe de lence peut être interprétée comme un entier (négatif, positif, ou zéro); en particulier, $[(a, b)]$ peut être interprété comme $a - b$. **41.** **a)** Non **b)** Oui **c)** Oui **d)** Non **43.** (a), (c), (e) **45.** (b), (d), (e) **47.** **a)** $\{(0, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 3), (5, 4), (5, 5)\}$ **b)** $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5)\}$ **c)** $\{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 3), (5, 4), (5, 5)\}$ **d)** $\{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$ **49.** $[0]_6 \subseteq [0]_3$, $[1]_6 \subseteq [1]_3$, $[2]_6 \subseteq [2]_3$, $[3]_6 \subseteq [0]_3$, $[4]_6 \subseteq [1]_3$, $[5]_6 \subseteq [2]_3$ **51.** Soit

deux réflexions et inversement la composition de deux réflexions tions est une rotation. Par conséquent, (C_1, C_2) appartient à R si et seulement si C_2 peut être obtenu à partir de C_1 par une composition de tions. Donc, si (C_1, C_2) appartient à R, il en va de même (C_2, C_1) parce que l'inverse de la composition des réflexions est également une position des réflexions (dans l'ordre inverse). Par conséquent, R est symétrique. Pour voir que R est transitif, supposons (C_1, C_2) et (C_2, C_3) appartiennent à R. Prendre la composition du reflet Dans chaque cas, une composition de réflexions que (C_1, C_3) appartient à R. **b)** Nous exprimons des colorations avec séquences de longueur quatre, avec r et b désignant le rouge et le bleu, respectivement. Nous listons les lettres indiquant les couleurs de la partie supérieure carré gauche, carré supérieur droit, carré inférieur gauche et inférieur carré de droite, dans cet ordre. Les classes d'équivalence sont: $\{rrrr\}$, $\{bbbb\}$, $\{rrrb, rrbr, rbrr, brrr\}$, $\{bbbr, bbrb, brbb, rbbb\}$, $\{rbbr, brrb\}$, $\{rrbb, brbr, bbrr, rbrb\}$. **61.** 5 **63.** Oui

65. R **67.** **Former d'** abord la fermeture réflexive de R, puis former la fermeture symétrique de la fermeture réflexive, et enfin former la fermeture transitive de la fermeture symétrique de la fermeture réfléchissante. **69.** $p(0) = 1$, $p(1) = 1$, $p(2) = 2$, $p(3) = 5$, $p(4) = 15$, $p(5) = 52$, $p(6) = 203$, $p(7) = 877$, $p(8) = 4140$, $p(9) = 21147$, $p(10) = 115975$

Section 9.6

1. **a)** Est un ordre partiel **b)** Non antisymétrique, non transitif **c)** Est une commande partielle **d)** Est-ce une commande partielle **e)** Non anti-symétrique, non transitif **3.** **a)** Non **b)** Non **c)** Oui **5.** **a)** Oui **b)** Non **c)** Oui **d)** Non **7.** **a)** Non **b)** Oui **c)** Non **9.** Non **11.** Oui **13.** **a)** $\{(0, 0), (1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1), (2, 2)\}$ **b)** $(\mathbf{Z}, \leq)$ **c)** $(P(\mathbf{Z}), \subseteq)$ **d)** $(\mathbf{Z}^+$, "Est un multiple de") **15.** **a)** $\{0\}$ et $\{1\}$, par exemple **b)** 4 et 6, par exemple **17.** **a)** $(1, 1, 2) < (1, 2, 1)$ **b)** $(0, 1, 2, 3) < (0, 1, 3, 2)$ **c)** $(0, 1, 1, 1, 0) < (1, 0, 1, 0, 1)$ **19.** $0 < 0001 < 001 < 01 < 010 < 0101 < 011 < 11$

A être un ensemble dans la première partition. Choisissez un élément particulier x de A . L'ensemble de toutes les chaînes de bits de longueur 16 qui correspondent à x sur les quatre derniers bits sont l'un des ensembles de la deuxième partition, et il est clair que chaque chaîne de A *se* trouve dans cet ensemble. **53.** Nous affirmons que chaque classe d'équivalence $[x]_{R_{31}}$ est un sous-ensemble de la classe d'équivalence $[x]_{R_8}$. Pour le montrer, choisissez un élément arbitraire $y \in [x]_{R_{31}}$.

Alors y est équivalent à x sous R_{31} , donc soit $y = x$ soit y et x comptent chacun au moins 31 caractères et conviennent de leurs 31 premiers caractères personnages. Parce que les chaînes d'au moins 31 caractères et se mettre d'accord sur leurs 31 premiers caractères forcément sont au moins 8 caractères longs et d'accord sur leurs 8 premiers caractères, nous savons que $y = x$ ou y et x sont chacun d'au moins 8 caractères long et d'accord sur leurs 8 premiers caractères. Cela signifie que y est équivalent à x sous R_8 , donc $y \in [x]_{R_8}$. **55.** $\{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c), (d, d), (d, e), (e, d), (e, e)\}$ **57. a)** $\mathbf{Z}$ **b)** $\{n + \frac{1}{2} \mid n \in \mathbf{Z}\}$ **59. a)** R est réflexive car toute coloration peut être obtenue d'elle-même via une rotation à 360 degrés. Pour voir que R est symétrique et transpositif, utilisez le fait que chaque rotation est la composition de

21. 15

11

dix

5

2

0

23. a) 8

4 6

2

b) 2 3 5 sept 11 13

3 5 sept

1

1

Page 56

c) 48 36 24 12 6 2 3 1

d) 64 32 16 8 4 2 1

25. $(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (a, a), (b, b), (c, c), (d, d)$ **27.** $(a, a), (a, g), (a, d), (a, e), (a, f), (b, b), (b, g), (b, d), (b, e), (b, f), (c, c), (c, g), (c, d), (c, e), (c, f), (g, d), (g, e), (g, f), (g, g), (d, d), (e, e), (f, f)$ **29.** $(\emptyset, \{a\}), (\emptyset, \{b\}), (\emptyset, \{c\}), (\{a\}, \{a, b\}), (\{a\}, \{a, c\}), (\{b\}, \{a, b\}), (\{b\}, \{b, c\}), (\{c\}, \{a, c\}), (\{c\}, \{b, c\}), (\{a, b\}, \{a, b, c\}), (\{a, c\}, \{a, b, c\}) (\{b, c\}, \{a, b, c\})$ **31.** Soit $(S, \preceq)$ un fini-poset nite. Nous montrerons que ce poset est le transi-fermeture définitive de sa relation de couverture. Supposons que (a, b) soit la fermeture réflexive transitive de la relation de couverture. alors $a = b$ ou $a \prec b$, donc $a \preceq b$, ou bien il y a une séquence $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tels que $a \prec a_1 \prec a_2 \prec \cdots \prec a_n \prec b$, dans auquel cas encore $a \preceq b$ par la transitivité de $\preceq$. Inversement,

suit que $x = y$. Par l'exercice 40 (b) y est unique. Par conséquent, x est unique. **43. a)** Oui **b)** Non **c)** Oui **45.** Utilisez des mathématiques induction. Soit $P(n)$ «Tout sous-ensemble avec n éléments d'un le treillis a une limite inférieure au moins et une limite inférieure la plus grande. *Étape de base:* $P(1)$ est vrai car la limite supérieure la moins élevée et la borne inférieure la plus grande de $\{x\}$ sont les deux x . *Étape inductive:* Assupposons que $P(k)$ est vrai. Soit S un ensemble avec $k + 1$ éléments. Soit $x \in S$ et $S = S - \{x\}$. Parce que S a k éléments, par l'hypothèse inductive, il a au moins la borne supérieure y et une plus grande borne inférieure a . Maintenant, parce que nous sommes dans un réseau, il y a des éléments $z = \text{lub}(x, y)$ et $b = \text{glb}(x, a)$. nous sont faites si nous pouvons montrer que z est la limite inférieure de S et b est le plus grand minorant de S . Pour montrer que z est la borne inférieure de S , notons d'abord que si $w \in S$, alors $w = x$ ou $w \in S$. Si $w = x$ alors $w \preceq z$ parce que z est le limite inférieure de x et y . Si $w \in S$, alors $w \preceq z$ est-cause $w \preceq y$, ce qui est vrai parce que y est la borne supérieure la moins de S , et $y \preceq z$, ce qui est vrai parce que $z = \text{lub}(x, y)$. À voir que z est la plus petite borne supérieure de S , supposons que u est un borne supérieure de S . Notez qu'un tel élément u doit être un limite supérieure de x et y , mais parce que $z = \text{lub}(x, y)$, il suit que $z \preceq u$. Nous omettons l'argument similaire selon lequel b est le grand-is borne inférieure de S . **47. a)** Non **b)** Oui **c)** (*Propriétaire,* $\{$ *Cheetah, Puma* $\}$), (*Restreint,* $\{$ *Cheetah, Puma* $\}$), (*Registered,* $\{$ *Cheetah, Puma* $\}$), (*Propriétaire,* $\{$ *Cheetah, Puma, Impala* $\}$), (*Restreint,* $\{$ *Cheetah, Puma, Impala* $\}$), (*Enregistré,*

supposons que $a \prec b$. Si $a = b$ alors (a, b) est dans le réflexe fermeture transitive passive de la relation de couverture. Si $a \prec b$ et il n'y a pas de z tel que $a \prec z \prec b$, alors (a, b) est dans le champ et donc dans sa fermeture transitive réflexive. Sinon, soit $a \prec a_1 \prec a_2 \prec \cdots \prec a_n \prec b$ soit le plus long séquence possible de cette forme (qui existe parce que le poset est fini). Ensuite, aucun élément intermédiaire ne peut être inséré, donc chaque paire $(a, a_1), (a_1, a_2), \ldots, (a_n, b)$ se trouve dans le lation, de nouveau (a, b) est dans sa fermeture transitive réflexive.
33. **a)** 24, 45 **b)** 3, 5 **c)** Non **d)** Non **e)** 15, 45 **f)** 15 **g)** 15, 5, 3 **h)** 15 **35.** **a)** $\{1, 2\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$ **b)** $\{1\}$, $\{2\}$, $\{4\}$ **c)** Non **d)** Non **e)** $\{2, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$ **f)** $\{2, 4\}$ **g)** $\{3, 4\}$, $\{4\}$ **h)** $\{3, 4\}$ **37.** Parce que $(a, b) \wedge (a, b)$, ^ est réflexif. Si $(a_1, a_2) \wedge (b_1, b_2)$ et $(a_1, a_2) = (b_1, b_2)$, soit $a_1 \prec b_1$, soit $a_1 = b_1$ et $a_2 \prec b_2$. Dans les deux cas, (b_1, b_2) n'est pas inférieur ou égal à (a_1, a_2) . Par conséquent, ^ est antisymétrique. Supposer que $(a_1, a_2) \prec (b_1, b_2) \prec (c_1, c_2)$. Alors si $a_1 \prec b_1$ ou $b_1 \prec c_1$, nous avons un $_1 \prec c_1$, donc $(a_1, a_2) \prec (c_1, c_2)$, mais si $a_1 = b_1 = c_1$, puis $a_2 \prec b_2 \prec c_2$, ce qui implique que $(a_1, a_2) \prec (c_1, c_2)$. Par conséquent, ^ est transitif. **39.** Parce que $(s, t) \wedge (s, t)$, ^ est réflexif. Si $(s, t) \wedge (u, v)$ et $(u, v) \wedge (s, t)$, alors $s \wedge u \wedge s$ et $t \wedge v \wedge t$; par conséquent, $s = u$ et $t = v$. Par conséquent, ^ est antisymétrique. Supposons que $(s, t) \wedge (u, v) \wedge (w, x)$. alors $s \wedge u$, $t \wedge v$, $u \wedge w$ et $v \wedge x$. Il s'ensuit que $s \wedge w$ et $t \wedge x$. Par conséquent, $(s, t) \wedge (w, x)$. Par conséquent, ^ est transitif.
41. **a)** Supposons que x soit maximal et que y soit le plus grand élément. Puis $x \wedge y$. Parce que x n'est pas inférieur à y , il suit bas que $x = y$. Par l'exercice 40 (a) y est unique. Par conséquent, x est unique. **b)** Supposons que x soit minimal et que y soit le petit-élément est. Alors x y . Parce que x n'est pas supérieur à y , il

$\{$ *Guépard, Puma, Impala* $\}$) **d)** (*Non propriétaire,* $\{$ *Impala, Puma* $\}$), (*Propriétaire,* $\{$ *Impala, Puma* $\}$), (*Restreint,* $\{$ *Impala, Puma* $\}$), (*Nonproprietary,* $\{$ *Impala* $\}$), (*propriétaire,* $\{$ *Impala* $\}$), (*Accès restreint,* $\{$ *Impala* $\}$), (*Nonproprietary,* $\{$ *Puma* $\}$), (*Proprietary,* $\{$ *Puma* $\}$), (*Restreint,* $\{$ *Puma* $\}$), (*Nonproprietary,* $\emptyset$), (*Propriétaire,* $\emptyset$), (*Restreint,* $\emptyset$) **49.** Soit être l'ensemble de tous partitions d'un ensemble S avec $P_1 \wedge P_2$ si P_1 est un raffinement de P_2 , c'est-à-dire si chaque ensemble dans P_1 est un sous-ensemble d'un ensemble dans P_2 . Tout d'abord, nous montrons que $(, \wedge)$ est un poset. Parce que $P \wedge P$ pour chaque partition P , ^ est réflexif. Supposons maintenant que $P_1 \wedge P_2$ et $P_2 \wedge P_1$. Laisser $T \in P_1$. Parce que $P_1 \wedge P_2$, il existe un ensemble $T \in P_2$ tel que $T \subseteq T$. Parce que $P_2 \wedge P_1$ il y a un ensemble $T \in P_1$ tel que $T \subseteq T$. Il en résulte que $T \subseteq T$. Mais parce que P_1 est une partition, $T = T$, ce qui implique que $T = T$ parce que $T \subseteq T \subseteq T$. Ainsi, $T \in P_2$. En inversant les rôles de P_1 et P_2, il s'ensuit que chaque ensemble dans P_2 est également dans P_1 . Par conséquent, $P_1 = P_2$ et ^ est antisymétrique. Supposons ensuite que $P_1 \wedge P_2$ et $P_2 \wedge P_3$. Laisser $T \in P_1$. Ensuite , il y a un ensemble $T \in P_2$ tels que $T \subseteq T$. Car $P_2 \wedge P_3$ il y a un ensemble $T \in P_3$ de telle sorte que $T \subseteq T$. Ça signifie que $T \subseteq T$. Par conséquent, $P_1 \wedge P_3$. Il s'ensuit que ^ est transitif. La plus grande limite inférieure des partitions P_1 et P_2 est la partition P dont les sous-ensembles sont les ensembles non vides de la forme $T_1 \cap T_2$ où $T_1 \in P_1$ et $T_2 \in P_2$. Nous omettons la justification de cette déclaration ici. La limite la moins haute des partitions P_1 et P_2 est la partition qui correspond à l'équivalence relation dans laquelle $x \in S$ est liée à $y \in S$ s'il y a séquence $x = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = y$ pour certains non négatifs entier n tel que pour chaque i de 1 à n , x_{i-1} et x_i sont dans le même élément de P_1 ou de P_2 . Nous omettons les détails que c'est une relation d'équivalence et les détails de la preuve que cela est

la limite la moins haute des deux partitions. **51.** Par exercice 45 il y a une borne inférieure et une borne inférieure la plus grande pour l'ensemble du réseau fini. Par définition, ces éléments sont les respectivement le plus grand et le moins. **53.** Les moindres ment d'un sous-ensemble de $\mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+$ est cette paire qui a le plus petit première coordonnée possible, et, s'il y en a plusieurs paire, cette paire parmi celles qui ont le plus petit deuxième co-ordonner. **55.** Si x est un entier dans une séquence décroissante de éléments de ce poset, alors tout au plus $|x|$ les éléments peuvent suivre x dans la séquence, à savoir les entiers dont les valeurs absolues sont $|x| - 1, |x| - 2, \ldots, 1, 0$. Il ne peut donc y avoir d'infini séquence décroissante. Ce n'est pas un ensemble totalement ordonné, car 5 et -5, par exemple, sont incomparables. **57.** Pour trouver de deux nombres rationnels est plus grand, écrivez-les avec un positif dénominateur commun et comparer les numérateurs. Montrer que

transitif **3.** $((a, b), (a, b)) \in R$ car $a + b = a + b$. Par conséquent, R est réflexif. Si $((a, b), (c, d)) \in R$ alors $a + d = b + c$, de sorte que $c + b = d + a$. Il en résulte que $((c, d), (a, b)) \in R$. Par conséquent, R est symétrique. Supposons que $((a, b), (c, d))$ et $((c, d), (e, f))$ appartiennent à R . Alors $a + d = b + c$ et $c + f = d + e$. L'addition de ces deux équations et un tractage $c + d$ des deux côtés donne $a + f = b + e$. Par conséquent, $((a, b), (e, f))$ appartient à R . Par conséquent, R est transitif.
5. Supposons que $(a, b) \in R$. Parce que $(b, b) \in R$, il s'ensuit que $(a, b) \in R_2$. **7.** Oui, oui **9.** Oui, oui **11.** Deux enregistrements avec des clés identiques dans la projection aurait des clés identiques dans la version originale. **13.** $(\cup R)_{-1} = {}_{-1} \cup R_{-1} =$ $\cup R_{-1}$
15. **a)** $R = \{ (a, b), (a, c) \}$. La fermeture transitive du la fermeture symétrique de R est $\{ (a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c) \}$ et est différent du

cet ensemble est dense, supposons que $x < y$ sont deux nombres rationnels bers. Alors leur moyenne, c'est-à-dire $(x + y) / 2$, est un nombre rationnel entre eux. **59.** Soit $(S, \preccurlyeq)$ un ensemble partiellement ordonné. Il suffit de montrer que chaque sous-ensemble non vide de S contient un moindre élément si et seulement s'il n'existe pas de séquence décroissante suite des éléments $a_1, a_2, a_3, \ldots$ dans S (ie, où $a_{i+1} \prec a_i$ pour tous i). Une séquence infinie décroissante d'éléments clairement n'a pas le moindre élément. Inversement, soit A tout sous-vide non vide ensemble de S qui n'a pas le moindre élément. Parce que A est non vide, choisir *un* $_1 \in A$. Parce *qu'un* $_1$ n'est pas le moindre élément de A , choisissez *un* $_2 \in A$ avec *un* $_2 \prec a_1$. Parce *qu'un* $_2$ n'est pas le moindre élément de A , choisissez *un* $_3 \in A$ avec *un* $_3 \prec a_2$. Continuez dans De cette manière, la production d' une séquence infinie décroissante dans S .

61. $a \prec_t b \prec_t c \prec_t d \prec_t e \prec_t f \prec_t g \prec_t h \prec_t i \prec_t j \prec_t k \prec_t l \prec_t m$ **63.** $1 \prec 5 \prec 2 \prec 4 \prec 12 \prec 20$,

$1 \prec 2 \prec 5 \prec 4 \prec 12 \prec 20$, $1 \prec 2 \prec 4 \prec 5 \prec 12 \prec 20$,
$1 \prec 2 \prec 4 \prec 12 \prec 5 \prec 20$, $1 \prec 5 \prec 2 \prec 4 \prec 20 \prec 12$,
$1 \prec 2 \prec 5 \prec 4 \prec 20 \prec 12$, $1 \prec 2 \prec 4 \prec 5 \prec 20 \prec 12$

65. $A \prec C \prec E \prec B \prec D \prec F \prec G$, $A \prec E \prec C \prec B \prec D \prec F \prec G$, $C \prec A \prec E \prec B \prec D \prec F \prec G$, $C \prec E \prec A \prec B \prec D \prec F \prec G$, $E \prec A \prec C \prec B \prec D \prec F \prec G$, $E \prec C \prec A \prec B \prec D \prec F \prec G$, $A \prec C \prec B \prec E \prec D \prec F \prec G$, $C \prec A \prec B \prec E \prec D \prec F \prec G$, $A \prec C \prec B \prec D \prec E \prec F \prec G$, $C \prec A \prec B \prec D \prec E \prec F \prec G$, $A \prec C \prec E \prec B \prec F \prec D \prec G$, $A \prec E \prec C \prec B \prec F \prec D \prec G$, $C \prec A \prec E \prec B \prec F \prec D \prec G$, $C \prec E \prec A \prec B \prec F \prec D \prec G$, $E \prec A \prec C \prec B \prec F \prec D \prec G$, $E \prec C \prec A \prec B \prec F \prec D \prec G$, $A \prec C \prec B \prec E \prec F \prec D \prec G$, $C \prec A \prec B \prec E \prec F \prec D \prec G$ **67.** Déterminer l'utilisateur

besoins ≺ Rédiger les exigences fonctionnelles ≺ Configurer les sites de test ≺ Développer la configuration système requise ≺ Rédiger la documentation ≺ Développer module A ≺ Develop module B ≺ Develop module C ≺ Intégrer les modules ≺ Test α ≺ Test β ≺ Achèvement

Exercices supplémentaires

1. a) Irréflexif (nous n'incluons pas la chaîne vide), symétrique ric **b)** Irréflexif, symétrique **c)** Irréflexif, antisymétrique,

fermeture symétrique de la fermeture transitive de R , qui est $\{(a, b), (a, c), (b, a), (c, a)\}$. **b)** Supposons que (a, b) soit la fermeture symétrique de la fermeture transitive de R . Nous devons montrent que (a, b) est dans la fermeture transitive du symétrique fermeture de R . Nous savons qu'au moins l'un de (a, b) et (b, a) est dans la fermeture transitive de R . Par conséquent, il existe soit un chemin de a à b dans R ou un chemin de b à a dans R (ou les deux). dans le Dans le premier cas, il y a un chemin de a vers b dans le cercle symétrique sûr de R . Dans ce dernier cas, nous pouvons former un chemin de a à b dans la fermeture symétrique de R en inversant les directions de tous les bords dans un chemin de b à a , en reculant. Par conséquent, (a, b) est dans la fermeture transitive de la fermeture symétrique de R .

17. La fermeture de S par rapport au bien **P** est une relation avec la propriété **P** qui contient R parce que $R \subseteq S$. D'où le la fermeture de S par rapport au bien **P** contient la fermeture de R par rapport à la propriété **P** . **19.** Utilisez l'idée de base de L'algorithme de Warshall, sauf que $w_{ij}^{[k]}$ égale à la longueur du chemin le plus long de v_i à v_j en utilisant des sommets intérieurs avec scripts ne dépassant pas k , et égal à -1 s'il n'y en a pas chemin. Pour trouver $w_{ij}^{[k]}$ à partir des entrées de $\mathbf{W}_{k-1}$, déterminer pour chaque paire (i, j) s'il y a des chemins de v_i à v_k et de v_k à v_j en utilisant aucun sommet marqué supérieur à k . Si soit $w_{ik}^{[k-1]}$ ou $w_{kj}^{[k-1]}$ est -1, alors une telle paire de chemins n'existe pas, donc définir $w_{ij}^{[k]} = w_{ij}^{[k-1]}$. Si une telle paire de chemins existe, alors il y a deux possibilités. Si $w_{kk}^{[k-1]} > 0$, il y a des chemins arbitraires longue longueur de v_i à v_j , donc réglez $w_{ij}^{[k]} = \infty$. Si $w_{kk}^{[k-1]} = 0$, définir $w_{ij}^{[k-1]} = \max(w_{ij}^{[k-1]}, w_{ik}^{[k-1]} + w_{kj}^{[k-1]})$. (Prenez d'abord $\mathbf{W}_0 = \mathbf{M}_R$.) **21.** 25 **23.** Parce que $A_i \cap B_j$ est un sous-ensemble de A_i et de B_j , la collection de sous-ensembles est un raffinement de chacun des partitions données. Nous devons montrer que c'est une partition. Par construction, chacun de ces ensembles est non vide. Pour voir que leur union est S , supposons que $s \in S$. Parce que P_1 et P_2 sont partitions de S , il existe des ensembles A_i et B_j tels que $s \in A_i$ et $s \in B_j$. Donc $s \in A_i \cap B_j$. Par conséquent, l'union de ces ensembles est S . À voir qu'ils sont disjoints deux à deux, notez que sauf si $i = i$ et $j = j$, $(A_i \cap B_j) \cap (A_i \cap B_j) = (A_i \cap A_i) \cap (B_j \cap B_j) = \emptyset$.

25. La relation de sous-ensemble est une commande partielle sur toute collection d'ensembles, car il est réflexif, antisymétrique et transitif. Ici, la collection d'ensembles est $\mathbf{R}(S)$. **27.** Trouver une recette ≺ Acheter

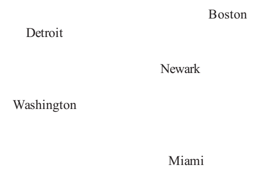
fruits de mer ≺ Achetez l'épicerie ≺ Lavez les crustacés ≺ Coupez le gingembre et ail ≺ Nettoyez le poisson ≺ Riz à la vapeur ≺ Coupez le poisson ≺ Lavez les légumes etables ≺ Hacher les châtaignes d'eau ≺ Faire des garnitures ≺ Cuire dans le wok ≺ Disposer sur un plateau ≺ Servir **29. a)** Le seul

limite de x doit être inférieure à x , donc x est le plus grand inférieur lié. La deuxième déclaration est le double de la première; nous omettons sa preuve. **d)** x est un inférieur et un supérieur, lié à lui-même et it-soi, et le plus grand, et le moins, un tel lié. **41. a)** Parce que tichain avec plus d'un élément est $\{c, d\}$. **b)** Le seul les antichaines avec plus d'un élément sont $\{b, c\}$, $\{c, e\}$ et $\{d, e\}$. **c)** Les seules antichaines à plusieurs éléments sont $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$, $\{d, e\}$, $\{d, f\}$, $\{e, f\}$ et $\{d, e, f\}$. **31.** Soit $(S, \preceq)$ un poset fini, et soit A un chaîne maximale. Parce que $(A, \preceq)$ est aussi un poset, il doit avoir un élément minimal m. Supposons que m n'est pas minime dans S. Il y aurait alors un élément a de S avec $a \prec m$. Comment-jamais, cela rendrait l'ensemble $A \cup \{a\}$ une chaîne plus grande que A. Pour le montrer, il faut montrer que a est comparable à tout élément de A. Parce que m est comparable à chaque élément de A et m est minimale, il s'ensuit que $m \prec x$ lorsque x est A et $x = m$. Parce *que* $a \prec m$ et $m \prec x$, le transitif montre de droit qui $a \prec x$ pour chaque élément de A. **33.** Soit aRb indiquent que a est un descendant de b. Par l'exercice 32, si aucun ensemble de $n + 1$ personnes dont aucun n'est descendant d'aucun autre (une antichaine) existe, alors $k \leq n$, donc l'ensemble peut être partitionné en $k \leq n$ chaînes. Selon le principe du pigeonnier, au moins un des ces chaînes contiennent au moins $m + 1$ personnes. **35.** Nous prouvons par contradiction que si S n'a pas de séquence décroissante infinie et $\forall x\ (\{\forall y\,[y \prec x \rightarrow P(y)]\} \rightarrow P(x))$, alors $P(x)$ est vrai pour tous $x \in S$. S'il ne considère pas que $P(x)$ est vrai pour tout $x \in S$, soit x_1 soit un élément de S tel que $P(x_1)$ n'est pas vrai. Puis par la déclaration conditionnelle déjà donnée, ce doit être le cas que $\forall y\,[y \prec x_1 \rightarrow P(y)]$ n'est pas vrai. Cela signifie qu'il est un peu x_2 avec $x_2 \prec x_1$ tel que $P(x_2)$ n'est pas vrai. Encore en invoquant l'instruction conditionnelle, nous obtenons un $x_3 \prec x_2$ tel que $P(x_3)$ n'est pas vrai, et ainsi de suite pour toujours. Cela contredit la bien-fondé de notre poset. Par conséquent, $P(x)$ est vrai pour tous $x \in S$. **37.** Supposons que R est un quasi-ordre. Parce que R est réfléchi, si $un \in A$, alors $(a, a) \in R$. Ceci implique que $(a, a) \in R^{-1}$. Par conséquent, $a \in R \cap R^{-1}$. Il s'ensuit que $R \cap R^{-1}$ est réfléchi. $R \cap R^{-1}$ est symétrique pour toute relation R parce que, pour toute relation R, si $(a, b) \in R$ alors $(b, a) \in R^{-1}$ et vice versa. Pour montrer que $R \cap R^{-1}$ est transitif, supposons que $(a, b) \in R \cap R^{-1}$ et $(b, c) \in R \cap R^{-1}$. Parce que $(a, b) \in R$ et $(b, c) \in R$, $(a, c) \in R$, car R est transitif. Simi-surtout, parce que $(a, b) \in R^{-1}$ et $(b, c) \in R^{-1}$, $(b, a) \in R$ et $(c, b) \in R$, donc $(c, a) \in R$ et $(a, c) \in R^{-1}$. Par conséquent, $(a, c) \in R \cap R^{-1}$. Il s'ensuit que $R \cap R^{-1}$ est une équiva-relation de lence. **39.** **a)** Parce que glb (x, y) = glb (y, x) et lub (x, y) = lub (y, x), il s'ensuit que $x \wedge y = y \wedge x$ et $x \vee y = y \vee x$. **b)** En utilisant la définition, $(x \wedge y) \wedge z$ est une limite inférieure de x, y et z supérieure à toutes les autres borne inférieure. Parce que x, y et z jouent des rôles interchangeables, $x \wedge (y \wedge z)$ est le même élément. De même, $(x \vee y) \vee z$ est une limite supérieure de x, y et z qui est inférieure à toutes les autres limite supérieure. Parce que x, y et z jouent des rôles interchangeables, $x \vee (y \vee z)$ est le même élément. **c)** Pour montrer que $x \wedge (x \vee y) = x$ il suffit de montrer que x est la plus grande borne inférieure de x et $x \vee y$. Notez que x est une borne inférieure de x, et étant-car $x \vee y$ est par définition supérieur à x, x est une borne inférieure pour cela aussi. Par conséquent, x est une borne inférieure. Mais plus bas 1 est le seul élément supérieur ou égal à 1, c'est le seul borne supérieure pour 1 et donc la seule valeur possible de la plus petite borne supérieure de x et 1. **b)** Parce que $x \preceq 1$, x est un borne inférieure pour x et 1 et aucune autre borne inférieure ne peut être supérieur à x, donc $x \wedge 1 = x$. **c)** Parce que $0 \preceq x$, x est une limite supérieure pour x et 0 et aucune autre limite ne peut être moins de x, donc $x \vee 0 = x$. **d)** Parce que 0 est le seul élément inférieur ou égal à 0, c'est la seule borne inférieure pour 0 et donc la seule valeur possible de la plus grande borne inférieure de x et 0. **43.** $L = (S, \subseteq)$ où $S = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ **45.** Oui **47.** Le complément d'un sous - ensemble $X \subseteq S$ est son complément $S - X$. Pour le prouver, notez que $X \vee (S - X) = 1$ et $X \wedge (S - X) = 0$ car $X \cup (S - X) = S$ et $X \cap (S - X) = \emptyset$. **49.** Pensez au grille rectangulaire représentant les éléments d'une matrice. Ainsi nous numéro de haut en bas et de gauche à droite. L'ordre partiel est que $(a, b) \preceq (c, d)$ ssi $a \leq c$ et $b \leq d$. Notez que $(1, 1)$ est le moindre élément sous cette relation. le les règles pour Chomp comme expliqué dans le chapitre 1 coïncident avec le règles énoncées dans le préambule ici. Mais maintenant, nous pouvons identifier point (a, b) avec le nombre naturel $p^{a-1} q^{b-1}$ pour tous a et b avec $1 \leq a \leq m$ et $1 \leq b \leq n$. Cela identifie les points la grille rectangulaire avec l'ensemble S dans cet exercice, et la partie l'ordre décisif $\preceq$ qui vient d'être décrit est le même que la relation de division, car $p^{a-1} q^{b-1} \mid p^{c-1} q^{d-1}$ si et seulement si l'exposant de p à gauche ne dépasse pas l'exposant de p à droite, et de même pour q.

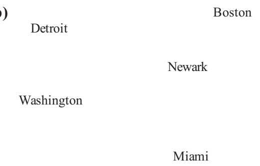
CHAPITRE 10

Section 10.1

1. **a)**



b)



c) Boston
Detroit
Newark
Washington
Miami

ré) Boston
Detroit
Newark
Washington
Miami

e) Boston
Detroit
Newark
Washington
Miami

3. Simple graphique **5.** Pseudographe **7.** Réalisé graphique **9.** *Multigraph* dirigé **11.** Si uRv , alors il y a un bord associé à $\{u, v\}$. Mais $\{u, v\} = \{v, u\}$, donc cette arête est associé à $\{v, u\}$ et donc vRu . Ainsi, par définition, R est une relation symétrique. Un simple graphique ne permet pas boucles; par conséquent, uRu ne tient jamais, et donc par définition R est irréflexif.

13. a) A_1 A_2
A_5 A_3
A_4

b) A_1 A_2
A_5 A_3
A_4

c) A_1 A_2
A_6 A_3
A_5 A_4

15. Poilu
Grive solitaire Robin Pivert
Geai bleu moqueur Sittelle

17. Fermat Descartes
Mersenne
Aristote Euclide Ératosthène
Fibonacci Maurolico
al-Khowarizmi
Goldbach
Boiteux
Bézout
Stirling
De Morgan Gauss
Lovelace Dodgson
Boole

19. Président
Réalisateur, Recherche et développement
Réalisateur, commercialisation
Réalisateur, opérations
Chef financier officier

21. Tigres Geais bleus
Orioles Cardinaux

23. Nous trouvons les numéros de téléphone dans le graphique d'appel pour février qui ne sont pas présents dans le graphique d'appel pour janvier et vice inversement. Pour chaque numéro que nous trouvons, nous faisons une liste des numéros bers ils ont appelé ou ont été appelés en utilisant les bords de l'appel graphique. Nous examinons ces listes pour trouver de nouveaux numéros de téléphone. bers en février qui avaient des schémas d'appels similaires à disparus numéros de téléphone en janvier. **25.** Nous utilisons le modèle graphique qui a des adresses e-mail comme sommets et pour chaque message envoyé, un bord entre l'adresse e-mail de l'expéditeur et le adresse e-mail du destinataire. Pour chaque adresse e-mail, nous peut faire une liste des autres adresses auxquelles ils ont envoyé des messages et une liste d'autres adresses à partir desquelles ils ont reçu des messages. Si deux adresses e-mail avaient presque le même schéma, nous comprendre que ces adresses auraient pu appartenir à la même personne ayant récemment changé d'adresse e-mail. **27.** Soit V l'ensemble des personnes présentes à la fête. Soit E l'ensemble de paires ordonnées (u, v) en $V \times V$ telles que u connaisse le nom de v. Les bords sont dirigés, mais plusieurs bords ne sont pas autorisés. Littéralement, il y a une boucle à chaque sommet, mais pour simplifier, le le modèle pourrait omettre les boucles. **29. Les** sommets sont les cours; les bords sont dirigés; bord uv signifie que le cours u est une condition préalable pour le cours v ; les cours sans prérequis sont des sommets avec en degré 0; cours qui ne sont prérequis pour aucun autre les cours sont des sommets avec un degré 0. **31.** Soit l'ensemble des sommets être un ensemble de personnes, et deux sommets sont joints par un bord si les deux personnes étaient jamais mariées. Ignorer les complications ce graphique a la propriété qu'il existe deux types de sommets (hommes et femmes), et chaque arête rejoint les sommets de types opposés.

33. S_6

S_5

S_4

S_2

S_1 S_3 S_7

35. Représentez les personnes du groupe par des sommets. Mettez un dirigé arête dans le graphique pour chaque paire de sommets. Étiqueter le bord du sommet représentant A au sommet représentant B avec un + (plus) si A aime B , un - (moins) si A n'aime pas B , et un 0 si A est neutre à propos de B .

Section 10.2

1. $v = 6$; $e = 6$; deg $(a) = 2$, deg $(b) = 4$, deg $(c) = 1$, deg $(d) = 0$, deg $(e) = 2$, deg $(f) = 3$; c est pendentif; d est isolé. **3.** $v = 9$; $e = 12$; deg $(a) = 3$, deg $(b) = 2$, deg $(c) = 4$, deg $(d) = 0$, deg $(e) = 6$, deg $(f) = 0$; deg $(g) = 4$; deg $(h) = 2$; deg $(i) = 3$; d et f sont isolés. **5.** n ° **7.** $v = 4$; $e = 7$; $\deg^-(a) = 3$, $\deg^-(b) = 1$, $\deg^-(c) = 2$, $\deg^-(d) = 1$, $\deg^+(a) = 1$, $\deg^+(b) = 2$, $\deg^+(c) = 1$, $\deg^+(d) = 3$ **9.** 5 sommets, 13 arêtes; $\deg^-(a) = 6$, $\deg^+(a) = 1$, $\deg^-(b) = 1$, $\deg^+(b) = 5$, $\deg^-(c) = 2$, $\deg^+(c) = 5$, $\deg^-(d) = 4$, $\deg^+(d) = 2$, $\deg^-(e) = 0$, $\deg^+(e) = 0$

11.

une *b* *c*

e *ré* *F*

13. Le nombre de co-auteurs de cette personne; que per- co-auteurs du fils; une personne qui n'a pas de co-auteurs; une per- fils qui n'a qu'un seul co-auteur **15.** Dans le graphique orienté $\deg^-(v)$ = nombre d'appels v reçus, deg $^+(v)$ = nombre de appels v effectués; dans le graphique non orienté, deg (v) est le nombre de les appels passés ou reçus par v . **17.** $(\deg^+(v), \deg^-(v))$ est le record de gains et pertes de v . **19.** Dans le graphique non orienté modèle dans lequel les sommets sont des personnes dans le groupe et deux sommets sont adjacents si ces deux personnes sont amis, le degré d'un sommet est le nombre d'amis dans le groupe que cette personne a. Par l'exercice 18, il y a deux versions avec le même degré, ce qui signifie qu'il y a deux les personnes du groupe avec le même nombre d'amis le groupe. **21.** Bipartite **23.** Pas bipartite **25.** Pas bi- partite **27. a)** Parties $\{h, s, n, w\}$ et $\{P, Q, R, S\}$, $E = \{\{P, n\}, \{P, w\}, \{Q, s\}, \{Q, n\}, \{R, n\}, \{R, w\}, \{S, h\}, \{S, s\}\}$ **b)** Il y en a. **c)** $\{Pw, Qs, Rn, Sh\}$ entre autres **29.** Uniquement Barry est prêt à épouser Uma et Xia. **31.** Modélisez ceci avec un graphique bipartite non orienté, avec un bord entre un homme et une femme si elles sont disposées à se marier. Par Hall's théorème, il suffit de montrer que pour chaque ensemble S de femmes, l'ensemble $N(S)$ d'hommes désireux de les épouser a une cardinalité au moins $|S|$. Soit m le nombre d'arêtes entre S et $N(S)$. Puisque chaque sommet de S a le degré k , il s'ensuit que $m = k|S|$. Parce que ces bords sont incidents à $N(S)$, il en résulte que $m \le k|N(S)|$. Donc $k|S| \le k|N(S)|$, donc $|N(S)| \ge |S|$. **33. a)** $(\{a, b, c, f\}, \{\{a, b\}, \{a, f\}, \{b, c\}, \{b, f\}\})$ **b)** $(\{a, x, c, f\}, \{\{a, x\}, \{c, x\}, \{e, x\}\})$ **35. a)** n sommets, $n(n-1)/2$ arêtes **b)** n sommets, n arêtes **c)** $n+1$ sommets, $2n$ arêtes **d)** $m+n$ sommets, mn arêtes **e)** 2^n sommets, $n2^{n-1}$ bords **37. a)** 3 , 3 , 3 , 3 **b)** 2 , 2 , 2 , 2 **c)** 4 , 3 , 3 , 3 , 3 **d)** 3 , 3 , 2 , 2 , 2 **e)** 3 , 3 , 3 , 3 , 3 , 3 , 3 , 3 **39.** Chacun des n sommets est adjacent à chacun des n -1 autres sommets, de sorte que la séquence de degrés est n - 1 , n - 1 , ..., n - 1 (n termes).

41. 7

43. a) Oui

b) Non **c)** Non **d)** Non

e) Oui

f) Non. **45.** Tout d'abord, supposons que $d_1, d_2, \ldots, d_n$ soit graphique. nous doit montrer que la séquence dont les termes sont $d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, d_{d_1+3}, \ldots, d_n$ est graphique une fois mis en non ordre croissant. Dans l'exercice 44, il est prouvé que si l'original la séquence est graphique, alors en fait il y a un graphique ayant cette séquence de degrés dans laquelle le sommet du degré d_1 est adjacent aux sommets des degrés $d_2, d_3, \ldots, d_{d_1+1}$. Supprimer de cette tracer le sommet du plus haut degré (d_1). Le graphique résultant a la séquence de degrés souhaitée. Inversement, supposons que $d_1, d_2, \ldots, d_n$ est une séquence non croissante telle que la séquence

$d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, d_{d_1+3}, \ldots, d_n$ est graphique une fois mise en ordre non croissant. Prenez un graphique avec ceci séquence du dernier degré, où le sommet v_i a le degré $d_i - 1$ pour $2 \leq i \leq d_1 + 1$ et le sommet v_i a le degré d_i pour $d_1 + 2 \leq i \leq n$. Adjoignez un nouveau sommet (appelez-le v_1) et insérez une arête à partir de v_1 à chacun des sommets $v_2, v_3, \ldots, v_{d_1+1}$. Le graphique résultant a la séquence de degrés $d_1, d_2, \ldots, d_n$. **47.** Soit $d_1, d_2, \ldots, d_n$ un séquence non croissante d'entiers non négatifs avec un pair somme. Construisez un graphe comme suit: Prenez les sommets $v_1, v_2, \ldots, v_n$ et mettre $\lfloor d_i / 2 \rfloor$ boucles au sommet v_i, pour $i = 1, 2, \ldots, n$. Pour chaque i, sommet v_i a maintenant le degré d_i ou $d_i - 1$. Parce que la somme d'origine était paire, le nombre de sommets pour lesquels $\deg(v_i) = d_i - 1$ est pair. Associez-les arbitrairement et mettez-les un bord joignant les sommets de chaque paire. **49.** 17

51. *a* ba ba ba b

c ré c ré c ré c ré
une b une b une b une b

c ré c ré c ré c ré
une ba ba b une b

c c c c
une b une b une b une b

ré ré ré ré
une une une une

c ré c ré c ré c ré
b une b une b une

c ré c
une une une b

c ré dc
b une b

ré c ré

c ré

53. a) Pour tous $n \geq 1$ **b)** Pour tous $n \geq 3$ **c)** Pour $n = 3$ **d)** Pour tous $n \geq 0$ **55.** 5

57. *a* F b

e

c g ré

59. a) Le graphe avec n sommets et sans arêtes **b)** Le disjoint union de K_m et K_n **c)** Le graphe à sommets $\{v_1, \ldots, v_n\}$ avec un bord entre v_i et v_j sauf si $i \equiv j \pm 1 \pmod n$

d) Le graphe dont les sommets sont représentés par des chaînes de bits de longueur n avec une arête entre deux sommets si l'associé les chaînes de bits diffèrent sur plusieurs bits **61.** $v(v-1)/2 - e$

63. $n - 1 - d_n, n - 1 - d_{n-1}, \ldots, n - 1 - d_2, n - 1 - d_1$

65. L'union de G et G contient un bord entre chaque paire des n sommets. Par conséquent, cette union est K_n.

67. Exercice 7: b c e une ré

Exercice 8: une e ré b c

Exercice 9: une b c F e ré

69. Un graphe orienté $G = (V, E)$ est sa propre inverse si et seulement s'il satisfait à la condition $(u, v) \in E$ si et seulement si $(v, u) \in E$. Mais c'est précisément la condition que l'associa- doit être satisfaite pour être symétrique.

71. $P(0,0)$ $P(0,1)$ $P(0,2)$

$P(1,0)$ $P(1,1)$ $P(1,2)$

$P(2,0)$ $P(2,1)$ $P(2,2)$

73. On peut connecter $P(i, j)$ et $P(k, l)$ en utilisant $|i - k|$ le houblon pour connecter $P(i, j)$ et $P(k, j)$ et $|j - l|$ sauts pour se connecter $P(k, j)$ et $P(k, l)$. Par conséquent, le nombre total de sauts requis pour connecter $P(i, j)$ et $P(k, l)$ ne dépasse pas $|i - k| + |j - l|$. Ceci est inférieur ou égal à $m + m = 2m$, ce qui est $O(m)$.

Section 10.3

1.

Sommets	*Adjacent de sommet*
une	*b, c, d*
b	*un d*
c	*un d*
ré	*a, b, c*

3.

Sommets	*Terminal de sommet*
une	*a B c d*
b	*ré*
c	*un B*
ré	*b, c, d*

5. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

sept. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

9. a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Page 62

b)
$$\begin{bmatrix} 0&1&1&1&1\\ 1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

c)
$$\begin{bmatrix} 0&0&1&1&1\\ 0&0&1&1&1\\ 1&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&0 \end{bmatrix}$$

ré)
$$\begin{bmatrix} 0&1&0&1\\ 1&0&1&0\\ 0&1&0&1\\ 1&0&1&0 \end{bmatrix}$$

e)
$$\begin{bmatrix} 0&1&0&1&1\\ 1&0&1&0&1\\ 0&1&0&1&1\\ 1&0&1&0&1\\ 1&1&1&1&0 \end{bmatrix}$$

F)
$$\begin{bmatrix} 0&1&1&0&1&0&0&0\\ 1&0&0&1&0&1&0&0\\ 1&0&0&1&0&0&1&0\\ 0&1&1&0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0&1&1&0\\ 0&1&0&0&1&0&0&1\\ 0&0&1&0&1&0&0&1\\ 0&0&0&1&0&1&1&0 \end{bmatrix}$$

11. *d* *b*

13.
$$\begin{bmatrix} 0&0&1&0\\ 0&0&1&2\\ 1&1&0&1\\ 0&2&1&0 \end{bmatrix}$$

15. *une* *c*
$$\begin{bmatrix} 1&0&2&1\\ 0&1&1&2\\ 2&1&1&0\\ 1&2&0&1 \end{bmatrix}$$

17. *une* *b*

ré *c*

19.
$$\begin{bmatrix} 0&1&0&0\\ 0&1&1&0\\ 0&1&1&1\\ 1&0&0&0 \end{bmatrix}$$

21.
$$\begin{bmatrix} 1&1&2&1\\ 1&0&0&2\\ 1&0&1&1\\ 0&2&1&0 \end{bmatrix}$$

23. *une* *b* *c*

25. Oui

27. Exercice 13:
$$\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&1&1&1&0\\ 1&1&0&0&1\\ 0&0&1&1&1 \end{bmatrix}$$

Exercice 14:
$$\begin{bmatrix} 1&1&1&1&0&0&0&0\\ 1&1&1&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&1&1&1\\ 0&0&0&1&0&1&1&1 \end{bmatrix}$$

Exercice 15:
$$\begin{bmatrix} 1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&1&1&1&0&0 \end{bmatrix}$$

29. deg (v) - nombre de boucles en v ; deg $^-(v)$ **31.** 2 si e n'est pas une boucle, 1 si e est une boucle

33. a)
$$\begin{bmatrix} 1&1&\cdots&1&0&\cdots&0\\ 1&0&\cdots&0&1&\cdots&0\\ 0&1&\cdots&0&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\ 0&0&\cdots&0&0&\cdots&1\\ 0&0&\cdots&1&0&\cdots&1 \end{bmatrix}$$

b)
$$\begin{bmatrix} 1&0&\cdots&0&1\\ 1&1&0&0\\ 0&1&\cdots&0&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\ 0&0&\cdots&1&0\\ 0&0&\cdots&1&1 \end{bmatrix}$$

c)
$$\begin{bmatrix} 0&0&\cdots&0&1&1&\cdots&1\\ & & & &1&0&\cdots&0\\ & &\mathbf{B}& &0&1&\cdots&0\\ & & & &\vdots&\vdots&&\vdots\\ & & & &0&0&\cdots&1 \end{bmatrix}$$

où **B** est la réponse à (b)

ré)
$$\begin{bmatrix} 1&1&\cdots&1&0&\cdots&0\\ 0&0&\cdots&0&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\ 0&0&\cdots&0&0&\cdots&1\\ 1&0&\cdots&0&1&\cdots&0\\ 0&1&\cdots&0&0&\cdots&1\\ \vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\ 0&0&\cdots&1&0&\cdots&0 \end{bmatrix}$$

35. Isomorphe **37.** Isomorphe **39.** Isomorphe **41.** Non isomorphe **43.** Isomorphe **45.** G est isomorphe à lui-même par la fonction d'identité, l'isomorphisme est donc réflexif. Supposer que G est isomorphe à H . Ensuite, il existe un à un correspondance f de G à H qui préserve la contiguïté et non contiguïté. Il s'ensuit que f^{-1} est un correspon- de H à G qui préserve la contiguïté et la non-adjonction cence. Par conséquent, l'isomorphisme est symétrique. Si G est isomorphe à H et H est isomorphe à K , alors il y a un à un correspondances f et g de G à H et de H à K qui préserver l'adjacence et la non contiguïté. Il s'ensuit que $g \circ f$ est une correspondance biunivoque de G à K qui préserve les jacency et nonadjacency. Par conséquent, l'isomorphisme est transitif. **47.** Tous les zéros **49.** Étiquetez les sommets dans l'ordre afin que tous les sommets dans le premier ensemble de la partition de l'ensemble de sommets viennent premier. Parce qu'aucune arête ne rejoint les sommets dans le même ensemble de position, la matrice a la forme souhaitée. **51.** C_5 **53.** $n = 5$ seulement **55.** 4 **57. a)** Oui **b)** Non **c)** Non **59.** $G = (V_1, E_1)$ est isomorphe à $H = (V_2, E_2)$ si et seulement s'il existe des fonctions tions f à partir de V_1 à V_2 et g de E_1 à E_2 de telle sorte que chacun est

0 1 1 0 0 1 0 0 1 0
0 0 0 1 0 0 1 1 0 1

une correspondance un à un et pour chaque bord e dans E_1 la
les points limites de $g(e)$ sont $f(v)$ et $f(w)$ où v et w sont les

Page 63

points limites de e . **61.** Oui **63.** Oui **65.** Si f est un isomorphisme d'un graphe orienté G vers un graphe orienté H , puis f est aussi un isomorphisme de G_{conv} à H_{conv} . Pour voir cette note que (u, v) est un bord de G_{conv} si et seulement si (v, u) est un bord de G si et seulement si $(f(v), f(u))$ est un bord de H si et seulement si $(f(u), f(v))$ est un bord de H_{conv} . **67.** De nombreuses réponses sont possible; par exemple, C_6 et $C_3 \cup C_3$. **69.** Le produit est $[a_{ij}]$ où a_{ij} est le nombre d'arêtes de v_i à v_j lorsque $i = j$ et a_{ii} est le nombre d'arêtes incidentes à v_i . **71.** Le les graphiques de l'exercice 41 fournissent une paire de démons.

Section 10.4

1. a) Chemin de longueur 4; pas un circuit; pas simple **b)** Pas un chemin **c)** Pas un chemin **d)** Circuit simple de longueur 5 **3.** Non **5.** Non **7.** Ensembles maximaux de personnes avec la propriété que pour deux d'entre eux, nous pouvons trouver une chaîne de connaissances qui nous emmène de l'un à l'autre **9.** Si une personne a le nombre Erd˝os n , alors il y a un chemin de longueur n de cette personne à Erd˝os dans le graphique de collaboration, donc par définition, cela signifie que ce personne est dans la même composante que Erd˝os. Si une personne se trouve même composant que Erd ˝os, alors il y a un chemin à partir de cette personne à Erd˝os, et la longueur du chemin le plus court est celle qui le numéro Erd˝os de son fils. **11. a)** Faible connexion **b)** Faible connecté **c)** Pas fortement ou faiblement connecté **13.** Le ensembles maximum de numéros de téléphone pour lesquels il est possible de trouver des chemins dirigés entre deux nombres différents dans l'ensemble **15. a)** $\{a, b, f\}$, $\{c, d, e\}$ **b)** $\{a, b, c, d, e, h\}$, $\{f\}$, $\{g\}$ **c)** $\{a, b, d, e, f, g, h, i\}$, $\{c\}$ **17.** Supposons que le fort les composantes de u et v ne sont pas disjointes, disons avec le sommet w dans tous les deux. Supposons que x soit un sommet dans la forte composante de u . Alors x est également dans la forte composante de v , car il est un chemin de x à v (à savoir le chemin de x à u suivi abaissé par le chemin de u à w suivi du chemin de w à v) et vice versa. Ainsi x est dans la composante forte de v . Cela montre que la forte composante de u est un sous-graphique de la forte composante de v , et l'égalité suit par symétrie. **19. a)** 2 **b)** 7 **c)** 20 **d)** 61 **21.** Pas isomorphique (G a un triangle; H non) **23.** Isomorphe (le le chemin $u_1, u_2, u_7, u_6, u_5, u_4, u_3, u_8, u_1$ correspond au chemin $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_8, v_7, v_6, v_1$) **25. a)** 3 **b)** 0 **c)** 27 **d)** 0 **27. a)** 1 **b)** 0 **c)** 2 **d)** 1 **e)** 5 **f)** 3 **29.** R est réflexif par définition. Supposons que $(u, v) \in R$; alors il y a un chemin de

tranchant, produit un graphique avec plus de composants connectés que dans le graphique d'origine. Par conséquent, un point final d'une coupe bord qui n'est pas pendant est un sommet coupé. **37.** Supposons qu'il existe un graphe connecté G avec au plus un sommet qui n'est pas un sommet coupé. Définissez la distance entre les sommets u et v , noté $d(u, v)$, comme étant la longueur du chemin le plus court entre u et v dans G . Soit s et t *des* sommets en G tels que $d(s, t)$ est un maximum. Soit s ou t (ou les deux) est un sommet de coupe, donc sans perte de généralité, supposons que s soit un sommet coupé. Soit w appartenir au composant connecté qui ne tain t du graphe obtenu par suppression de s et tous les bords incident à s de G . Parce que chaque chemin de w à t contient s , $d(w, t) > d(s, t)$, ce qui est une contradiction. **39. a)** Denver–Chicago, Boston – New York **b)** Seattle – Portland, Portland–San Francisco, Salt Lake City – Denver, New York – Boston, Boston – Burlington, Boston – Bangor **41.** Un ensemble minimal de personnes qui influencent collectivement tout le monde (directement ou rectement); {Deborah} **43.** Une arête ne peut pas relier deux sommets dans différents composants connectés. Parce qu'il y a tout au plus $C(n_i, 2)$ arêtes dans le composant connecté avec n_i sommets, il s'ensuit qu'il y a tout au plus $\sum_{i=1}^{k}$ arêtes $C(n_i, 2)$ dans le graphique. **45.** Supposons que G n'est pas connecté. Ensuite, il a un composante de k sommets pour certains k , $1 \leq k \leq n - 1$.
Le plus grand nombre d'arêtes que G pourrait avoir est $C(k, 2) + C(n - k, 2) = [k(k - 1) + (n - k)(n - k - 1)] / 2 = k^2 - nk + (n^2 - n) / 2$.
Cette fonction quadratique de f est minimisée à $k = n / 2$ et maximisé à $k = 1$ ou $k = n - 1$. Par conséquent, si G n'est pas connectés, le nombre d'arêtes ne dépasse pas la valeur de cette fonction à 1 et à $n - 1$, à savoir $(n - 1)(n - 2) / 2$.
47. a) 1 **b)** 2 **c)** 6 **d)** 21 **49. a)** Retrait d'un bord d'un cycle laisse un chemin, qui est toujours connecté. **b)** Suppression d'un bord de la partie cycle de la roue quitte cette partie toujours connecté et le sommet central toujours connecté à elle comme bien. La suppression d'un rayon laisse le cycle intact et le centre sommet encore connecté à lui aussi. **c)** Quatre sommets quelconques, deux de chaque partie de la bipartition, sont reliés par un cycle 4; la suppression d'un bord ne les déconnecte pas. **d)** Suppression la jonction des arêtes $(b_1, b_2, ..., b_{i-1}, 0, b_{i+1}, ..., b_n)$ et $(b_1, b_2, ..., b_{i-1}, 1, b_{i+1}, ..., b_n)$ ne dis-connecter le graphique parce que ces deux sommets sont toujours rejoint par le chemin $(b_1, b_2, ..., b_{i-1}, 0, b_{i+1}, ..., 0)$, $(b_1, b_2, ..., b_{i-1}, 0, b_{i+1}, ..., 1)$, $(b_1, b_2, ..., b_{i-1}, 1, b_{i+1}, ..., 1)$, $(b_1, b_2, ..., b_{i-1}, 1, b_{i+1}, ..., 0)$ si $n < 2$

u à v . Alors $(v, u) \in R$ car il y a un chemin de v vers u , à savoir, le chemin de u à v parcouru vers l'arrière. Présumer que $(u, v) \in R$ et $(v, w) \in R$; alors il y a des chemins de u à v et de v à w . La combinaison de ces deux voies donne un chemin de u à w . Par conséquent, $(u, w) \in R$. Il s'ensuit que R est transitif. **31.** c **33.** b, c, e, i **35.** Si un sommet est pendant ce n'est clairement pas un sommet coupé. Donc, un point final d'un bord coupé qui est un sommet coupé n'est pas pendant. L'élimination d'un bord coupé produit un graphique avec plus de composants connectés que dans l'original graphique. Si un point d'extrémité d'un bord coupé n'est pas suspendu, la con- composant connecté dans lequel il se trouve après le retrait du tranchant contient plus que ce sommet. Par conséquent, la suppression de ce sommet et tous les bords qui lui sont incidents, y compris l'original

et $b_n = 0$, et de même dans les trois autres cas. **51.** Si G est terminé, puis la suppression des sommets un par un laisse un graphique complet à chaque étape, donc nous ne obtenons jamais un déconnecté graphique. Inversement, si le bord uv est absent de G , tous les sommets sauf u et v créent un graphe déconnecté. **53.** Les deux égalent min (m, n) . **55.** Soit G un graphe avec n ver- tices; alors $\kappa(G) \leq n-1$. Soit C une plus petite coupe de bord, laissant un sous-ensemble propre non vide S des sommets de G déconnecté à partir de l'ensemble complémentaire $\bar{S} = V - S$. Si xy est une arête de G pour chaque $x \in S$ et $y \in \bar{S}$, alors la taille de C est $|S||\bar{S}|$, qui est au moins n - 1, donc $\kappa(G) \leq \lambda(G)$. Sinon, soit $x \in S$ et $y \in \bar{S}$ sont des sommets non adjacents. Soit T composé de tous les voisins de x dans $\bar{S}$ avec tous les sommets de S - { x } avec les voisins

Page 64

dans $\bar{S}$. Alors T est un sommet coupé, car il sépare x et y . Regardez maintenant les bords de x à $T \cap \bar{S}$ et un bord de chaque sommet de $T \cap S$ à $\bar{S}$; cela nous donne $|T|$ bords distincts se trouvent dans C , donc $\lambda(G) = |C| \geq |T| \geq \kappa(G)$. **57.** 2 **59.** Soit les chemins simples P_1 et P_2 soient $u = x_0, x_1, ..., x_n = v$ et $u = y_0, y_1, ..., y_m = v$, respectivement. Les chemins partent ainsi au même sommet. Puisque les chemins ne contiennent pas le même ensemble des bords, ils doivent éventuellement diverger. S'ils divergent seulement après la fin de l'un d'entre eux, le reste de l'autre chemin est un circuit simple de v à v . Sinon, nous pouvons supposer que $x_0 = y_0$, $x_1 = y_1$,…, $x_i = y_i$, mais $x_{i+1} \neq y_{i+1}$. Pour former notre circuit simple, on suit le chemin y_i , y_{i+1} , y_{i+2} , etc., jusqu'à ce qu'il rencontre à nouveau un sommet sur P_1 (peut-être comme dès y_{i+1} , au plus tard y_m). Une fois de retour sur P_1 , nous suivez-le - en avant ou en arrière, si nécessaire - pour passer à x_i . Puisque $x_i = y_i$, cela forme certainement un circuit. Il doit être un circuit simple, car aucune arête parmi les x_k s ou les y_l s peuvent être répétées (P_1 et P_2 sont simples par hypothèse) et aucune bord parmi les x_k s peut être égal à l'un des bords y_l que nous avons utilisé, puisque nous avons abandonné P_2 pour P_1 dès que nous avons atteint P_1 . **61.** Le le graphe G est connecté si et seulement si chaque entrée hors diagonale de $\mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 + \cdots + \mathbf{A}^{n-1}$ est positif, où $\mathbf{A}$ est l'adjacence la matrice de G . **63.** Si le graphique est bipartite, disons avec les parties A et B , alors les sommets de chaque chemin doivent alternativement se trouver A et B . Par conséquent, un chemin qui commence en A , disons, se terminera en B après un nombre impair d'étapes et en A après un nombre pair de pas. Parce qu'un circuit se termine au même sommet où il commence, la longueur doit être régulière. Inversement, supposons que tous les circuits avoir une longueur uniforme; nous devons montrer que le graphe est bipartite. On peut supposer que le graphe est connecté, car s'il est non, alors nous pouvons simplement travailler sur un composant à la fois. Laisser v être un sommet du graphe, et soit A l'ensemble de tous les sommets

rues a un chemin Euler **13.** Oui **15.** Non **17.** S'il y a un chemin d'Euler, puis comme nous le suivons chaque sommet, sauf le les sommets de début et de fin doivent avoir un degré égal et degré, parce que chaque fois que nous arrivons à un sommet le long d'un bord, nous le laissons le long d'un autre bord. Le sommet de départ doit ont un degré extérieur supérieur à son degré, car nous utilisons un bord menant hors de ce sommet et chaque fois que nous visitons encore une fois, nous utilisons un bord qui y mène et un qui le quitte. De même, le sommet final doit avoir au degré 1 supérieur que son sur-degré. Parce que le chemin d'Euler avec des directions effacé produit un chemin entre deux sommets quelconques, dans le sous-jacent graphique non orienté, le graphique est faiblement connecté. Inversement, supposons que le graphique remplisse les conditions de degré déclaré. Si nous ajoutons un bord de plus du sommet du déficient out-degré par rapport au sommet de in-degré déficient, puis le graphique a chaque sommet avec un degré égal et un degré extérieur. Être- parce que le graphique est encore faiblement connecté, par l'exercice 16 cette nouveau graphique a un circuit d'Euler. Maintenant, supprimez le bord ajouté à obtenez le chemin d'Euler. **19.** Ni l'un ni l'autre **.** Pas de circuit Euler; $a, d, e, d, b, a, e, c, e, b, c, b, e$ **23.** Ni l'un ni l'autre **25.** Suivre la même procédure que l'algorithme 1, en prenant soin de suivre les directions des bords. **27. a)** $n = 2$ **b)** Aucun **c)** Aucun **d)** $n = 1$ **29.** Exercice 1: 1 fois; Exercices 2 à 7: 0 fois **31.** a, b, c, d, e, a est un circuit de Hamilton. **33.** Pas de Hamilton circuit existe, car une fois qu'un prétendu circuit a atteint e il n'aurait nulle part où aller. **35.** Aucun circuit de Hamilton istes, car chaque arête du graphique est incidente à un sommet de degré 2 et doit donc être dans le circuit. **37.** a, b, c, f, d, e est un chemin de Hamilton. **39.** f, e, d, a, b, c est un chemin de Hamilton. **41.** Aucun chemin de Hamilton n'existe. Il y a huit sommets de degré 2, et seuls deux d'entre eux peuvent être des sommets d'extrémité d'un chemin. Pour chaque des six autres, leurs deux bords incidents doivent être sur le chemin. Il

à laquelle il existe un chemin de longueur impaire commençant à v, et laissez B l'ensemble de tous les sommets auxquels il existe un chemin de pair longueur à partir de v. Parce que le composant est connecté, vertex ery réside dans A ou B. Aucun sommet ne peut se trouver à la fois dans A et B, parce que si on le faisait, alors suivre le chemin de longueur impaire de v à ce sommet, puis de retour le long du chemin de longueur égale à partir de ce sommet à v produirait un circuit impair, contrairement à la hypothèse. Ainsi, l'ensemble des sommets a été partitionné en deux jeux. Pour montrer que chaque bord a des points d'extrémité dans différents parties, supposons que xy est une arête, où $x \in A$. Puis le un chemin de longueur impaire de v à x suivi de xy produit un chemin de longueur de v à y, si $y \in B$. (De même, si $x \in B$.)
65. $(H_1 W_1 H_2 W_2$ «bateau», $\varnothing) \to (H_2 W_2, H_1 W_1$ «bateau»$) \to$
$(H_1 H_2 W_2$ «bateau»$, W_1) \to (W_2, H_1 W_1 H_2$ «bateau»$) \to$
$(H_2 W_2$ «bateau»$, H_1 W_1) \to (\varnothing, H_1 W_1 H_2 W_2$ «bateau»$)$

Section 10.5

1. Ni **3.** Pas de circuit Euler; *a, e, c, e, b, e, d, b, a, c, d* **5.** *a, b, c, d, c, e, d, b, e, a, e, a* **7.** *a, i, h, g, d, e, f, g, c, e, h, d, c, a, b, i, c, b, h, a* **9.** Non, A a toujours un degré impair. **11.** Quand le graphique dans lequel les sommets représentent les intersections et les arêtes

il n'est pas difficile de voir que s'il doit y avoir un chemin de Hamilton, exactement l'un des sommets des coins intérieurs doit être une extrémité, et que ce est impossible. **43.** *a, b, c, f, i, h, g, d, e* est un chemin de Hamilton. **45.** $m = n \geq 2$ **47. a)** (i) Non, (ii) Non, (iii) Oui **b)** (i) Non, (ii) Non, (iii) Oui **c)** (i) Oui, (ii) Oui, (iii) Oui **d)** (i) Oui, (ii) Oui, (iii) Oui **49.** Le résultat est trivial pour $n = 1$: le code est 0, 1. As-supposons que nous avons un code de commande gris n. Soit $c_1, \ldots, c_k$, $k = 2^n$ être un tel code. Alors $0c_1, \ldots, 0c_k, 1c_k, \ldots, 1c_1$ est un gris code d'ordre $n + 1$.

51. procédure *Fleury* $(G = (V, E)$: multigraph connecté
avec les degrés de tous les sommets pairs, $V = \{v_1, \ldots, v_n\})$
$v := v_1$
circuit $:= v$
$H := G$
tandis que H a des bords
$e :=$ première arête avec point final v dans H (avec respect
à la liste de V) de telle sorte que e ne soit pas un bord coupé de H, si
il existe, et simplement le premier bord en H avec
endpoint v sinon
$w :=$ autre point final de e
circuit $:=$ *circuit* avec e, w ajouté
$v := w$
$H := H - e$
circuit de **retour** {le *circuit* est un circuit d'Euler}

Page 65

53. Si G a un circuit d'Euler, alors il a aussi un chemin d'Euler. Sinon, ajoutez un bord entre les deux sommets de degré impair et appliquer l'algorithme pour obtenir un circuit d'Euler. Ensuite, supprimez le nouveau bord. **55.** Supposons que $G = (V, E)$ est un graphe bipartite avec $V = V_1 \cup V_2$, où $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ et sans bord relie un sommet en V_1 et un sommet en V_2. Supposons que G a un circuit à Hamilton. Un tel circuit doit être de la forme $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_k, b_k, a_1$, où $a_i \in V_1$ et $b_i \in V_2$ pour $i = 1, 2, \ldots, k$. Parce que le circuit de Hamilton visite chaque sommet exactement une fois, sauf pour v_1, où il commence et se termine, le nombre de sommets dans le graphique est égal à $2k$, un nombre pair ber. Par conséquent, un graphique bipartite avec un nombre impair de sommets ne peut pas avoir de circuit à Hamilton.

57. 1 2 3 4

5 6 sept 8

9 dix 11 12

des bords. Mais maintenant le carré 14 est obligé d'être joint aux carrés 5 et 12, terminer un circuit trop tôt (5–14–12–3–5). Cette la contradiction montre qu'il n'y a pas de tour de chevalier sur le 4×4 planche. **63.** Parce qu'il y a mn carrés sur un tableau $m \times n$, si m et n sont tous deux impairs, il y a un nombre impair de carrés. Parce que par l'exercice 62, le graphique correspondant est bipartite, par l'exercice 55, il n'a pas de circuit à Hamilton. Par conséquent, il n'y a pas visite du chevalier réentrant. **65. a)** Si G n'a pas de Hamil-circuit de tonnes, continuez aussi longtemps que possible en ajoutant des bords manquants un à la fois de manière à ne pas obtenir de graphique avec un circuit de Hamilton. Cela ne peut pas durer éternellement, car une fois que nous avons formé le graphique complet en ajoutant tous les bords, il y a un circuit de Hamilton. Chaque fois que le processus s'arrête, nous avons obtenu un graphe (nécessairement incomplet) H avec la propriété souhaitée. **b)** ajouter un bord à H. Cette produit un circuit de Hamilton, qui utilise le bord supplémentaire. le chemin composé de ce circuit avec le bord ajouté omis est un chemin Hamilton dans H. **c)** Clairement v_1 et v_n ne sont pas adjacents en H, car H n'a pas de circuit à Hamilton. Ils sont donc pas adjacents dans G. Mais l'hypothèse était que la somme de

59. Nous représentons les carrés d'un échiquier 3 × 4 comme suit:

1	2	3	4
5	6	sept	8
9	dix	11	12

Un tour de chevalier peut être fait en suivant les mouvements 8, 10, 1, 7, 9, 2, 11, 5, 3, 12, 6, 4. **61.** Nous représentons les carrés d'un Échiquier 4 × 4 comme suit:

1	2	3	4
5	6	sept	8
9	dix	11	12
13	14	15	16

Il n'y a que deux coups de chacun des quatre carrés de coin. Si nous incluons tous les bords 1–10, 1–7, 16–10 et 16–7, un circuit est terminé trop tôt, donc au moins un de ces bords doit être manquant. Sans perte de généralité, supposons que le chemin commence 1–10, 10–16, 16–7. Maintenant, les seuls mouvements depuis le carré 3 sont aux carrés 5, 10 et 12, et le carré 10 a déjà deux inci- bords bosselés. Par conséquent, 3–5 et 3–12 doivent être dans le Hamilton circuit. De même, les bords 8–2 et 8–15 doivent être dans le circuit. Maintenant, les seuls mouvements du carré 9 sont vers les carrés 2, 7 et 15. S'il y avait des bords du carré 9 aux deux carrés 2 et 15, un circuit serait achevé trop tôt. Par conséquent, le bord 9–7 doit être dans le circuit donnant au carré 7 son complément complet

les degrés de sommets non adjacents dans G étaient au moins n . Cette l'inégalité peut être réécrite comme n - deg $(v_n) \leq$ deg (v_1) . Mais n - deg (v_n) est juste le nombre de sommets non adjacents à v_n .

d) Parce qu'il n'y a pas de sommet suivant v_n dans le Hamilton chemin, v_n se trouve pas dans S . Chacun des sommets deg (v_1) adjacents à v_1 donne lieu à un élément de S , donc S contient deg (v_1) vertices. **e)** Par partie (c) il y a au plus deg (v_1) -1 sommets autres que v_n non adjacent à v_n , et par la partie (d) il y a deg (v_1) sommets en S , dont aucun n'est v_n . Donc au moins un sommet de S est adjacent à v_n . Par définition, si v_k est ce sommet, alors H contient les arêtes $v_k v_n$ et $v_1 v_{k+1}$, où $1 < k < n - 1$. **f)** Maintenant $v_1, v_2, ..., v_{k-1}, v_k, v_n, v_{n-1}, ..., v_{k+1}, v_1$ est un circuit de Hamilton Cuit en H , en contradiction avec la construction d' H . Par conséquent, notre hypothèse selon laquelle G ne disposait pas à l'origine d'un circuit de Hamilton est faux, et notre preuve par contradiction est complète.

Section 10.6

1. a) Les sommets sont les arrêts, les bords joignent les arrêts adjacents, les poids sont les temps requis pour voyager entre les arrêts adjacents. **b)** Identique à la partie (a), sauf que les poids sont des distances entre arrêts adjacents. **c)** Identique à la partie (a), sauf que les poids sont des tarifs entre les arrêts. **3.** 16 **5.** Exercice 2: *a, b, e, d, z* ; Ex- exercice 3: *a, c, d, e, g, z* ; Exercice 4: *a, b, e, h, l, m, p, s, z* **7. a)** *a, c, d* **b)** *a, c, d, f* **c)** *c, d, f* **e)** *b, d, e, g, z* **9. a)** Direct **b)** Via New York **c)** Via Atlanta et Chicago **d)** Via New York **11. a)** Via Chicago **b)** Via Chicago **c)** Via Los Angeles **d)** Via Chicago **13. a)** Via Chicago **b)** Via Chicago **c)** Via Los Angeles **d)** Via Chicago **15.** N'arrêtez pas l'algorithme lorsque z est ajouté à l'ensemble S . **17. a)** Via Woodbridge, via Woodpont et Camden **b)** Via Woodbridge, via Woodbridge et Camden **19.** Par exemple, visites touristiques, nettoyage des rues

Page 66

21.

	une	*b*	*c*	*ré*	*e*	*z*
une	4	3	2	8	10	13
b	3	2	1	5	7	10
c	2	1	2	6	8	11
ré	8	5	6	4	2	5
e	dix	sept	8	2	4	3
z	13	10	11	5	3	6

23. $O(n^3)$ **25.** $a - c - b - d - a$ (ou le même circuit commençant à un autre point et / ou traversant les sommets en sens inverse

trois arêtes de v_1 , v_2 et v_3 à v_4 forment quatre régions. Non peu importe dans laquelle de ces quatre régions v_5 se trouve, il est possible de joignez-le à seulement trois, et non aux quatre, des autres sommets. **13.** 8 **15.** Parce qu'il n'y a pas de boucles ou de bords multiples et pas de circuits simples de longueur 3, et le degré de l'infini région est au moins 4, chaque région a un degré au moins 4. Ainsi $2e \geq 4r$, ou $r \leq e / 2$. Mais $r = e - v + 2$, nous avons donc $e - v + 2 \leq e / 2$, ce qui implique que $e \leq 2v - 4$. **17.** Comme dans l'argument dans la preuve du corollaire 1, nous avons $2e \geq 5r$ et $r = e - v + 2$. Ainsi $e - v + 2 \leq 2e / 5$, ce qui implique que $e \leq$

ordre) **27.** San Francisco – Denver – Detroit – New York – Los Angeles – San Francisco (ou le même circuit à partir de certains autre point et / ou traversant les sommets dans l'ordre inverse) **29.** Considérez ce graphique:

une

1 2

b 100 *c*

Le circuit *abaca* visite chaque sommet au moins une fois (et le sommet *a* deux fois) et a un poids total de 6. Chaque circuit de Hamilton a un poids total de 103. **31.** Soit $v_1, v_2, \ldots, v_n$ une topologie ordre des sommets du graphe acyclique dirigé donné. Laisser *w (i, j)* est le poids du bord $v_i v_j$. Définir itérativement *P (i)* avec l'intention qu'il sera le poids d'un chemin le plus long se terminant à v_i et *C (i)* avec l'intention que ce soit le sommet précédant v_i dans le chemin le plus long: pour *i* de 1 à *n* , soit *P (i)* le maximum de *P (j) + w (j, i)* sur tout $j < i$ tel que $v_j v_i$ soit une arête dans le graphe orienté (et si un tel *j* existe, laisser *C (i)* être une valeur de *j* pour laquelle ce maximum est atteint) et laisser *P (i)* = 0 s'il n'y a pas de telles valeurs de *j* . À la conclusion de cette boucle, un chemin le plus long peut être trouvé en choisissant *i* que maximise *P (i)* et suit les liens *C* jusqu'au début de le chemin.

Section 10.7

1. Oui **3.** *b* **5.** Non

une *e* *ré*

c

7. Oui *une* *ré*

e

c *F*

b

9. No **11.** Un triangle est formé par la représentation plane du sous-graphe de K_5 constitué des arêtes reliant v_1 , v_2 et v_3 . Le sommet v_4 doit être placé soit dans le triangle ou à l'extérieur de celui-ci. Nous considérerons que le cas où v_4 est à l'intérieur du triangle; L'autre cas est similaire. Dessiner le

(Cinq / trois) *v* - (10 / trois) . **19.** Uniquement (a) et (c) **21.** Pas d'homéomophic à $K_{3,3}$ **23.** Planaire **25.** Non planaire **27.** **a)** 1 **b)** 3 **c)** 9 **d)** 2 **e)** 4 **f)** 16 **29.** Dessinez $K_{m,n}$ comme décrit dans le allusion. Le nombre de passages à niveau est quatre fois le nombre de le premier quadrant. Les sommets sur l' axe des *x* à droite de l'origine est $(1, 0), (2, 0), \ldots, (m/2, 0)$ et les sommets sur les axes *y* au-dessus de l'origine sont $(0, 1), (0, 2), \ldots, (0, n/2)$. Nous obtenons tous les croisements en choisissant deux nombres quelconques *a* et *b* avec $1 \le a < b \le m/2$ et deux nombres *r* et *s* avec $1 \le r < s \le n/2$; nous obtenons exactement une traversée dans le graphique entre le bord reliant $(a, 0)$ et $(0, s)$ et le bord reliant $(b, 0)$ et $(0, r)$. Par conséquent, le nombre des croisements dans le premier quadrant est $C\left(\frac{m}{2}, 2\right) \cdot C\left(\frac{n}{2}, 2\right) = \frac{(m/2)(m/2-1)}{2} \cdot \frac{(N/2)(n/2-1)}{2}$. Par conséquent, le nombre total de est de $4 \cdot mn(m-2)(n-2)/64 = mn(m-2)(n-2)/16$.
31. **a)** 2 **b)** 2 **c)** 2 **d)** 2 **e)** 2 **f)** 2 **33.** La formule est valide pour $n \le 4$. Si $n > 4$, par l'exercice 32, l'épaisseur de K_n est au moins $C(n, 2)/(3n-6) = (n+1+\frac{2}{n-2})/6$ arrondi. Parce que cette quantité n'est jamais un entier, elle est égale à $\lfloor (n+7)/6 \rfloor$.
35. Cela découle de l'exercice 34 parce que $K_{m,n}$ a *mn* arêtes et $m + n$ sommets et n'a pas de triangles car il est bipartite.

37.

Section 10.8

1. Quatre couleurs **3.** Trois couleurs

B *UNE*

UNE *C* *ré* *E* *F* *B* *C* *E*

ré

5. 3 **7.** 3 **9.** 2 **11.** 3 **13.** Graphiques sans bords **15.** 3 si *n* est pair, 4 si *n* est impair **17.** Période 1: Math 115, Math 185; période 2: Math 116, CS 473; période 3: Math 195, CS 101; période 4: CS 102; période 5: CS 273 **19.** 5 **21.** Exercice 5: 3 Exercice 6: 6 Exercice 7: 3 Exercice 8: 4 Exercice 9: 3 Exercice 10: 6 Exercice 11: 4 **23.** **a)** 2 si *n* est pair, 3 si *n* est impair **b)** *n* **25.** Deux bords ayant la même couleur ne partagent pas points finaux. Par conséquent, si plus de *n* / 2 bords étaient colorés, le de même, le graphique aurait plus de 2 $(n/2) = n$ sommets. **27.** 5 **29.** Couleur 1: *e, f, d* ; couleur 2: *c, a, i, g* ; couleur 3: *h, b, j* **31.** Couleur C_6 **33.** Quatre couleurs sont nécessaires pour colorer W_n lorsque n est un entier impair supérieur à 1, car trois couleurs sont nécessaire pour la jante (voir l'exemple 4), et le sommet central, entre-à côté de tous les sommets de jante, nécessitera une quatrième couleur. Pour voir que le graphe obtenu à partir de W_n en supprimant une arête peut être coloré avec trois couleurs, considérez deux cas. Si nous enlever un bord de jante, alors nous pouvons colorer la jante avec deux couleurs, en commençant à un point d'extrémité du bord retiré et en utilisant le couleurs en alternance autour de la partie de la jante qui reste. La troisième couleur est ensuite affectée au sommet central. Si nous supprimer un bord de rayon, puis nous pouvons colorer la jante en attribuant couleur n ° 1 jusqu'au point de jante du bord et des couleurs supprimés # 2 et # 3 alternativement aux sommets restants sur la jante, puis attribuez la couleur # 1 au centre. **35.** Supposons que G est chromatiquement k- critique mais a un sommet v de degré k - 2 ou moins. Retirer de G l' un des bords incidents à v . Par définition de « k- critique», le graphique résultant peut être coloré avec k - 1 couleurs. Maintenant, restaurez le bord manquant et utilisez-le coloration pour tous les sommets sauf v . Parce que nous avions un bon la coloration du graphique plus petit, pas deux sommets adjacents ont la même couleur. De plus, v a au plus $k-2$ voisins, donc nous pouvons colorer v avec une couleur inutilisée pour obtenir un bon $(k-1)$ -coloration de G . Cela contredit le fait que G a chromatique numéro k . Par conséquent, notre hypothèse était fausse, et chaque le sommet de G doit avoir un degré d'au moins k - 1. **37. a)** 6 **b)** 7 **c)** 9 **d)** 11 **39.** Représenter les fréquences par couleurs et zones par des sommets. Joignez deux sommets avec une arête si les zones les sommets représentent interférer les uns avec les autres. Puis un k- tuple la coloration est précisément une affectation de fréquences qui évite ingérence. **41.** Nous utilisons l'induction sur le nombre de tices du graphique. Chaque graphique avec cinq sommets ou moins peut être coloré avec cinq couleurs ou moins, car chaque sommet peut obtenir une couleur différente. Cela prend en charge les cas de base. Donc nous supposons que tous les graphiques avec k sommets peuvent être à 5 couleurs et considérons un graphe G avec $k+1$ sommets. Par corollaire 2 po Section 10.7, G a un sommet v avec un degré au plus 5. Supprimer v pour former le graphe G . Parce que G n'a que k sommets, nous 5 couleurs par l'hypothèse inductive. Si les voisins de v n'utilisez pas les cinq couleurs, alors nous pouvons 5 couleurs G en attribuant à v une couleur non utilisé par l' un de ses voisins. La difficulté survient si v a cinq voisins, et chacun a une couleur différente dans le 5-coloration de G . Supposons que les voisins de v , quand considérés dans le sens des aiguilles d'une montre autour de v , sont a , b , c , m et p . (Cet ordre est déterminé par l'ordre horaire des courbes représentant les bords incidents à v .) Supposons que les couleurs des voisins sont azur, bleu, chartreuse, magenta et pur-ple, respectivement. Considérez le sous-graphique azur-chartreuse (c.-à-d. les sommets en couleur G azur ou chartreuse et tous les bords entre eux). Si a et c ne sont pas dans le même composant de ce graphique, puis dans le composant contenant *un* nous pouvons inter-changer ces deux couleurs (rendre les vertices azur chartreuse et vice versa), et G sera toujours correctement coloré. Cette fait *une* chartreuse, donc nous pouvons maintenant colorer v azur, et G a correctement colorées. Si a et c sont dans le même composant, puis il y a un chemin de sommets d'azur de couleur alternée et chartreuse joignant a et c . Ce chemin ainsi que les bords av et vc divise l'avion en deux régions, avec b dans l'une d'elles et m dans l'autre. Si nous échangeons maintenant le bleu et le magenta sur tous les sommets de la même région que b , nous aurons toujours un bonne coloration de G , mais maintenant le bleu est disponible pour v . Dans ce cas aussi, nous avons trouvé une coloration appropriée de G . Cette com-termine l'étape inductive, et le théorème est prouvé. **43.** Nous suivez l'indice. Parce que les mesures des angles intérieurs de un pentagone total 540 °, il ne peut y avoir jusqu'à trois angles de mesure supérieurs à 180 ° (angles réflexes). S'il y a pas d'angles réflexes, alors le pentagone est convexe, et un garde placé à n'importe quel sommet peut voir tous les points. S'il y a un réflexe l'angle, alors le pentagone doit ressembler essentiellement à la figure (a) ci-dessous, et un garde au sommet v peut voir tous les points. S'il y a deux angles réflexes, ils peuvent être adjacents ou non adjacents (figures (b) et (c)); dans les deux cas, un garde au sommet v peut voir tous les points. [Dans la figure (c), choisissez le sommet réflexe le plus proche du côté inférieur.] Ainsi, pour tous les pentagones, une garde suffit, donc $g(5) = 1$.

v v

(une) b)

v

(c)

45. Le chiffre suggéré dans l'indice (généralisé pour avoir k broches pour tout $k \geq 1$) a 3 k sommets. Les ensembles de lieux à partir desquelles les pointes de différentes dents sont visibles sont mixte. Par conséquent, une garde distincte est nécessaire pour chacun des k broches, donc au moins k gardes sont nécessaires. Cela montre que $g(3k) \geq k = \lfloor 3k/3 \rfloor$. Si $n = 3k + i$, où $0 \leq i \leq 2$, alors $g(n) \geq g(3k) \geq k = \lfloor n/3 \rfloor$.

Exercices supplémentaires

1. 2500 **3.** Oui **5.** Oui **7.** $\sum_{i=1}^{m} n_i$ sommets, $\sum_{i<j} n_i n_j$ bords **9. a)** Si $x \in N(A \cup B)$, alors x est adjacent à un sommet $v \in A \cup B$. WOLOG suppose que $v \in A$; ensuite $x \in N(A)$ et donc aussi dans $N(A) \cup N(B)$. Inversement, si $x \in N(A) \cup N(B)$, alors WOLOG suppose $x \in N(A)$. Ainsi x est adjacent à un sommet $v \in A \subseteq A \cup B$, donc $x \in N(A \cup B)$. **b)** Si $x \in N(A \cap B)$, alors x est adjacent à un sommet $v \in A \cap B$. Puisque $v \in A$ et $v \in B$, il s'ensuit que $x \in N(A)$ et $x \in N(B)$, d'où $x \in N(A) \cap N(B)$. Pour le contre-exemple, soit $G = (\{u, v, w\}, \{\{u, v\}, \{v, w\}\})$, $A = \{u\}$ et $B = \{w\}$. **11.** *(c, a, p, x, n, m)* et plusieurs autres **13.** *(c, d, a, b)* et beaucoup d'autres **15.** 6 fois la

nombre de triangles divisé par le nombre de chemins de longueur 2
17. a) La probabilité que deux acteurs ayant chacun dans un film avec un acteur choisi au hasard ont ensemble dans un film **b)** La probabilité que deux les amis Facebook d'une personne choisie au hasard sont eux-mêmes Amis Facebook **c)** La probabilité que deux personnes au hasard Les co - auteurs de la personne choisie sont eux - mêmes co - auteurs **d)** Le probabilité que deux protéines qui interagissent chacune avec un la protéine choisie par le ménage interagit entre elles **e)** Le problème capacité que deux routeurs dont chacun a une communication liaisons à un routeur choisi au hasard sont elles-mêmes liées
19. Sous-graphiques complets contenant les ensembles de vertices: { *b, c, e, f* }, { *a, b, g* }, { *a, d, g* }, { *d, e, g* }, { *b, e, g* }
21. Sous-graphiques complets contenant les ensembles de vertices: { *b, c, d, j, k* }, { *a, b, j, k* }, { *e, f, g, i* }, { *a, b, i* }, { *a, i, j* }, { *b, d, e* }, { *b, e, i* }, { *b, i, j* }, { *g, h, i* }, { *h, i, j* } **23.** { *c, d* } est un ensemble dominant minimum.
25. a)

b)

27. a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **29. a)** Un chemin de *u* à *v* dans un graphique *G* induit un chemin de $f(u)$ à $f(v)$ dans un isomorphe graphique *H* . **b)** Supposons que *f* soit un isomorphisme de *G* vers *H* . Si $v_0, v_1, ..., v_n, v_0$ est un circuit de Hamilton en *G* , alors $f(v_0), f(v_1), ..., f(v_n), f(v_0)$ doit être un circuit de Hamilton en *H* car c'est encore un circuit et $f(v_i) = f(v_j)$ pour $0 \leq i < j \leq n$. **c)** Supposons que *f* soit un isomorphisme de *G* à *H* . Si $v_0, v_1, ..., v_n, v_0$ est un circuit d'Euler en *G* , alors $f(v_0), f(v_1), ..., f(v_n), f(v_0)$ doit être un circuit d'Euler dans *H* car c'est un circuit qui contient chaque front exactement une fois. **d)** Deux graphes isomorphes doivent avoir le même numéro de croisement car ils peuvent être dessinés exactement de la même manière avion. **e)** On suppose que *f* est un isomorphisme de *G* à *H* . alors *v* est isolé dans *G* si et seulement si $f(v)$ on isole *H* . Par conséquent, les graphes doivent avoir le même nombre de sommets isolés.
f) On suppose que *f* est un isomorphisme de *G* à *H* . Si *G* est bipartite, alors l'ensemble de sommets de *G* peut être partitionné en V_1 et V_2 sans arête reliant les sommets à l'intérieur de V_1 ou les sommets à l'intérieur V_2 . Ensuite, l'ensemble de sommets de *H* peut être partitionné en $f(V_1)$ et $f(V_2)$ sans sommet reliant les sommets à l'intérieur de $f(V_1)$ ou sommets à l'intérieur de $f(V_2)$. **31.** 3 **33. a)** Oui **b)** Non **35.** Non **37.** Oui **39.** Si *e* est un bord coupé avec les extrémités *u* et *v* , alors si on dirige *e* de *u* vers *v* , il n'y aura pas de chemin dans la digraphique rectifié de *v* à *u* , sinon *e* n'aurait pas été un bord coupé. Un raisonnement similaire fonctionne si nous dirigeons *e* de *v* vers *u* . **41.** $n - 1$ **43.** Que les sommets représentent les poulets. nous inclure le bord (u, v) dans le graphique si et seulement si le poulet *u* domine le poulet *v* . **45.** Par le théorème de la poignée de main, le le degré moyen des sommets est de $2m/n$, ce qui correspond à la degree; il s'ensuit que tous les degrés de sommet sont égaux. **47.** $K_{3,3}$ et le squelette d'un prisme triangulaire **49. a)** Un Hamilton circuit dans le graphique correspond exactement à un siège de la chevaliers à la table ronde de telle sorte que les chevaliers adjacents sont copains. **b)** Le degré de chaque sommet de ce graphique est au moins $2n - 1 - (n - 1) = n \geq (2n/2)$, donc selon le théorème de Dirac, ce graphique a un circuit de Hamilton. **c)** *a, b, d, f, g, z* **51. a)** 4 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 4 **f)** 2 **53. a)** Supposons que $G = (V, E)$. Laissez $a, b \in V$. Nous devons montrer que la distance entre *a* et *b* dans *G* est au plus 2. Si $\{a, b\} \in E$ cette distance est 1, alors supposons $\{A, b\} \in E$. Parce que le diamètre de *G* est supérieur à 3, il y a sont des sommets *u* et *v* tels que la distance en *G* entre *u* et *v* est supérieur à 3. Soit *u* ou *v* , ou les deux, ne sont pas dans l'ensemble $\{a, b\}$. Supposons que *u* soit différent de *a* et *b* . Soit $\{a, u\}$ ou $\{b, u\}$ appartient à *E* ; sinon *a, u, b* serait un chemin en *G* de longueur 2. Donc, sans perte de généralité, supposons $\{A, u\} \in E$. Ainsi, *v* ne peut pas être *a* ou *b* et, pour la même raison, sonnement soit $\{a, v\} \in E$ ou $\{b, v\} \in E$. Dans les deux cas, cette donne un chemin de longueur inférieure ou égale à 3 de *u* à *v* dans *G* , une contradiction. **b)** Supposons $G = (V, E)$. Laissez $a, b \in V$. Nous devons montrer que la distance entre *a* et *b* dans *G* ne ne doit pas dépasser 3. Si $\{a, b\} \in E$, le résultat suit, alors supposons que $\{A, b\} \in E$. Parce que le diamètre de *G* est supérieur ou égal à 3, il existe des sommets *u* et *v* tels que la distance en *G* entre *u* et *v* est supérieur ou égal à 3. Soit *u* ou *v* , soit les deux, n'est pas dans l'ensemble $\{a, b\}$. Supposons que *u* est différent des deux *a* et *b* . Soit $\{a, u\} \in E$ ou $\{b, u\} \in E$; sinon *a, u, b* est un chemin de longueur 2 dans *G* . Donc, sans perte de généralité, assume $\{a, u\} \in E$. Ainsi, *v* est différent de *a* et de *b* . Si $\{a, v\} \in E$, alors *u, a, v* est un chemin de longueur 2 en *G* , donc $\{a, v\} \in E$ et donc $\{b, v\} \in E$ (ou bien il y aurait un chemin *a, v, b* de longueur 2 en *G*). Par conséquent, $\{u, b\} \in E$; sinon *u, b, v* est un chemin longueur de 2 à *G* . Ainsi, *a, v, u, b* est un chemin de longueur 3 en *G* , comme voulu. **55.** *a, b, e, z* **57.** *a, c, d, f, g, z* **59.** Si *G* est planaire, puis parce que $e \leq 3v - 6$, *G* a au plus 27 arêtes. (Si *G* n'est pas connecté, il a encore moins de bords.) De même, *G* a au plus 27 bords. Mais l'union de *G* et *G* est K_{11} , qui a 55 arêtes, et 55 > 27 + 27. **61.** Supposons que *G* est coloré avec *k* couleurs et a le numéro d'indépendance *i* . Êtrecar chaque classe de couleur doit être un ensemble indépendant, chaque couleur La classe n'a pas plus de *i* éléments. Il y a donc tout au plus *ki*

Page 69

sommets. **63. a)** $C(n, m)\, p^m (1 - p)^{n-m}$ **b)** np **c)** Générer
ériger un graphe étiqueté G, comme nous appliquons le processus à des paires de sommets, le nombre aléatoire x choisi doit être inférieur ou égal à $1/2$ lorsque G a une arête entre la paire de sommets et supérieure à $1/2$ lorsque G n'a pas de bord là. D'où le probabilité de faire le bon choix est de $1/2$ pour chaque bord et le $1 / \text{deux}^{C(n,2)}$ global. Par conséquent, tous les graphiques étiquetés sont également probable. **65.** Supposons que P augmente monotone. Si le propriétaire la propriété de ne pas avoir P n'a pas été conservée lorsque les bords sont retiré d'un simple graphique, il y aurait un simple graphique G n'ayant pas P et un autre graphe simple G avec le même sommets, mais avec quelques - uns des bords de G manquant qui a P. Mais P augmente monotone, donc parce que G a P, il en va de même G obtenue en ajoutant à bords G. C'est une contradiction. le la preuve de l'inverse est similaire.

CHAPITRE 11

Section 11.1

1. (a), (c), (e) **3. a)** a **b)** $a, b, c, d, f, h, j, q, t$ **c)** $e, g, i, k, l, m, n, o, p, r, s, u$ **d)** q, r **e)** c **f)** p **g)** f, b, a **h)** e, f, l, m, n

5. Non **7.** Niveau 0: a ; niveau 1: b, c, d ; niveau 2: e à k (en ordre alphabétique); niveau 3: l à r ; niveau 4: s, t ; niveau 5: u **9. a)** L'arbre entier **b)** c, g, h, o, p et les quatre bords cg, ch, ho, hp **c)** e seul **11. a)** 1 **b)** 2 **13. a)** 3 **b)** 9

15. a) La partie «seulement si» est le théorème 2 et la définition d'un arbre. Supposons que G est un graphe simple connecté avec n sommets et n - 1 bords. Si G n'est pas un arbre, il contient, par exercice 14, une arête dont la suppression produit un graphe G, qui est toujours connecté. Si G n'est pas un arbre, supprimez un bord pour produire un graphe connexe G. Répétez cette procédure jusqu'à ce que le résultat soit un arbre. Cela nécessite au plus $n - 1$ étapes car il n'y a que n - 1 bords. Par le théorème 2, le graphe résultant a n - 1 bords car il a n sommets. Il s'ensuit qu'aucun bord n'a été supprimé, donc G était déjà un arbre. **b)** Supposons que G est un arbre. Par la partie (a), G a $n - 1$ arêtes, et par définition, G n'a pas de sim-pleins circuits. Inversement, supposons que G n'a pas de circuits simples et a n - 1 bords. Soit c égal au nombre de composants de G, dont chacun est nécessairement un arbre, disons avec n_i sommets, où $\sum_{i=1}^{c} n_i = n$. Par la partie (a), le nombre total d'arêtes dans G est $\sum_{i=1}^{c} (n_i - 1) = n - c$. Comme on nous donne que cela est égal à n - 1, il s'ensuit que c = 1, c'est-à-dire que G est connecté et donc Fore satisfait la définition d'un arbre. **17.** 9999 **19.** 2000

21. 999 **23.** 1 000 000 dollars **25.** Aucun arbre de ce type n'existe Théorème 4 car il est impossible pour m = 2 ou m = 84.

27. Arbre binaire complet de hauteur 4:

Arbre complet à 3 aires de hauteur 3:

29. a) Par le théorème 3, il s'ensuit que $n = mi + 1$. Parce que $i + l = n$, nous avons $l = n - i$, donc $l = (mi + 1) - i = (m - 1)\, i + 1$.

b) Nous avons $n = mi + 1$ et $i + l = n$. Par conséquent, $i = n - l$. Il s'ensuit que $n = m(n - l) + 1$. La résolution de n donne $n = (ml - 1)/(m - 1)$. De $i = n - l$ on obtient $i = [(ml - 1)/(m - 1)] - l = (l - 1)/(m - 1)$. **31.** $n - t$

33. a) 1 **b)** 3 **c)** 5 **35. a)** Le répertoire parent **b)** Un sous- répertoire fichier cure ou contenue **c)** Un sous - répertoire ou d'un fichier contenu dans le même répertoire parent **d)** Tous les répertoires du nom du chemin **e)** Tous les sous-répertoires et fichiers ont continué dans le répertoire ou un sous-répertoire de ce répertoire, etc. **f)** La longueur de le chemin d'accès à ce répertoire ou fichier **g)** la profondeur du système, c'est-à-dire la longueur du chemin le plus long **37.** Soit $n = 2^k$, où k est un entier positif. Si k = 1, il n'y a rien à prouver car on peut ajouter deux nombres avec n - 1 = 1 processeur dans log 2 = 1 étape. Supposons que nous pouvons ajouter n chiffres en consigner n étapes en utilisant un réseau arborescent de n - 1 processus sors. Soit $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ soit $2n = 2^{k+1}$ chiffres que nous souhaite ajouter. Le réseau arborescent de $2n$ -1 processeurs se compose du réseau arborescent de n - 1 processeurs avec deux nouveaux processeurs comme enfants de chaque feuille. Dans une étape, nous pouvons utiliser les feuilles du plus grand réseau pour trouver $x_1 + x_2, x_3 + x_4, \ldots, x_{2n-1} + x_{2n}$, nous donnant n nombres, qui, par l'hypothèse inductive, on peut ajouter en log n étapes en utilisant le reste du réseau. Parce que nous avons utilisé log n +1 étapes et $\log(2n) = \log 2 + \log n = 1 + \log n$, ceci se termine la preuve. **39.** c seulement **41.** c et h **43.** Supposons un arbre T a au moins deux centres. Soit u et v des centres distincts, les deux avec excentricité e, avec u et v non adjacents. Parce que T est connecté, il existe un chemin simple P de u vers v. Soit c tout autre sommet sur ce chemin. Parce que l'excentricité de c est à moins e, il y a un sommet w tel que le chemin simple unique de c à w a une longueur d'au moins e. De toute évidence, ce chemin ne peut pas contenir à la fois u et v ou bien il y aurait un circuit simple. En fait, ce chemin de c vers w quitte P et ne revient pas à P une fois qu'il suit éventuellement une partie de P vers u ou v. Sans perte de généralité, supposons que ce chemin ne suit pas P vers u. Alors le chemin de u à c à w est simple et de longueur plus que e, une contradiction. Par conséquent, u et v sont adjacents cent. Maintenant, parce que deux centres sont adjacents, s'il y avait plus de deux centres, T contiendrait K_3, un circuit simple, comme un sous-graphique, ce qui est une contradiction.

45. T_1 T_2 T_3 T_4

T_5 T_6

T_7

47. La déclaration est que *chaque* arbre avec *n* sommets a un chemin de longueur *n* - 1, et il a été montré seulement qu'il existe un arbre avec *n* sommets ayant un chemin de longueur *n* - 1.

Section 11.2

1. banane

Pomme pêche

noix de coco poire

mangue

Papaye

3. **a)** 3 **b)** 1 **c)** 4 **d)** 5

5. le

rapide

marron

Renard

chien sauts

plus de

paresseux

7. Au moins ⌈log $_3$ 4⌉ = 2 pesées sont nécessaires, car il sont que quatre résultats (car il n'est pas nécessaire de déterminer si la pièce est plus légère ou plus lourde). En fait, deux pesées suffire. Commencez par peser la pièce 1 contre la pièce 2. S'ils peser la pièce 1 contre la pièce 3. Si la pièce 1 et la pièce 3 sont les même poids, la pièce 4 est la pièce contrefaite, et si elles ne le sont pas le même poids, alors la pièce 3 est la pièce contrefaite. Si la pièce 1 et la pièce 2 n'ont pas le même poids, pesez à nouveau la pièce 1 contre pièce 3. S'ils s'équilibrent, la pièce 2 est la pièce contrefaite; si ils ne pas équilibrer, la pièce 1 est la pièce contrefaite. **9.** Au moins ⌈Log $_3$ 13⌉ = 3 pesées sont nécessaires. En fait, trois pesées suffire. Commencez par placer les pièces 1, 2 et 3 sur le côté gauche du solde et des pièces 4, 5 et 6 sur le côté droit. En cas d'égalité, appliquez l'exemple 3 aux pièces 1, 2, 7, 8, 9, 10, 11 et 12. En cas d'inégalité, appliquez l'exemple 3 à 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8.

11. Le moins est cinq. Appelez les éléments *a* , *b* , *c* et *d* . Comparez d'abord *a* et *b* ; puis comparez *c* et *d* . Sans perte de généralité, supposons que *a* <*b* et *c* <*d* . Comparez ensuite *un* et *c* . Celui qui est le plus petit est le plus petit élément de l'ensemble. Encore une fois sans perte de généralité, supposons *a* <*c* . Enfin, coupez *b* avec *c* et *d* pour déterminer complètement l'ordre.

13. Les deux premières étapes sont présentées dans le texte. Après 22 a été identifié comme le deuxième plus grand élément, nous remplaçons la feuille 22 par −∞ dans l'arbre et recalculer le vainqueur sur le chemin à partir de la feuille où 22 était jusqu'à la racine. Ensuite, nous voyons que 17 est le troisième élément en importance, nous répétons donc le processus: remplacer la feuille 17 par −∞ et recalculer. Ensuite, nous voyons que 14 est le quatrième élément en importance, nous répétons donc le processus: placer la feuille 14 par −∞ et recalculer. Ensuite, nous voyons que 11 est le cinquième plus grand élément, nous répétons donc le processus: remplacer la feuille 11 par −∞ et recalculer. Le processus se poursuit en de cette manière. Nous déterminons que 9 est le sixième plus grand élément, 8 est le septième plus grand élément, et 3 est le huitième plus grand élément. Les arbres ont produit à toutes les étapes, sauf la seconde à enfin, sont présentés ici.

17

17 11

8 17 9 11

- 8 14 17 3 9 - 11

14

14 11

8 14 9 11

- 8 14 - 3 9 - 11

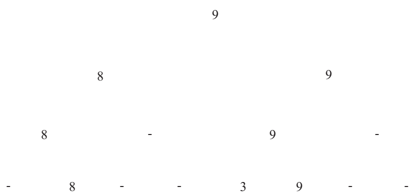
11

8 11

8 - 9 11

- 8 - - 3 9 - 11

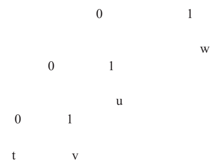
Page 71



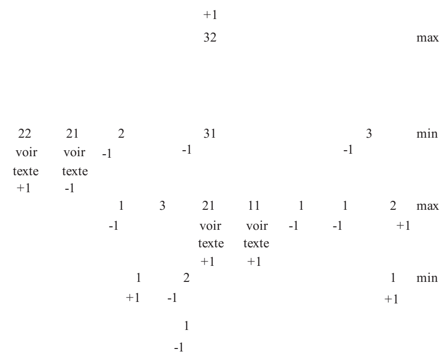
15. La valeur d'un sommet est l'élément de liste actuellement présent, et l'étiquette est le nom (c.-à-d. l'emplacement) de la feuille responsable pour cette valeur.

procédure *sorte de tournoi (un* $_1$, ..., a_n*)*
$k := \lceil \log n \rceil$
construire un arbre binaire de hauteur k
pour $i := 1$ **à** n
  définissez la valeur de la i ème feuille sur *un* $_i$ et son étiquette sur
    être lui-même
pour $i := n + 1$ **à** 2^k
  définissez la valeur de la i ème feuille sur $-\infty$ et son étiquette sur
    être lui-même
pour $i := k - 1$ **jusqu'à** 0
  pour chaque sommet v au niveau i
    définir la valeur de v à la plus grande des valeurs de son
      les enfants et son étiquette pour être l'étiquette de l'enfant
      avec la plus grande valeur
pour $i := 1$ **à** n
  $c_i :=$ valeur à la racine
  soit v l'étiquette de la racine
  définissez la valeur de v sur $-\infty$
    tandis que l'étiquette à la racine est toujours v
      $v := parent\ (v)$
      définir la valeur de v à la plus grande des valeurs de son
        les enfants et son étiquette pour être l'étiquette de l'enfant
        avec la plus grande valeur
{ c_1, ..., c_n est la liste dans l'ordre non croissant}

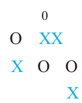
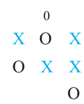
17. $k - 1$, où $n = 2^k$ **19. a)** Oui **b)** Non **c)** Oui **d)** Oui

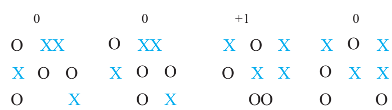


27. A: 0001; B: 101001; C: 11001; D: 00000; E: 100; F: 001100; G: 001101; H: 0101; I: 0100; J: 110100101; K: 1101000; L: 00001; M: 10101; N: 0110; O: 0010; P: 101000; Q: 1101001000; R: 1011; S: 0111; T: 111; U: 00111; V: 110101; W: 11000; X: 11010011; Y: 11011; Z: 1101001001 **29.** A: 2; E: 1; N: 010; R: 011; T: 02; Z: 00 **31.** *n* **33.** Parce que l'arbre est assez grand, nous avons indiqué à certains endroits de «voir le texte». Reportez-vous à la figure 9; le sous-arbre enraciné à ces carrés ou cercles sommets est exactement le même que le sous-arbre correspondant dans Figure 9. Le premier joueur gagne.



35. a) 1 $ **b)** 3 $ **c)** - 3 $ **37.** Voir les chiffres ci-dessous. **a)** 0 **b)** 0 **c)** 1 **d)** Cette position ne peut pas avoir eu lieu dans un Jeu; cette photo est impossible.

une)  **b)** 



21. *a* : 000, *e* : 001, *i* : 01, *k* : 1100, *o* : 1101, *p* : 11110, *u* : 11111
23. a: 11; b: 101; c: 100; d: 01; e: 00; 2,25 bits (Remarque: ce le codage dépend de la façon dont les liens sont rompus, mais le nombre nombre de bits est toujours le même.) **25.** Il y a quatre réponses en tout, celle montrée ici et trois autres obtenues de celui-ci en échangeant t et v et / ou en échangeant u et w.

0	0	+1	0
O XX	O XX	X O X	X O X
X O O	X O O	O X X	O X X
O XX	X O X	X OO	O X O
dessiner	dessiner	X gagne	dessiner